BEWEIS EINER CARATHEODORYSCHEN VERMUTUNG.

Von

HANS LUDWIG HAMBURGER
in Cambridge, England.

TEIL II.[1]

Inhalt von Teil II.

---

[1] Vgl. auch Teil I dieser Arbeit mit dem gleichen Titel: Annals of Math.

Die Ergebnisse von Teil I, soweit sie für das Verständnis des folgenden von Bedeutung sind, haben wir in der Einleitung von Teil II und Teil III zusammengestellt derart, dass wir bei den weiteren in Teil II und Teil III durchgeführten Untersuchungen auf die Ausführungen von Teil I nicht mehr Bezug zu nehmen brauchen.

Inhalt von Teil III.

Einleitung zu Teil II und Teil III.

1. In der vorliegenden Arbeit soll eine von Herrn Caratheodory geäusserte Vermutung bewiesen werden, die wir folgendermassen formulieren wollen:

Hauptsatz: *Eine geschlossene Fläche $\mathfrak{F}$ vom Geschlechte 0 mit stetiger Tangentialebene und stetiger Krümmung hat mindestens einen Nabelpunkt S. Ist $\mathfrak{F}$ im Punkte S und seiner Umgebung regulär analytisch, so hat $\mathfrak{F}$ noch mindestens einen zweiten von S verschiedenen Nabelpunkt.*

2. Im Teil I haben wir gezeigt[1], dass schon aus topologischen Gründen

[1] Vgl. Teil I, Einleitung, Abschnitt 1—4.

erstens *jede geschlossene Fläche $\mathfrak{F}$ vom Geschlechte 0 mit stetiger Tangentialebene und stetiger Krümmung mindestens einen Nabelpunkt hat,*

zweitens *die Existenz eines zweiten Nabelpunktes auf einer solchen Fläche aus der Abschätzung für den Index i_S eines isolierten Nabels:*

$$i_S \geqq 0 \tag{1}$$

unmittelbar folgt.

Hierbei ist der Index i_S als eine einfache geometrische Eigenschaft des Netzes der Krümmungslinien in der Umgebung des isolierten Nabels S definiert worden. Es sei nämlich $\mathfrak{p}$ ein geschlossener doppelpunktfreier Polygonzug von endlich vielen Seiten, deren jede aus einem Krümmungslinienstück besteht, und der S im Inneren enthält. Dann sind die Winkel an den Ecken, als Winkel zwischen zwei Krümmungslinien, Rechte. Man bezeichnet ferner eine Ecke als ausspringend, wenn die Verlängerungen der beiden sich in ihr treffenden Seiten ins Äussere des Polygonzuges zeigen, als einspringend, wenn sie ins Innere zeigen.

Nunmehr wird der Index i_S gleich der Differenz der Anzahl der ausspringenden Ecken des Polygonzuges $\mathfrak{p}$ vermindert um die Anzahl der einspringenden Ecken von $\mathfrak{p}$. Diese Differenz erweist sich als unabhängig von der speziellen Wahl von $\mathfrak{p}$.

3. Bereits in Teil I haben wir die Behauptung (1), das eigentliche Ziel unserer Untersuchungen, unter gewissen speziellen Voraussetzungen bewiesen, die im Zusammenhang mit der analytischen Darstellung der vorgelegten Fläche in der Umgebung des Nabels formuliert worden sind.

Es sei nämlich $W(\varrho, \vartheta)$ eine im Bereich $0 \leqq \varrho \leqq \varrho_0$, $-\infty < \vartheta < +\infty$ definierte Funktion, die dort stetige partielle Ableitungen nach ϱ und ϑ bis zur 3. Ordnung besitzen möge. Ausserdem sei

$$W(0, \vartheta) = 0, \quad W(\varrho, \vartheta + 2\pi) = W(\varrho, \vartheta). \tag{2}$$

Werden jetzt die Koordinaten

$$u = \varrho \cos \vartheta, \quad v = \varrho \sin \vartheta$$

eingeführt, so lassen sich ϱ, ϑ als Polarkoordinaten in der u, v-Ebene deuten, in welcher die Funktion W mit Rücksicht auf ihre Periodizitätseigenschaft (2) eindeutig bestimmt ist. Mit Hilfe dieser Funktion W konstruiere man eine Fläche $\mathfrak{F}$, indem man

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \varrho\cos\vartheta - 2\,W\dfrac{W_\varrho\cos\vartheta - \dfrac{W_\vartheta}{\varrho}\sin\vartheta}{1 + W_\varrho^2 + \dfrac{W_\vartheta^2}{\varrho^2}} \\[2ex] y = \varrho\sin\vartheta - 2\,W\dfrac{W_\varrho\sin\vartheta + \dfrac{W_\vartheta}{\varrho}}{1 + W_\varrho^2 + \dfrac{W_\vartheta^2}{\varrho^2}} \\[2ex] z = \dfrac{2\,W}{1 + W_\varrho^2 + \dfrac{W_\vartheta^2}{\varrho^2}} \end{cases}$$

setzt, unter W_ϱ, W_ϑ wie üblich die partiellen Ableitungen 1. Ordnung von W nach ϱ und ϑ verstanden.

In Teil I, § 5, war bewiesen worden, dass sich jede reguläre Fläche in der Umgebung eines konvexen Punktes in eindeutiger Weise durch die Formeln (3) darstellen lässt, und wir hatten ferner die einfache geometrische Bedeutung der Funktion W auseinandergesetzt (vgl. Figur 4 des Teils I).

4. Nunmehr setzen wir voraus, dass sich die Funktion $W(\varrho, \vartheta)$ in eine für $0 \leqq \varrho \leqq \varrho_0$ und für alle reellen Werte von ϑ absolut und gleichmässig konvergente Potenzreihe von ϱ

$$(4)\qquad W(\varrho, \vartheta) = \frac{\varrho^2}{4R} + \varrho^m \sum_{\mu=0}^{\infty} w_\mu(\vartheta)\,\varrho^\mu \qquad (m \geqq 3)$$ [1]

entwickeln lässt. Hierbei seien die Funktionen $w_\mu(\vartheta)$ sämtlich in jedem reellen Punkte ϑ regulär analytisch, und ausserdem sei mit Rücksicht auf (2)

$$w_\mu(\vartheta + 2\pi) = w_\mu(\vartheta) \qquad \text{für alle } \mu.$$

Endlich möge $w_0(\vartheta)$ nicht identisch verschwinden. Dann lässt sich leicht zeigen, dass die Fläche (3) im Punkte $u = 0$, $v = 0$, d. h. für $\varrho = 0$ einen Nabelpunkt hat, in welchem eine Schmiegungskugel vom Radius R die Fläche (3) von der Ordnung $m - 1$ berührt (vgl. Teil I, § 7, Abschnitt 25). Umgekehrt folgt, dass jede Fläche in der Umgebung eines isolierten Nabels, wenn sie dort analytisch ist, auf eine Funktion W führt, die sich in der in Formel (4) angegebenen Weise entwickeln lässt (vgl. Teil I, § 7, Fussnote 16).

[1] In Teil I ist übrigens über die Funktion $W(\varrho, \vartheta)$ wesentlich weniger vorausgesetzt worden. Vgl. dort die Einleitung Abschnitt 7, insbesondere Formel (5).

5. Der Vorteil der Darstellung (3) für die Fläche $\mathfrak{F}$ besteht darin, dass sich aus ihr die Differentialgleichung der Krümmungslinien in einer besonders einfachen Gestalt ergibt (vgl. Teil I, § 6); diese lautet nämlich

$$A\,(d\varrho^2 - \varrho^2\, d\vartheta^2) + 2\,B\,\varrho\, d\varrho\, d\vartheta = 0, \tag{5}$$

wobei

$$\left\{\begin{aligned} A &= \frac{W_{\varrho\vartheta}}{\varrho} - \frac{W_\vartheta}{\varrho^2} = \frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{W_\vartheta}{\varrho}\right) = \varrho^{m-2}\sum_{\mu=0}^{\infty}(m-1+\mu)\,w'_\mu(\vartheta)\,\varrho^\mu, \\ 2\,B &= \frac{W_{\vartheta\vartheta}}{\varrho^2} - W_{\varrho\varrho} + \frac{W_\varrho}{\varrho} \end{aligned}\right. \tag{6}$$

zu setzen ist.

Da nach Voraussetzung der Punkt S ein isolierter Nabelpunkt der Fläche ist, muss ein Bereich $0 < \varrho \leqq \delta \leqq \varrho_0$ existieren, in dem A und B an keiner einzigen Stelle gemeinsam verschwinden.

6. Nunmehr gelingt es auch einen analytischen Ausdruck für den Index i_S zu bestimmen, der nur von den Koeffizienten A und B der Differentialgleichung (5) abhängt (vgl. Teil I, § 4). Es sei $\vartheta = \theta_\mu(\varrho)$ eine reelle Lösung der Gleichung

$$A\,(\varrho, \vartheta) = 0 \tag{7}$$

und s_μ der Vielfachheitsgrad dieser Lösung derart, dass

$$A\,(\varrho, \vartheta) = (\vartheta - \theta_\mu(\varrho))^{s_\mu} A_\mu(\varrho, \vartheta)$$

gesetzt werden kann, wobei

$$A_\mu(\varrho, \theta_\mu(\varrho)) \neq 0 \qquad \text{für } 0 < \varrho \leqq \delta$$

ist. Ferner werde das Interwall $0 < \varrho \leqq \delta$ so klein gewählt, dass in ihm zwei verschiedene Zweige $\theta_\mu(\varrho)$ und $\theta_{\mu'}(\varrho)$ ausser für $\varrho = 0$ keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

Sind jetzt

$$\vartheta_1 < \vartheta_2 < \cdots < \vartheta_N \tag{8}$$

sämtliche reellen Nullstellen der Funktion $w'_0(\vartheta) = \dfrac{d\,w_0}{d\,\vartheta}$ im Intervall $-\pi \leqq \vartheta < +\pi$ und damit gleichzeitig alle Stellen, an denen die Funktion $w_0(\vartheta)$ selbst in diesem Intervall ein Extremum oder einen Wendepunkt hat, so muss, wie aus der speziellen Gestalt (6) des Koeffizienten A folgt, $\lim\limits_{\varrho\to 0}\theta_\mu(\varrho)$ gleich einer der Nullstellen

(8) der periodischen analytischen Funktion $w'_0(\vartheta)$ werden (vgl. Teil I, § 8, Abschnitt 29), d. h. man hat

$$\lim_{\varrho \to 0} \theta_\mu(\varrho) \to \vartheta_\nu + 2n\pi.$$

Es sei nun vorübergehend der Punkt $\vartheta = 0$ so gewählt, dass $w'_0(-\pi) = w'_0(+\pi) \neq 0$ ist. Betrachten wir nun nur diejenigen Kurven $\vartheta = \theta_\mu(\varrho)$, für welche

$$\lim_{\varrho \to 0} \theta_\mu(\varrho) \to \vartheta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N) \tag{9}$$

wird, so werden alle diese Kurven, deren Anzahl gleich u sein möge, im Bereich $0 < \varrho \leqq \delta$ sich der Grösse nach ordnen lassen derart, dass dort

$$-\pi < \theta_1(\varrho) < \theta_2(\varrho) < \cdots < \theta_\mu(\varrho) < \theta_{\mu+1}(\varrho) < \cdots < \theta_u(\varrho) < +\pi \tag{10}$$

wird.

Dies vorausgeschickt, wird (vgl. Teil I, § 4, Formel (18))

$$i_S = \sum_{\theta_\mu(\varrho)} \operatorname{sg} \frac{\dfrac{\partial^{s_\mu} A(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_\mu}}}{2B(\varrho, \vartheta)} \Bigg/ \vartheta = \theta_\mu(\varrho).[1] \tag{11}$$

Dabei ist die Summation nur über diejenigen Funktionen (10) zu erstrecken, welche von ungeradem Vielfachheitsgrad s_μ sind, während Kurven $\theta_\mu(\varrho)$ mit geradem Vielfachheitsgrad s_μ fortzulassen sind. (In Formel (18) aus Teil I, § 4, ist übrigens der Vielfachheitsgrad der Kurve $\vartheta = \theta_\mu(\varrho)$ mit k_μ statt mit s_μ bezeichnet worden.)

7. Wir suchen nunmehr den Ausdruck rechter Hand von (11) als Summe von Teilsummen darzustellen. Wenn wir unter $i(\vartheta_\nu)$ die Teilsumme aus allen denjenigen Gliedern von (11) verstehen, bei welchen das zugehörige $\theta_\mu(\varrho)$ der Beziehung (9) genügt, so erhält man

$$i_S = \sum_{\nu=1}^{N} i(\vartheta_\nu), \tag{12}$$

wobei ϑ_ν alle in Formel (8) angegebenen N Nullstellen von $w'_0(\vartheta)$ im Intervall $-\pi \leqq \vartheta \leqq +\pi$ durchläuft.

[1] Hierbei ist, unter a eine reelle von 0 verschiedene Zahl verstanden, $\operatorname{sg} a = +1$ oder $= -1$ zu setzen, je nachdem $a > 0$ oder $a < 0$ ist.

Nun führen aber elementare Überlegungen (vgl. die Abschnitte 33 und 34 von Teil I, § 9) zu dem Ergebnis, dass

(13) $i(\vartheta_\nu) = +1$, *wenn die Funktion* $w_0(\vartheta)$ *für* $\vartheta = \vartheta_\nu$ *entweder ein positives Maximum oder ein negatives Minimum hat,*

(14) $i(\vartheta_\nu) = 0$, *wenn die Funktion* $w_0(\vartheta)$ *für* $\vartheta = \vartheta_\nu$ *einen Wendepunkt hat und gleichzeitig* $w_0(\vartheta_\nu) \neq 0$ *ist,*

(15) $i(\vartheta_\nu) \geqq -1$, *wenn die Funktion* $w_0(\vartheta)$ *für* $\vartheta = \vartheta_\nu$ *entweder ein negatives Maximum oder ein positives Minimum hat;*

und hieraus wird dann leicht das Hauptresultat von Teil I abgeleitet, *dass nämlich* $i_S \geqq 0$ *ist, wofern nur* $w_0(\vartheta)$ *ausschliesslich Nullstellen erster oder zweiter Ordnung, aber keine Nullstellen dritter oder höherer Ordnung besitzt.*

8. Es bleibt nur noch übrig den Fall zu untersuchen, dass auch eine Nullstelle ϑ_ν° von $w_0(\vartheta)$ der Ordnung $k + 1 \geqq 3$ auftritt. Wir behaupten jetzt: *wenn wir annehmen, dass sich für diesen Fall*

$$i(\vartheta_\nu^\circ) \geqq -1 \tag{16}$$

beweisen lässt, so lässt sich aus der Annahme (16) *unmittelbar die Abschätzung* $i_S \geqq 0$ *folgern.*

Und in der Tat: Da nach Voraussetzung $w_0(\vartheta_\nu^\circ) = 0$ ist, so ist das nächste ϑ_ν° vorhergehende Extremum und das nächste auf ϑ_ν° folgende Extremum von $w_0(\vartheta)$ entweder ein positives Maximum oder ein negatives Minimum; diese Extrema mögen an den Stellen $\vartheta = \vartheta_{\nu'}$ bezw. $\vartheta = \vartheta_{\nu''}$ angenommen werden. Dann folgt aus (13)

$$i(\vartheta_{\nu'}) = +1, \quad i(\vartheta_{\nu''}) = +1.$$

In der Reihe (8) der N Nullstellen ϑ_ν von $w'_0(\vartheta)$ streiche man jetzt diejenigen Stellen ϑ_ν, an welchen die Funktion $w_0(\vartheta)$ einen Wendepunkt hat, ohne selbst zu verschwinden; an solchen Stellen ist nach Formel (14) $i(\vartheta_\nu) = 0$. Dann nimmt die Funktion $w_0(\vartheta)$ in den nach dieser Streichung noch übrig bleibenden Stellen ϑ_ν, die wir mit ϑ'_λ bezeichnen wollen, offenbar entweder ein von 0 verschiedenes Extremum an, oder aber $w_0(\vartheta)$ verschwindet für $\vartheta = \vartheta'_\lambda$. Mithin erhält man anstelle von (12)

$$i_S = \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} i(\vartheta'_\lambda), \qquad (\Lambda \leqq N), \tag{17}$$

da sich die Summe (17) von der Summe (12) nur durch das Fortlassen solcher Glieder unterscheidet, welche wegen (14) gleich 0 sind.

Der Wert der einzelnen Glieder $i(\vartheta'_\lambda)$ wird entweder durch Formel (13) bestimmt oder durch die Formeln (15) bezw. (16) abgeschätzt. Sind jetzt die ϑ'_λ der Grösse nach geordnet, so können nach den oben gemachten Bemerkungen zwei aufeinanderfolgende Glieder der Summe (17) $i(\vartheta'_\lambda)$ und $i(\vartheta'_{\lambda+1})$ nicht beide gleichzeitig den Wert -1 annehmen. Denn damit $i(\vartheta'_\lambda) = -1$ ist nach den Beziehungen (13), (14), (15) und (16) notwendig, dass die Funktion $w_0(\vartheta)$ für $\vartheta = \vartheta'_\lambda$ entweder ein negatives Maximum oder ein positives Minimum annimmt, oder endlich, dass $w_0(\vartheta'_\lambda)$ selbst verschwindet. Ausserdem können auch nicht $i(\vartheta'_1)$ und $i(\vartheta'_A)$ (erstes und letztes Glied der Summe von (17)) beide gleich -1 sein, da auf Grund der Periodizitätseigenschaft von $w_0(\vartheta)$

$$\vartheta'_{A+1} = \vartheta'_1 + 2\pi, \quad i(\vartheta'_{A+1}) = i(\vartheta'_1)$$

ist, ϑ'_1 mithin als die unmittelbar auf ϑ'_A folgende Stelle aufgefasst werden kann.

Aus diesen Bemerkungen folgt aber offenbar, dass die Summe (17) für i_S immer $\geqq 0$ bleibt. Damit wäre das Ziel unserer Untersuchungen erreicht und die Caratheodorysche Vermutung unter den Voraussetzungen, die wir im Hauptsatz zu Anfang formuliert haben, unter der Annahme (16) bewiesen.

9. Die Behauptung (1) erscheint somit hier als unmittelbare Folgerung aus der Abschätzung (16). Folglich haben wir den Beweis der Caratheodoryschen Vermutung auf den Beweis der Abschätzung (16) zurückgeführt. Und daher ist auch die vorliegende Arbeit der Untersuchung des Index $i(\vartheta_\nu^\circ)$ gewidmet.

Der einfachen Bezeichnung halber denken wir uns die mehrfache Wurzel ϑ_ν° der Gleichung $w_0(\vartheta) = 0$ an die Stelle $\vartheta = 0$ gerückt, sodass sich die behauptete Abschätzung (16) in der Form

$$(18) \qquad i(0) = \sum_{\theta_\nu(\varrho)}{}' \operatorname{sg} \left. \frac{\dfrac{\partial^{s_\nu} A(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_\nu}}}{2B(\varrho, \vartheta)} \right/ \vartheta = \theta_\nu(\varrho) \geqq -1$$

schreiben lässt. Hierbei ist die Summation über alle diejenigen Lösungen $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ der Gleichung (7) zu erstrecken, welche

erstens von ungeradem Vielfachheitsgrad s_ν sind,

zweitens der Bedingung

$$(19) \qquad \lim_{\varrho \to 0} \theta_\nu(\varrho) \to 0$$

genügen. Ausserdem wird vorausgesetzt, dass $w_0(\vartheta)$ für $\vartheta = 0$ von der Ordnung

$k + 1 \geqq 3$ verschwindet. (Für $k + 1 = 2$ ist die Abschätzung schon im Teil I, § 9, bewiesen, während sie für $k + 1 = 1$ sinnlos wird, da dann $\vartheta = 0$ keine Nullstelle von $w'_0(\vartheta)$ ist.)[1]

10. Zur Untersuchung der Summe (18) hat man die Puiseuxschen Entwicklungen derjenigen Lösungen $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ der Gleichung (7) heranzuziehen, welche der Nebenbedingung (19) genügen. Nachdem man in dem Koeffizienten A in bekannter Weise die uniformisierende Substitution

$$\varrho = \sigma^q, \quad \vartheta = \sigma^{p_\nu}\,\omega$$

ausgeführt hat, seien

$$\theta_\nu(\varrho) = \sigma^{p_\nu}\,\Omega_\nu(\sigma) = \sigma^{p_\nu} \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_{\nu,\mu}\,\sigma^\mu \tag{20}$$

die Puiseuxschen Reihen für $\theta_\nu(\varrho)$.

Wir betrachten nun wieder Teilsummen der in Formel (18) angegebenen Summe. Zu diesem Zwecke führen wir den Begriff des Kurvenverbandes ein, und verstehen unter einem Kurvenverband der Ordnung 0 die Gesamtheit der

---

[1] Um die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit übersichtlicher zu gestalten, wird im folgenden ein für alle Mal die in Formel (4) eingeführte Funktion $W(\varrho, \vartheta)$ als regulär analytisch vorausgesetzt. Eine genauere Betrachtung zeigt indessen, dass man in Wahrheit bei den Beweisführungen nur wesentlich allgemeinere Eigenschaften der Funktion W heranzieht. In der Tat genügt es, über die Funktion W die hier angegebenen drei Voraussetzungen zu machen:

1. die Funktion W sei von der Gestalt

$$W(\varrho, \vartheta) = \frac{\varrho^2}{4R} + \varrho^m(w_0(\vartheta) + \varrho\,F(\varrho, \vartheta))$$

wobei m eine Zahl > 2 ist und die Funktionen $w_0(\vartheta)$ und $F(\varrho, \vartheta)$ alle stetigen Ableitungen nach ϱ und ϑ beliebig hoher Ordnung besitzen mögen.

2. Es mögen nur endlich viele reelle Kurvenzüge

$$\vartheta = \theta_\mu(\varrho)$$

existieren, für die gleichzeitig

$$A(\varrho, \theta_\mu(\varrho)) = 0, \quad -\pi \leqq \theta_\mu(\varrho) < +\pi, \quad 0 \leqq \varrho \leqq \delta.$$

3. Zu jedem μ möge eine Zahl $L'_\mu > 0$ gehören derart, dass

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{2\,B(\varrho, \theta_\mu(\varrho))}{\varrho^{L'_\mu}} \to \zeta_\mu \neq 0.$$

Wir fügen noch die Bemerkung hinzu, dass es für unsere Untersuchungen sogar genügt, die Existenz stetiger Ableitungen der Funktionen $w_0(\vartheta)$ und $F(\varrho, \vartheta)$ nur bis zu einer gewissen endlichen Ordnung L vorauszusetzen. Diese Zahl L hängt allerdings von der Gestalt der vorgelegten Fläche in der Umgebung des Nabels S, insbesondere von den in der Voraussetzung 3. auftretenden Konstanten L'_μ ab.

reellen Funktionen $\theta_\nu(\varrho)$ aus Formel (20), die zum gleichen Exponenten p_ν gehören, unter einem Kurvenverband der Ordnung μ die Gesamtheit der reellen Funktionen (20), welche im Exponenten p_ν und den μ ersten Koeffizienten der Potenzreihen $\Omega_\nu(\sigma)$, nämlich

$$\alpha_{\nu,0},\ \alpha_{\nu,1},\ \ldots,\ \alpha_{\nu,\mu-1}$$

übereinstimmen. Weiter verstehen wir unter dem Index eines Kurvenverbandes diejenige Teilsumme der Summe (18), welche über sämtliche Funktionen $\theta_\nu(\varrho)$ erstreckt ist, die diesem Kurvenverband angehören und von ungeradem Vielfachheitsgrad s_ν sind.

11. Nach einigen einfachen vorbereitenden Betrachtungen in Kapitel I werden in Kapitel II die Indices der Kurvenverbände der Ordnung 0 untersucht, und man gelangt bereits hier zu einem Ergebnis von allgemeinerem Charakter. Um dieses Ergebnis zu formulieren, bilde man für alle ν die Entwicklungen

$$2\,B(\sigma^q,\ \sigma^{p_\nu}\omega) = \sigma^{L_\nu}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\mathfrak{G}_{\nu,\lambda}(\omega)\,\sigma^\lambda, \tag{21}$$

wobei $\mathfrak{G}_{\nu,0}(\omega)$ ein nicht identisch verschwindendes Polynom von ω bezeichnet. Dies vorausgeschickt, wird in Kapitel II die Abschätzung $i(0) \geqq -1$ für den Fall bewiesen, dass die vorgelegte Fläche in der Umgebung ihres isolierten Nabels S auf eine Differentialgleichung (5) führt, deren Koeffizienten A und B den Bedingungen

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{2\,B(\sigma^q,\ \sigma^{p_\nu}\Omega_\nu(\sigma))}{\sigma^{L_\nu}} \to C_\nu \neq 0 \tag{22}$$

für alle ν genügen[1]; hierbei ist unter L_ν der in der Entwicklung (21) auftretende Exponent zu verstehen.

12. Ist die Bedingung (22) nicht für jedes ν erfüllt, so führt die Betrachtung der Kurvenverbände der Ordnung 0 allein noch nicht zum Ziele, und man ist gezwungen, die Indices der Kurvenverbände höherer Ordnung zu untersuchen.

Das hierbei auftretende Hauptproblem besteht darin, eine Aussage über das Vorzeichen von

[1] Darüber hinaus wird in § 11, Kapitel II ein Ausnahmefall betrachtet, in dem sich der Index des Kurvenverbandes der Ordnung 0 abschätzen und damit die Behauptung $i(0) \geqq -1$ beweisen lässt, obgleich

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{2\,B(\sigma^q,\ \sigma^{p_\nu}\Omega_\nu(\sigma))}{\sigma^{L_\nu}} \to 0.$$

$$2\,B(\sigma^q,\ \sigma^{p_\nu}\,\Omega_\nu(\sigma)) \tag{23}$$

für solche ν zu machen, für welche die Beziehung (22) nicht gilt. Zu diesem Zwecke haben wir den Ausdruck (23) in eine Potenzreihe von σ zu entwickeln und ihren ersten von 0 verschiedenen Koeffizienten zu bestimmen. Das gelingt mit Hilfe eines von Herrn Enriques angegebenen Algorithmus[1], dessen wichtigste Eigenschaften im Kapitel III angegeben werden. In Kapitel IV werden dann Sätze über die Indices gewisser spezieller Kurvenverbände höherer Ordnung abgeleitet, die in Kapitel V, zunächst in § 27, zur Abschätzung der Indices aller Kurvenverbände der Ordnung $\geqq 1$, dann aber auch, in § 28, zur Abschätzung des Index des allgemeinsten Kurvenverbandes der Ordnung 0 führen. Hieraus folgt dann schliesslich die Behauptung $i(0) \geqq -1$ für den allgemeinsten Fall einer in der Umgebung des Nabels analytischen Fläche.

Wie kompliziert der Sachverhalt in Wahrheit ist, erkennt man an einer sich bei der Untersuchung ergebenden Eigenschaft: Während nämlich die Indices der Kurvenverbände der Ordnung 0 sämtlich $\geqq -1$ sind, gilt für die Indices i_μ von Kurvenverbänden der Ordnung $\mu \geqq 1$ nur die Abschätzung $i_\mu \geqq -2$, wobei die untere Grenze -2 von dem Index i_μ in speziellen Fällen auch wirklich angenommen wird.

Einen Bericht, der das Ziel der Untersuchungen in den Kapiteln III, IV und V noch präziser formuliert, findet der Leser im letzten Abschnitt des Kapitels II, d. i. Abschnitt 66, § 12.

KAPITEL I.

Einführende Betrachtungen, Bezeichnungen und Definitionen.

§ 1. Das Newtonsche Polygon der Gleichung $A(\varrho, \vartheta) = 0$.

13. Indem man von der Potenzreihenentwicklung (4) für die in der Einleitung eingeführten Funktion $W(\varrho, \vartheta)$ ausgeht, erhält man

$$\frac{W_\vartheta}{\varrho} = \varrho^{m-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} w'_\mu(\vartheta)\,\varrho^\mu. \tag{24}$$

[1] Eine ausführliche Darstellung dieses Algorithmus findet sich in dem Werke von F. Enriques—O. Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* (Bologna, 1918) Bd. II, S. 459—477.

Entwickelt man auch die als analytisch vorausgesetzten Funktionen $w'_\mu(\vartheta)$ in Potenzreihen,

(25) $$w'_\mu(\vartheta) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} w_{\mu,\varkappa}\,\vartheta^\varkappa$$

so ergibt sich aus den Formeln (6) und (25)

(26) $$A = \frac{\partial}{\partial\varrho}\,\frac{W_\vartheta}{\varrho} = \varrho^{m-2}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\varkappa=0}^{\infty}(m-1+\mu)\,w_{\mu,\varkappa}\,\vartheta^\varkappa\varrho^\mu.$$

14. Man denke sich jetzt alle Puiseuxschen Entwicklungen (zunächst einmal die reellen und auch die komplexen)

(27) $$\vartheta = \theta_\nu(\varrho) = \varrho^{\frac{p_\nu}{q}}\sum_{\mu=0}^{\infty}\alpha_{\nu,\mu}\,\varrho^{\frac{\mu}{q}} \qquad (\alpha_{\nu 0} \neq 0)$$

aufgestellt, die den beiden Gleichungen

(28) $$A(\varrho,\theta_\nu(\varrho)) = 0, \quad \lim_{\varrho\to 0}\theta_\nu(\varrho) \to 0$$

genügen. Diese Funktionen $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ mögen kurz die Nullkurven von A genannt werden. Hierbei seien die positiven gebrochenen rationalen Zahlen $\frac{p_\nu}{q}$ nicht notwendig irreduzibel; vielmehr sei, wenn man unter $\frac{p'_\nu}{q_\nu}$ die irreduzible Form des Bruches $\frac{p_\nu}{q}$ versteht, q der Hauptnenner (kleinstes gemeinschaftliches Vielfach) der Zahlen q_ν.

Die Existenz der Reihen (27) ist durch den oft zitierten Wierstrasschen Vorbereitungssatz gesichert, und zwar kann A auf die Form

(29) $$A(\varrho,\vartheta) = \varrho^{m-2}\,\vartheta^{k_0}\prod_{\nu=1}^{N}(\vartheta-\theta_\nu(\varrho))^{s_\nu}\,A^*(\varrho,\vartheta)$$

gebracht werden; hierbei bezeichnet $A^*(\varrho,\vartheta)$ eine Funktion, die für $\varrho = 0$, $\vartheta = 0$ nicht mehr verschwindet. s_ν heisse der Vielfachheitsgrad der Nullkurve.

Unter den N Zahlen p_ν mögen nur T Zahlen untereinander verschieden sein, die man der Grösse nach ordne:

(30) $$p_1 > p_2 > \cdots > p_T > 0. \qquad (T \leqq N)$$

Man erhält die T Zahlen p_t in bekannter Weise, indem man das zu der Gleichung (28) gehörige Newton-Polygon konstruiert, von dem weiter unten die Rede sein wird. T ist dann die Anzahl der Seiten dieses Polygons.

15. Um den ersten Koeffizienten $\alpha_{\nu 0}$ der Reihen (27) zu bestimmen, betrachte man alle Funktionen $\theta_\nu(\varrho)$, die zu einem und dem gleichen Exponenten $\frac{p_t}{q}$ gehören, und führe in der Potenzreihe (26) für A die Substitution

$$\varrho = \sigma^q, \quad \vartheta = \sigma^{p_t}\omega \tag{31}$$

aus. Dann ergibt sich aus (26)

$$A = \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\varkappa=0}^{\infty}(m - 1 + \mu)\, w_{\mu,\varkappa}\, \omega^\varkappa\, \sigma^{q(m-2+\mu)+\varkappa p_t}. \tag{32}$$

Nunmehr sei $l_t - q$ das Minimum aller Exponenten von σ in der Reihe (32), d. h. das Minimum aller Zahlen

$$q(m - 2 + \mu) + \varkappa p_t,$$

die man erhält, wenn man für $\mu, \varkappa$ alle diejenigen Zahlenpaare einsetzt, zu welchen ein von 0 verschiedener Koeffizient $w_{\mu\varkappa}$ gehört. Ferner bezeichne man mit $\mu_\lambda, \varkappa_\lambda$ alle solche Zahlenpaare, für die

$$\begin{aligned} &\textit{\textbf{erstens}} \quad w_{\mu_\lambda, \varkappa_\lambda} \neq 0 \\ &\textit{\textbf{zweitens}} \quad q(m - 2 + \mu_\lambda) + \varkappa_\lambda p_t = l_t - q + \lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \cdots \to \infty) \end{aligned} \tag{33}$$

wird. Dann lässt sich die Reihe (32) auf die Form

$$A = \sigma^{l_t - q}\sum_{\lambda=0}^{\infty} F_{t,\lambda}(\omega)\,\sigma^\lambda \tag{34}$$

bringen, wobei

$$F_{t,\lambda}(\omega) = \sum_{\varkappa_\lambda, \mu_\lambda}(m - 1 + \mu_\lambda)\, w_{\mu_\lambda, \varkappa_\lambda}\, \omega^{\varkappa_\lambda} \tag{35}$$

gesetzt ist. Die Funktionen $F_{t,\lambda}(\omega)$ aus (35) sind offenbar sämtlich Polynome von ω, da die Gleichungen (33) nur eine endliche Anzahl positiver Lösungen $\mu_\lambda, \varkappa_\lambda$ besitzen. Haben q und p_t einen von 1 verschiedenen grössten gemeinsamen Teiler d, so ist d auch Teiler von l_t, und die Gleichungen (33) besitzen nur dann Lösungen, wenn d ausserdem auch Teiler von λ ist. Der Koeffizient

$\alpha_{\nu,0}$ der Potenzreihe (27) ergibt sich jetzt offenbar als Nullstelle des Polynoms $F_{t,0}(\omega)$.

16. Um die Anzahl der von 0 verschiedenen Wurzeln von $F_{t,0}(\omega)$ zu bestimmen, werde in diesem Abschnitt das zur Gleichung (28) gehörige Newton-Polygon konstruiert. Zu diesem Zwecke ziehe man in der $\mu, \varkappa$-Ebene die T Geraden $\mathfrak{g}_t$

$$q\mu + p_t \varkappa = l_t - q(m-1) \qquad (t = 1, 2, \ldots, T) \tag{36}$$

dann bilden diese T Geraden das oben erwähnte Newton-Polygon. Dieses hat bekanntlich drei Eigenschaften, durch die es eindeutig festgelegt ist, und die zu seiner Konstruktion auch dann führen, wenn die Exponenten $\frac{p_t}{q}$ noch nicht bekannt sind.

1. *Alle Punkte mit ganzzahligen Koordinaten $\mu, \varkappa$, zu denen von* 0 *verschiedene Koeffizienten $w_{\mu,\varkappa}$ gehören, liegen entweder auf einer der Geraden* $\mathfrak{g}_t$ (das sind die Zahlenpaare $\mu_0, \varkappa_0$), *oder rechts von sämtlichen T Geraden* $\mathfrak{g}_t$ (das sind die Zahlenpaare $\mu_\lambda, \varkappa_\lambda$ mit $\lambda \geqq 1$).
2. *Zwei aufeinander folgende Geraden $\mathfrak{g}_t$ und $\mathfrak{g}_{t+1}$ haben einen Schnittpunkt mit den positiven ganzzahligen Koordinaten m_t, k_t, wobei der zugehörige Koeffizient $w_{m_t, k_t} \neq 0$ ist.* Ausserdem schneidet die Gerade $\mathfrak{g}_T$ die $\varkappa$-Achse im Punkte mit den Koordinaten $\mu = 0$, $\varkappa = k_T$, und zwar ist k_T gleich der Ordnung der Nullstelle $\vartheta = 0$ von $w'_0(\vartheta)$. (Diese Grösse war in der Einleitung, Abschnitt 8, einfach mit k bezeichnet worden.) Die Gerade $\mathfrak{g}_1$ geht andererseits durch einen Punkt mit den Koordinaten $\mu = m_0$, $\varkappa = k_0$ unter k_0 wieder den in Formel (29) auf der rechten Seite auftretenden Exponenten von ϑ verstanden.

   Auf diese Weise ergibt sich

$$0 \leqq k_0 < k_1 < \cdots < k_T$$
$$m_0 > m_1 > \cdots > m_T = 0.$$

$k_t - k_{t-1}$ ist die Anzahl der Nullkurven $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ die zum Exponenten $\frac{p_t}{q}$ gehören, jede entsprechend ihrem Vielfachheitsgrad s_ν gezählt, und hieraus folgt schliesslich

$$k_0 + \sum_{\nu=1}^{N} s_\nu = k_T.$$

3. *Der Streckenzug, den man erhält, wenn man die $T+1$ Punkte mit den Koordinaten m_t, k_t $(t = 0, 1, \ldots, T)$ jeden mit dem folgenden verbindet, ist konvex.* (Er ist das eigentliche Newton-Polygon und besteht aus T Strecken, von denen jede auf einer der T Geraden $\mathfrak{g}_t$ gelegen ist.)

Man bemerkt endlich, dass die Zahlenpaare $\mu_0, \varkappa_0$ über die bei der Bildung des Polynoms $F_{t,0}(\omega)$ summiert wird, der Abschätzung

$$k_{t-1} \leqq \varkappa_0 \leqq k_t, \quad m_{t-1} \geqq \mu_0 \geqq m_t \tag{37}$$

genügen. Somit hat $F_{t,0}(\omega)$ (vgl. Formel (35)) genau $k_t - k_{t-1}$ von Null verschiedene Wurzeln.

§ 2. Die Potenzreihen $\varphi_t(\sigma, \omega)$ und $\Phi_t(\sigma, \omega)$.

17. Aus (24) und (25), § 1, folgt

$$\frac{W_\vartheta}{\varrho^2} = \varrho^{m-2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} w_{\mu,\varkappa}\, \vartheta^\varkappa \varrho^\mu. \tag{38}$$

Führt man auch in dieser Potenzreihe die Substitution (31) aus, so ergibt sich, wenn man ebenso wie in der Reihe (32) nach Potenzen von σ ordnet (vgl. Formel (34)),

$$\frac{W_\vartheta}{\varrho^2} = \sigma^{l_t - q} \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_{t,\lambda}(\omega)\, \sigma^\lambda, \tag{39}$$

wobei

$$f_{t,\lambda}(\omega) = \sum_{\mu_\lambda, \varkappa_\lambda} w_{\mu_\lambda, \varkappa_\lambda}\, \omega^{\varkappa_\lambda} \tag{40}$$

gesetzt ist, und die Summation ebenso wie bei Formel (35) über alle diejenigen Zahlenpaare $\mu_\lambda, \varkappa_\lambda$ zu erstrecken ist, welche positive ganzzahlige Lösungen der diophantischen Gleichung (33) liefern.

Eine leichte Rechnung führt mit Rücksicht auf (33), (35) und (40) zu den für unsere Zwecke grundlegenden Beziehungen

$$q\, F_{t,\lambda}(\omega) = (l_t + \lambda) f_{t,\lambda}(\omega) - p_t\, \omega\, f'_{t,\lambda}(\omega), \tag{41}$$

$$q\, F^{(\varkappa)}_{t,\lambda}(\omega) = (l_t + \lambda - \varkappa p_t) f^{(\varkappa)}_{t,\lambda}(\omega) - p_t\, \omega\, f^{(\varkappa+1)}_{t,\lambda}(\omega). \tag{42}$$

18. Man setze nunmehr

$$\varphi_t(\sigma, \omega) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_{t,\lambda}(\omega)\,\sigma^\lambda, \tag{43}$$

$$\Phi_t(\sigma, \omega) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} F_{t,\lambda}(\omega)\,\sigma^\lambda. \tag{44}$$

Berücksichtigt man ferner, dass wegen (31) § 1.

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\sigma^{p_t}} \frac{\partial}{\partial \omega} \tag{45}$$

ist, so ergibt sich aus (34) und (39)

$$A(\sigma^q, \sigma^{p_t}\omega) = \sigma^{l_t - q}\, \Phi_t(\sigma, \omega), \tag{46}$$

$$\frac{W_\vartheta}{\varrho^2} = \sigma^{l_t - q}\, \varphi_t(\sigma, \omega). \tag{47}$$

§ 3. Die Potenzreihe für den Koeffizienten $B(\varrho, \vartheta)$.

19. Die Gleichung (6) der Einleitung für $2B$ schreibe man in der Form

$$2B = \frac{W_{\vartheta\vartheta}}{\varrho^2} - \int_0^\vartheta \left(W_{\varrho\varrho\vartheta} - \frac{W_{\varrho\vartheta}}{\varrho}\right) d\vartheta + \left(\frac{W_\varrho}{\varrho} - W_{\varrho\varrho}\right)\Big/_{\vartheta = 0}. \tag{48}$$

Den Ausdruck auf der rechten Seite fasse man als dreigliedrige Summe auf und entwickle, nachdem man die Substitution (31) ausgeführt hat, jedes einzelne der drei Glieder in eine Potenzreihe nach σ und ω.

Nunmehr folgt aus (43) und (47) § 2, in Verbindung mit (45)

$$\frac{W_{\vartheta\vartheta}}{\varrho^2} = \sigma^{l_t - q - p_t} \frac{\partial \varphi_t(\sigma, \omega)}{\partial \omega} = \sigma^{l_t - q - p_t} \sum_{\lambda=0}^{\infty} f'_{t,\lambda}(\omega)\,\sigma^\lambda. \tag{49}$$

20. Die Funktion $\left(\frac{W_\varrho}{\varrho} - W_{\varrho\varrho}\right)\Big/_{\vartheta = 0}$ ist eine Potenzreihe von ϱ allein. Wir setzen nach der Substitution $\varrho = \sigma^q$

$$\left(\frac{W_\varrho}{\varrho} - W_{\varrho\varrho}\right)\Big/_{\vartheta = 0} = \sigma^L\, V(\sigma) = \sigma^L \sum_{\lambda=0}^{\infty} v_\lambda\, \sigma^\lambda, \tag{50}$$

wobei $v_0 \neq 0$ ist. Der Exponent L ist eine durch q teilbare Zahl, und v_λ ist höchstens dann von 0 verschieden, wenn λ durch q teilbar ist.

Berücksichtigt man, dass nach Voraussetzung (vgl. Abschnitt 9 der Einleitung) $w_0(0) = 0$ ist, so bemerkt man leicht, dass

$$L \geqq (m-1)\,q.$$

Ist $V(\sigma) \equiv 0$, so setzen wir $L = \infty$.

21. Wenn man von der Potenzreihe (38) § 2, ausgeht, so führt eine einfache Rechnung zu der Entwicklung

$$W_{\varrho\varrho\vartheta} - \frac{W_{\varrho\vartheta}}{\varrho} = \varrho^{m-2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} ((m+\mu-1)^2-1)\, w_{\mu,\varkappa}\, \vartheta^{\varkappa} \varrho^{\mu},$$

folglich

$$\int_0^{\vartheta} \left(W_{\varrho\varrho\vartheta} - \frac{W_{\varrho\vartheta}}{\varrho} \right) d\vartheta = \varrho^{m-2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} ((m+\mu-1)^2-1)\, w_{\mu,\varkappa} \frac{\vartheta^{\varkappa+1}}{\varkappa+1} \varrho^{\mu}.$$

Die Substitution (31), § 1, ergibt, wenn man wieder wie in Abschnitt 15, § 1, nach Potenzen von σ ordnet, mit Rücksicht auf Formel (34), § 1,

$$(51) \qquad \int_0^{\vartheta} \left(W_{\varrho\varrho\vartheta} - \frac{W_{\varrho\vartheta}}{\varrho} \right) d\vartheta = \frac{\sigma^{l_t - q + p_t}}{q^2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} g_{t,\lambda}(\omega)\, \sigma^{\lambda},$$

wobei

$$(52) \qquad g_{t,\lambda}(\omega) = q^2 \sum_{\mu_\lambda, \varkappa_\lambda} ((m+\mu_\lambda-1)^2-1)\, w_{\mu_\lambda, \varkappa_\lambda} \frac{\omega^{\varkappa_\lambda+1}}{\varkappa_\lambda+1}$$

gesetzt ist und die Summation über die gleichen Zahlenpaare μ_λ, $\varkappa_\lambda$ wie in Formel (35), § 1, und (40), § 2, zu erstrecken ist.

22. Setzt man noch zur Abkürzung

$$(53) \qquad \psi_t(\sigma, \omega) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} g_{t,\lambda}(\omega)\, \sigma^{\lambda},$$

se erhält man wegen (48), (49), (50) und (51)

$$(54) \qquad 2\,B(\sigma^q, \sigma^{p_t}\omega) = \sigma^{l_t - q - p_t} \frac{\partial \varphi_t(\sigma, \omega)}{\partial \omega} - \sigma^{l_t - q + p_t} \frac{\psi_t(\sigma, \omega)}{q^2} + \sigma^L\, V(\sigma).$$

23. Zum Schlusse suchen wir noch eine Beziehung zwischen $g_{t,\lambda}(\omega)$ und $f_{t,\lambda}(\omega)$ herzustellen. Zu diesem Zwecke bemerke man, dass aus Formel (33), § 1,

$$q(m-1+\mu_\lambda) = l_t + p_t + \lambda - p_t(\varkappa_\lambda + 1)$$

und weiter nach einfacher Rechnnng

$$\begin{aligned} q^2((m-1+\mu_\lambda)^2 - 1) &= (l_t + p_t + \lambda)^2 - q^2 - 2p_t(l_t + p_t + \lambda)(\varkappa_\lambda + 1) + p_t^2(\varkappa_\lambda + 1)^2 \\ &= (l_t + p_t + \lambda)^2 - q^2 - (2p_t(l_t + \lambda) + p_t^2)(\varkappa_\lambda + 1) + p_t^2 \varkappa_\lambda(\varkappa_\lambda + 1) \end{aligned}$$

folgt. Dies ergibt aber in Verbindung mit (52) und (40), § 2

$$(55) \qquad g_{t,\lambda}(\omega) = c_\lambda \int_0^\omega f_{t,\lambda}(\omega)\,d\,\omega - c_{\lambda,0}\,\omega f_{t,\lambda}(\omega) + p_t^2\,\omega^2 f'_{t,\lambda}(\omega),$$

wobei

$$(56) \qquad c_\lambda = (l_t + p_t + \lambda)^2 - q^2, \quad c_{\lambda,0} = 2p_t(l_t + \lambda) + p_t^2$$

gesetzt ist.

§ 4. Kurvenverbände und ihre Indices.

24. Im folgenden betrachten wir (ausgenommen in § 14, Kapitel III) ausschliesslich diejenigen von den in § 1 Formel (27) eingeführten Kurven $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$, deren Entwicklungskoeffizienten $\alpha_{\nu,\mu}$ sämtlich reell sind, und welche daher für $\varrho \geqq 0$ nur reelle Werte annehmen. Diese Kurven, deren Anzahl K offenbar $\leqq N + 1$ ist (vgl. Formel (29), § 1), denke man sich der Grösse nach geordnet derart, dass nach Wahl einer hinreichend kleinen positiven Grösse δ

$$(57) \qquad \theta_1(\varrho) > \theta_2(\varrho) > \cdots > \theta_K(\varrho) \quad \text{für } 0 < \varrho \leqq \delta$$

ist. In der Reihe (57) der reellen Kurven θ_ν möge dabei eine Nullkurve vom Vielfachheitsgrad s_ν (vgl. Formel (29), § 1), auch wenn $s_\nu > 1$, nur ein einziges Mal auftreten, darunter auch die Gerade $\vartheta = 0$, wenn $k_0 \geqq 1$ ist.

Hat dann die Kurve $\vartheta = 0$ den Index K_0, d. h. ist

$$\vartheta = \theta_{K_0}(\varrho) \equiv 0,$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} \theta_\varkappa(\varrho) > 0 \text{ für } 1 \leqq \varkappa \leqq K_0 - 1 \\ \theta_\varkappa(\varrho) < 0 \text{ für } K_0 + 1 \leqq \varkappa \leqq K \end{aligned}\right\} \text{ und für } 0 < \varrho \leqq \delta.$$

Ist andrerseits $k_0 = 0$, so existiert offenbar eine Zahl K_0 derart, dass im Intervall $0 < \varrho \leqq \delta$

$$\theta_\varkappa(\varrho) > 0 \text{ für } 1 \leqq \varkappa \leqq K_0$$

$$\theta_\varkappa(\varrho) < 0 \text{ für } K_0 + 1 \leqq \varkappa \leqq K.$$

Anstelle der Produktzerlegung (29) aus § 1 erhält man nunmehr

$$(57') \qquad A(\varrho, \vartheta) = \varrho^{m-2} \prod_{\varkappa=1}^{K} (\vartheta - \theta_\varkappa(\varrho))^{s_\varkappa} \mathring{A}(\varrho, \vartheta),$$

wobei die Funktion $\mathring{A}(\varrho, \vartheta)$ in einem hinreichend kleinen Bereich

$$-\varepsilon \leqq \vartheta \leqq +\varepsilon, \quad 0 \leqq \varrho \leqq \delta$$

nirgends verschwindet, ausser höchstens im Punkte $\varrho = 0$, $\vartheta = 0$.

25. Wir führen jetzt folgende Definitionen ein:

Definition I: *Die Gesamtheit der reellen Kurven $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ die zum gleichen Exponenten $\frac{p_t}{q}$ gehören, und deren Koeffizienten $a_{\nu,0}$ dasselbe Vorzeichen haben, nennen wir einen Kurvenverband (K. V.) 0-ter Ordnung;* abgekürzt schreiben wir K. V. $\begin{Bmatrix} + \\ p_t \end{Bmatrix}$ bezw. K. V. $\begin{Bmatrix} - \\ p_t \end{Bmatrix}$, je nachdem die $a_{\nu,0}$ positives oder negatives Vorzeichen haben.

Definition II: *Die Gesamtheit der reellen Kurven $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ die zum gleichen Exponenten $\frac{p_t}{q}$ gehören und ausserdem in den μ ersten Koeffizienten $a_{\nu,0}, a_{\nu,1}, \ldots a_{\nu,\mu-1}$ ihrer Entwicklungen* (27) *übereinstimmen, nennen wir einen Kurvenverband μ-ter Ordnung*, abgekürzt einen K. V. $\{a_{\nu,\mu-1}\}$.

Da die Kurven $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ der Grösse nach geordnet sind (vgl. Formel (57)), so durchlaufen die Indices ν der Kurven $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ eines beliebigen K. V. $\{a_{\nu,\mu-1}\}$ der Ordnung $\mu \geqq 1$, bezw. eines K. V. $\begin{Bmatrix} + \\ p_t \end{Bmatrix}$ oder $\begin{Bmatrix} - \\ p_t \end{Bmatrix}$ der Ordnung 0 eine fortlaufende Zahlenreihe, etwa $\nu_1, \nu_1 + 1, \nu_1 + 2, \ldots, \nu_2$, $(\nu_1 < \nu_2)$.

Es sei $\vartheta = \theta_{\mathring{\nu}}(\varrho)$ eine Kurve des K. V. $\{a_{\mathring{\nu},\mu-1}\}$ der Ordnung μ. Dann ist $\{a_{\mathring{\nu},\mu-1}\}$ als Teilmenge in geeignet gewählten Kurvenverbänden der Ordnung $\mu - 1, \mu - 2, \ldots, 1, 0$ enthalten; und zwar sind das die K. V. $\{a_{\mathring{\nu},\mu-2}\}, \{a_{\mathring{\nu},\mu-3}\}, \ldots, \{a_{\mathring{\nu},0}\}$, $\begin{Bmatrix} + \\ p_t \end{Bmatrix}$, wenn $a_{\mathring{\nu},0} > 0$ bezw. $\begin{Bmatrix} - \\ p_t \end{Bmatrix}$, wenn $a_{\mathring{\nu},0} < 0$ ist.

Zieht man auch Kurvenverbände in Betracht, die sich nur aus einer einzigen Kurve zusammensetzen, so lässt sich offenbar der K. V. $\{a_{\mathring{\nu},\mu-1}\}$ der Ordnung μ seinerseits immer als Summe von Kurvenverbänden der Ordnung $\mu + 1$ darstellen, da ja jede Kurve des K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}$ gleichzeitig Kurve eines gewissen in $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}$ enthaltenen K. V. der Ordnung $\mu + 1$ ist, welcher selbst wieder durch den μ-ten Koeffizienten $\alpha_{\nu,\mu}$ dieser Kurve bestimmt ist. Mithin lässt jeder K. V. eine Zerlegung in Summanden zu:

$$\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\} = \sum_{\nu} \{\alpha_{\nu,\mu}\} \tag{58}$$

und da entsprechendes auch für die K. V. $\left\{\begin{smallmatrix}+\\ p_t\end{smallmatrix}\right\}$ bezw. $\left\{\begin{smallmatrix}-\\ p_t\end{smallmatrix}\right\}$ gilt, so hat man ebenso

$$\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\} = \sum \{\alpha_{\nu,0}\} \text{ bezw. } \left\{\begin{matrix}-\\ p_t\end{matrix}\right\} = \sum \{\alpha_{\nu,0}\}.$$

26. **Definition III**: *Die Mächtigkeit eines K. V. ist gleich der Anzahl der in ihm enthaltenen Kurven $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$, jede Kurve s_ν-mal gezählt, d. h. so oft, wie ihr Vielfachheitsgrad beträgt.*

Insbesondere ist ein Kurvenverband von gerader oder ungerader Mächtigkeit, je nachdem die Anzahl der in ihm enthaltenen Kurven gerade oder ungerade ist.

Eine s_ν-fache Kurve $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ lässt sich immer als ein K. V. der Ordnung μ von der Mächtigkeit s_ν auffassen. Dabei ist die Zahl μ so gross zu wählen, dass sämtliche von $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ verschiedenen Kurven $\vartheta = \theta_\lambda(\varrho)$ die zum gleichen Exponenten $\frac{p_t}{q}$ wie $\theta_\nu(\varrho)$ gehören, sich mindestens in einem ihrer μ ersten Koeffizienten $\alpha_{\lambda,0}, \alpha_{\lambda,1}, \ldots, \alpha_{\lambda,\mu-1}$ von den μ Koeffizienten $\alpha_{\nu,0}, \alpha_{\nu,1}, \ldots, \alpha_{\nu,\mu-1}$ unterscheiden.

Ist die Zahl $k_0 \geqq 1$ (vgl. Formel (29), § 1), so ist auch die Kurve $\vartheta = 0$ als ein K. V. der Ordnung 0 von der Mächtigkeit k_0 aufzufassen. Wir bezeichnen diesen K. V. mit $\{p_0\}$.

27. **Definition IV**: *Wir definieren den Index $i\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}$ bezw. $i\left\{\begin{smallmatrix}+\\ p_t\end{smallmatrix}\right\}$ oder $i\left\{\begin{smallmatrix}-\\ p_t\end{smallmatrix}\right\}$ eines K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}$ bezw. $\left\{\begin{smallmatrix}+\\ p_t\end{smallmatrix}\right\}$ oder $\left\{\begin{smallmatrix}-\\ p_t\end{smallmatrix}\right\}$, indem wir setzen*

$$\left.\begin{matrix} i\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\} \\ i\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\} \\ i\left\{\begin{matrix}-\\ p_t\end{matrix}\right\} \end{matrix}\right\} = \sum_{\theta_\nu(\varrho)}{}' \operatorname{sg} \left. \frac{\dfrac{\partial^{s_\nu} A(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_\nu}}}{2\, B(\varrho, \vartheta)} \right/ {\vartheta = \theta_\nu(\varrho)}. \tag{59}$$

Dabei ist die Summation über alle diejenigen Kurven $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ des K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}$

bezw. $\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix}$ *oder* $\begin{Bmatrix}-\\p_t\end{Bmatrix}$ *zu erstrecken, welche von* **ungeradem** *Vielfachheitsgrad* s_ν *sind, aber derart, dass jede dieser Kurven nur einmal* (also nicht s_ν-mal) *vorkommt. Die Kurven mit zugehörigen* **geraden** s_ν *sind hingegen bei der Summation fortzulassen;* (vgl. Formel (11) und (18) der Einleitung).

Es sei $\vartheta = \theta_{\nu'}(\varrho)$ eine Kurve von ungeradem Vielfachheitsgrad $s_{\nu'}$ des K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu}, \mu-1}\}$ und $\vartheta = \theta_{\nu''}(\varrho)$, $(\nu'' \geqq \nu' + 1)$ die auf $\vartheta = \theta_{\nu'}(\varrho)$ unmittelbar folgende Kurve von ungeradem Vielfachheitsgrad $s_{\nu''}$ aus $\{\alpha_{\mathring{\nu}, \mu-1}\}$ derart, dass $\theta_{\nu'}(\varrho) > \theta_{\nu''}(\varrho)$ und dass zwischen $\vartheta = \theta_{\nu'}(\varrho)$ und $\vartheta = \theta_{\nu''}(\varrho)$ keine weitere Kurve $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ von ungeradem Vielfachheitsgrad s_ν mehr gelegen ist. Dann ist

$$(60) \qquad \operatorname{sg} \frac{\partial^{s_{\nu'}} A(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_{\nu'}}} \Bigg/ \vartheta = \theta_{\nu'}(\varrho) = -\operatorname{sg} \frac{\partial^{s_{\nu''}} A(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_{\nu''}}} \Bigg/ \vartheta = \theta_{\nu''}(\varrho).$$

Und in der Tat: Ist ϱ_0 $(0 < \varrho_0 < \delta)$ ein fester Wert von ϱ, so liefern die Werte $\vartheta = \theta_\nu(\varrho_0)$ mit zugehörigem ungeraden s_ν sämtliche Nullstellen ungerader Ordnung innerhalb eines geeignet bestimmten Intervalls $\vartheta' > \vartheta > \vartheta''$ der jetzt nur noch in ϑ veränderlichen Funktion $A(\varrho_0, \vartheta)$, d. h. aber sämtliche Stellen des Zeichenwechsels von $A(\varrho_0, \vartheta)$.

Nun hat man aber

$$\operatorname{sg} \frac{\partial^{s_\nu} A(\varrho_0, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_\nu}} \Bigg/ \vartheta = \theta_\nu(\varrho_0) = +1,$$

wenn $A(\varrho_0, \vartheta)$ in der Umgebung des Punktes $\vartheta = \theta_\nu(\varrho_0)$ monoton zunimmt,

$$\operatorname{sg} \frac{\partial^{s_\nu} A(\varrho_0, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_\nu}} \Bigg/ \vartheta = \theta_\nu(\varrho_0) = -1,$$

wenn $A(\varrho_0, \vartheta)$ in der Umgebung des Punktes $\vartheta = \theta_\nu(\varrho_0)$ monoton abnimmt; und hieraus folgt die behauptete Beziehung (60) unmittelbar, die wir im folgenden *die alternierende Grundeigenschaft der Definitionsgleichung* (59) nennen wollen.

28. Aus (59) in Verbindung mit Formel (58) folgt unmittelbar

$$(61) \qquad i\{\alpha_{\mathring{\nu}, \mu-1}\} = \sum i\{\alpha_{\nu, \mu}\};$$

hierbei ist ebenso wie in Formel (58) die Summation über alle diejenigen K. V. der Ordnung $\mu + 1$ zu erstrecken, deren Gesamtheit den K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu}, \mu-1}\}$ ergibt.

Entsprechend ergibt sich für den Index $i\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix}$ bezw. $i\begin{Bmatrix}-\\p_t\end{Bmatrix}$

$$(62)\qquad i\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\} = \sum_{\alpha_{\nu,0}>0} i\{\alpha_{\nu,0}\},\quad i\left\{\begin{matrix}-\\ p_t\end{matrix}\right\} = \sum_{\alpha_{\nu,0}<0} i\{\alpha_{\nu,0}\}.$$

Schliesslich erhält man, indem man noch Formel (18) der Einleitung heranzieht,

$$(63)\qquad i(0) = i\{p_0\} + \sum_{t=1}^{T}\left(i\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\} + i\left\{\begin{matrix}-\\ p_t\end{matrix}\right\}\right).$$

§ 5. Kurvenverbände erster Art.

29. **Definition V**: *Wir nennen einen K. V. einen K. V. erster Art, wenn die Funktion $B(\varrho, \vartheta)$ für alle Kurven des K. V. das gleiche Vorzeichen hat.*

Aus dieser Definition folgt unmittelbar der

Satz 1: *Ist ein beliebiger K. V. $\{\alpha_{\nu,\mu}\}$ in einem K. V. erster Art der Ordnung $\leqq \mu$ enthalten, so ist dieser K. V. selbst von erster Art.*

30. Weiter behaupten wir:

Satz 2: *Ist ein K. V. erster Art von gerader Mächtigkeit, so ist der zugehörige Index $i = 0$, ist er von ungerader Mächtigkeit, so gilt für den zugehörigen Index i entweder $i = +1$ oder $i = -1$.*

Beweis: Aus der Definitionsgleichung (59), § 4, folgt in Verbindung mit der in Definition V angegebenen charakteristischen Eigenschaft eines K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}$ erster Art

$$(64)\qquad i\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\} = \operatorname{sg} 2B(\varrho, \theta_{\nu_1}(\varrho)) \sum_{\theta_\nu(\varrho)}{}' \operatorname{sg} \frac{\partial^{s_\nu} A(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_\nu}} \Bigg/ \vartheta = \theta_\nu(\varrho),$$

wobei ν_1 den kleinsten der in der Summe (59) auftretenden Indices ν bezeichnet.

Andererseits ergibt sich aus der alternierenden Grundeigenschaft (60) der Summenformel (59), § 4,

$$(65)\qquad \sum_{\theta_\nu(\varrho)}{}' \operatorname{sg} \frac{\partial^{s_\nu} A(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_\nu}} \Bigg/ \vartheta = \theta_\nu(\varrho) = \begin{cases} 0, & \text{wenn die Anzahl der Summenglieder gerade,} \\ \pm 1, & \text{wenn die Anzahl der Summenglieder ungerade ist.} \end{cases}$$

Ist nun aber der vorgelegte K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}$ von gerader Mächtigkeit, so ist mit Rücksicht auf die Definition III, § 4, auch die Anzahl der Summenglieder in (65) gerade, daher ergibt sich für diesen Fall aus (64) und (65)

$$i\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\} = 0.$$

Ist hingegen der K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}$ von ungerader Mächtigkeit, so ist auch die Anzahl der Summenglieder in (65) ungerade, und man erhält, wie eine leichte Überlegung zeigt,

$$(66)\qquad i\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\} = \operatorname{sg} \left. \frac{\dfrac{\partial^{s_{\nu_1}} A(\varrho,\vartheta)}{\partial \vartheta^{s_{\nu_1}}}}{2B(\varrho,\vartheta)} \right/ \vartheta = \theta_{\nu_1}(\varrho) = \pm 1.$$

Entsprechendes gilt natürlich auch für $i\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\}$ und $i\left\{\begin{matrix}-\\ p_t\end{matrix}\right\}$. Damit ist der Satz 2 vollständig bewiesen.

31. Wir fügen jetzt noch eine Bemerkung hinzu, die sich nur auf den Index eines K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}$ erster Art der Ordnung $\mu \geqq 1$ von ungerader Mächtigkeit bezieht.

Es sei, unter ϱ_0 einen festen Wert von ϱ $(0 < \varrho_0 < \delta)$ verstanden, $\theta_{\nu'_1}(\varrho_0) > > \theta_{\nu_1}(\varrho_0)$, $(\nu'_1 < \nu_1)$ die auf $\theta_{\nu_1}(\varrho_0)$ unmittelbar folgende Stelle des Zeichenwechsels der nur noch von ϑ abhängigen Funktion $A(\varrho_0, \vartheta)$. Dann gilt offenbar

$$(67)\qquad \operatorname{sg} \left. \frac{\partial^{s_{\nu_1}} A(\varrho_0,\vartheta)}{\partial \vartheta^{s_{\nu_1}}} \right/ \vartheta = \theta_{\nu_1}(\varrho) = \operatorname{sg} A(\varrho_0, \vartheta) \text{ für } \theta_{\nu_1}(\varrho_0) < \vartheta < \theta_{\nu'_1}(\varrho_0).$$

Nun folgt aber aus der Eigenschaft der Kurve $\vartheta = \theta_{\nu_1}(\varrho)$ die Kurve mit kleinstem Index ν der Summe (65) zu sein, dass $\theta_{\nu'_1}(\varrho)$ nicht mehr in dem K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}$ enthalten ist, d. h. aber nach Definition II, dass $\theta_{\nu'_1}(\varrho)$ entweder zu einem anderen Exponenten $\frac{p_t}{q}$ als $\theta_{\nu_1}(\varrho)$ gehört, oder aber dass unter den μ ersten Koeffizienten $\alpha_{\nu'_1,0}, \alpha_{\nu'_1,1}, \ldots, \alpha_{\nu'_1,\mu-1}$ von $\theta_{\nu'_1}(\varrho)$ mindestens einer von den entsprechenden Koeffizienten von $\theta_{\nu_1}(\varrho)$ verschieden ist. Es lässt sich mithin eine hinreichend kleine positive Grösse ε bestimmen, derart dass für $0 < \varrho \leqq \delta$

$$\theta_{\nu_1}(\varrho) < \varrho^{\frac{p_t}{q}}\left((\alpha_{\nu_1,\mu-1} + \varepsilon)\varrho^{\frac{\mu-1}{q}} + \sum_{\varkappa=0}^{\mu-2} \alpha_{\nu_1,\mu}\varrho^{\frac{\varkappa}{q}}\right) < \theta_{\nu'_1}(\varrho)$$

und nunmehr ergibt sich aus (67)

$$\operatorname{sg} \left. \frac{\partial^{s_{\nu_1}} A(\varrho,\vartheta)}{\partial \vartheta^{s_{\nu_1}}} \right/ \vartheta = \theta_{\nu_1}(\varrho) = \operatorname{sg} A\left(\varrho, \varrho^{\frac{p_t}{q}}\left((\alpha_{\nu_1,\mu-1} + \varepsilon)\varrho^{\frac{\mu-1}{q}} + \sum_{\varkappa=0}^{\mu-2} \alpha_{\nu_1,\varkappa}\varrho^{\frac{\varkappa}{q}}\right)\right).$$

In Verbindung mit Formel (66) lässt sich daher der Satz formulieren:

Zusatz zu Satz 2: *Es sei ein K. V.* $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}$ *erster Art von ungerader Mäch-*

tigkeit vorgelegt, und es sei $\mu \geqq 1$. *Dann ist, unter* ε *eine hinreichend kleine positive Zahl verstanden,*

$$(68)\quad i\{\alpha_{\mathring{\nu},\,\mu-1}\} = \operatorname{sg} 2\, B(\varrho, \theta_{\nu_1}(\varrho)) \cdot \operatorname{sg} A\left(\varrho, \varrho^{\frac{p_t}{q}}\left((\alpha_{\nu_1,\,\mu-1} + \varepsilon)\varrho^{\frac{\mu-1}{q}} + \sum_{\varkappa=0}^{\mu-2} \alpha_{\nu_1,\,\varkappa}\,\varrho^{\frac{\varkappa}{q}}\right)\right).$$

§ 6. Kurvenverbände zweiter Art.

32. **Definition VI:** *Setzt man in den Koeffizienten* $B(\varrho, \vartheta)$ *für* ϑ *nacheinander alle Kurven* $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ *eines vorgelegten K. V. in ihrer natürlichen Reihenfolge ein* (vgl. die Beziehung (57), § 4) *und wechselt dabei* $B(\varrho, \theta_\nu(\varrho))$ *nur ein einziges Mal sein Vorzeichen, so sagen wir, der K. V. sei von zweiter Art.*

Aus dieser Definition folgt unmittelbar der

Satz 3: *Ist ein beliebiger K. V.* $\{\alpha_{\nu,\,\mu}\}$ *in einem K. V. zweiter Art der Ordnung* $\leqq \mu$ *enthalten, so ist dieser K. V.* $\{\alpha_{\nu,\,\mu}\}$ *selbst entweder von erster Art oder von zweiter Art.*

33. Weiter behaupten wir:

Satz 4: *Ist ein K. V. zweiter Art von ungerader Mächtigkeit vorgelegt, so ist der zugehörige Index i entweder* $= +1$ *oder* $= -1$. *Ist aber der vorgelegte K. V. zweiter Art von gerader Mächtigkeit, so ist der zugehörige Index i entweder* $= +2$ *oder* $= 0$ *oder* $= -2$.

Beweis: Es sei $\{\alpha_{\mathring{\nu},\,\mu-1}\}$ der vorgelegte K. V. zweiter Art, und es werde sein Index $i\{\alpha_{\mathring{\nu},\,\mu-1}\}$ durch die Summenformel (59), § 4, bestimmt. Es seien ν_1 der kleinste, ν_2 der grösste der in der Summe (59) auftretenden Indices ν, wobei die Vielfachheitsgrade s_{ν_1} bezw. s_{ν_2} der Kurven $\vartheta = \theta_{\nu_1}(\varrho)$ bezw. $\vartheta = \theta_{\nu_2}(\varrho)$ offenbar beide ungerade sind.

Nunmehr ergibt sich aus Definition VI die Existenz einer zwischen ν_1 und ν_2 gelegenen Zahl ν_0 derart, dass $B(\varrho, \vartheta)$ auf allen Kurven $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ dasselbe Vorzeichen annimmt, wenn $\nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_0$, dass $B(\varrho, \vartheta)$ ferner beim Übergang von $\vartheta = \theta_{\nu_0}(\varrho)$ zu $\vartheta = \theta_{\nu_0+1}(\varrho)$ sein Vorzeichen wechselt, und dass endlich $B(\varrho, \vartheta)$ wieder auf allen Kurven $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ für $\nu_0 + 1 \leqq \nu \leqq \nu_2$ das gleiche Vorzeichen behält.

Es bezeichne nunmehr $\{\alpha_{\mathring{\nu},\,\mu-1}\}'$ die Teilmenge des K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\,\mu-1}\}$, die alle Kurven $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ mit $\nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_0$ enthält, $\{\alpha_{\mathring{\nu},\,\mu-1}\}''$ die Teilmenge aus allen Kurven $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ mit $\nu_0 + 1 \leqq \nu \leqq \nu_2$. Offenbar lässt sich auf jede der beiden Teilmengen $\{\alpha_{\mathring{\nu},\,\mu-1}\}'$ und $\{\alpha_{\mathring{\nu},\,\mu-1}\}''$ einzeln der Satz 2, § 5, anwenden.

Ist nunmehr der K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}$ von ungerader Mächtigkeit, so ist von den beiden Teilmengen $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}'$ und $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}''$ die eine von gerader und die andere von ungerader Mächtigkeit. Somit folgt in diesem Falle aus Satz 2

$$i\,\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\} = +1 \text{ oder } -1.$$

Ist aber der K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}$ von gerader Mächtigkeit, so sind die beiden Teilmengen $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}'$ und $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}''$ entweder beide von gerader Mächtigkeit oder beide von ungerader Mächtigkeit. Sind $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}'$ und $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}''$ beide von gerader Mächtigkeit, so folgt aus Satz 2

$$i\,\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\} = 0,$$

sind die Teilmengen beide von ungerader Mächtigkeit, so ergibt sich aus Satz 2

$$i\,\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\} = +2, \text{ oder } = 0, \text{ oder } = -2.\text{[1]}$$

Das gleiche gilt offenbar auch für die K. V. $\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix}-\\ p_t\end{matrix}\right\}$, wenn sie von zweiter Art sind. Damit ist der Satz 4 vollständig bewiesen.

34. Ebenso wie die Beziehung (68), § 5, für einen K. V. erster Art beweist man für einen K. V. zweiter Art den

Zusatz zu Satz 4: Damit der Index eines K. V. zweiter Art von gerader Mächtigkeit gleich -2 ist, ist eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung, dass

$$\operatorname{sg} \frac{\dfrac{\partial^{s_{\nu_1}} A(\varrho,\vartheta)}{\partial \vartheta^{s_{\nu_1}}}}{2\,B(\varrho,\vartheta)} \Bigg/ \vartheta = \theta_{\nu_1}(\varrho) + \operatorname{sg} \frac{\dfrac{\partial^{s_{\nu_2}} A(\varrho,\vartheta)}{\partial \vartheta^{s_{\nu_2}}}}{2\,B(\varrho,\vartheta)} \Bigg/ \vartheta = \theta_{\nu_2}(\varrho) = -2,$$

wobei ν_1 den kleinsten und ν_2 den grössten der in der Definitionsgleichung (59), § 4, auftretenden Indices ν der Summenglieder bezeichnet.

[1] Der Leser überzeugt sich leicht davon, dass, wenn die Teilmengen $\{\alpha^\circ_{\nu,\mu-1}\}'$ und $\{\alpha^\circ_{\nu,\mu-1}\}''$ beide von ungerader Mächtigkeit sind, nur die beiden Fälle

$$i\,\{\alpha^\circ_{\nu,\mu-1}\} = +2 \text{ oder } = -2$$

eintreten können. Da dieser Umstand aber im folgenden nicht benötigt wird, verzichten wir hier auf die Ausführung des Beweises.

KAPITEL II.

Die Kurvenverbände der Ordnung Null und ihre Indices.

§ 7. Die drei Typen von Kurvenverbänden der Ordnung Null.

35. Betrachtet man einen K. V. $\left\{\begin{matrix}+\\p_t\end{matrix}\right\}$ bezw. $\left\{\begin{matrix}-\\p_t\end{matrix}\right\}$ der Ordnung Null, so hat man drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem

$$\begin{aligned}&(\mathrm{I}) \quad L < l_t - q - p_t\\&(\mathrm{II}) \quad L > l_t - q - p_t\\&(\mathrm{III}) \quad L = l_t - q - p_t\end{aligned}$$

wobei l_t die in § 1 Abschnitt 15 (vgl. auch Formel (33)), L die in Formel (50) § 3 eingeführte Konstante bezeichnet. *Diesen drei Fällen entsprechend, sagen wir, der K. V. nullter Ordnung sei vom Typus I, vom Typus II oder vom Typus III.*

36. Es sei jetzt $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ eine beliebige Kurve des vorgelegten K. V. $\left\{\begin{matrix}+\\p_t\end{matrix}\right\}$ bezw. $\left\{\begin{matrix}-\\p_t\end{matrix}\right\}$. Man substituiere wieder $\varrho = \sigma^q$ und setze ausserdem in Übereinstimmung mit Formel (27) § 1

$$\theta_\nu(\sigma^q) = \sigma^{p_t}\,\Omega_\nu(\sigma), \quad \Omega_\nu(\sigma) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\nu\mu}\,\sigma^\mu. \tag{69}$$

Ist der K. V. vom Typus I, so ergibt sich aus (50) und (54), § 3,

$$\lim_{\sigma\to 0} \frac{2\,B\,(\sigma^q,\, \sigma^{p_t}\,\Omega_\nu(\sigma))}{\sigma^L} \to v_0,$$

mithin

$$\mathrm{sg}\; 2\,B\,(\varrho, \theta_\nu(\varrho)) = \mathrm{sg}\; v_0 \tag{70}$$

für alle Kurven $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ des vorgelegten Kurvenverbandes. Nach Definition V, § 5, ist mithin wegen (70) der K. V. nullter Ordnung vom Typus I immer von erster Art; für seinen Index gilt folglich der Satz 2 des § 5. Mit diesem Ergebnis über den Index der K. V. nullter Ordnung vom Typus I wollen wir uns hier begnügen. Ein abschliessendes Resultat findet sich in § 12 dieses Kapitels.

37. Ist der vorgelegte K. V. $\begin{Bmatrix} + \\ p_t \end{Bmatrix}$ bezw. $\begin{Bmatrix} - \\ p_t \end{Bmatrix}$ vom Typus II, so folgt aus (49) und (54), § 3, wenn man für $\Omega_\nu(\sigma)$ die Reihe (69) einsetzt,

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{2\,B\,(\sigma^q,\, \sigma^{p_t}\,\Omega_\nu(\sigma))}{\sigma^{l_t - q - p_t}} \to f'_{t,0}(\alpha_{\nu,0}). \tag{71}$$

Hierbei sind nach den Ausführungen des Abschnitts 15, § 1, für $\alpha_{\nu,0}$ die positiven bezw. negativen Wurzeln der Gleichung

$$F_{t,0}(\omega) = 0$$

einzusetzen, je nachdem es sich um die Kurven des Verbandes $\begin{Bmatrix} + \\ p_t \end{Bmatrix}$ bezw. $\begin{Bmatrix} - \\ p_t \end{Bmatrix}$ handelt.

Wegen Formel (41), § 2, lässt sich die Beziehung (71) auch in der Form

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{2\,B\,(\sigma^q,\, \sigma^{p_t}\,\Omega_\nu(\sigma))}{\sigma^{l_t - q - p_t}} \to \frac{l_t}{p_t\,\alpha_{\nu,0}}\, f_{t,0}(\alpha_{\nu,0}) \tag{72}$$

schreiben.

Definition VII: *Ein K. V.* $\begin{Bmatrix} + \\ p_t \end{Bmatrix}$ *heisst vom Normaltypus II, wenn*

erstens: $L > l_t - q - p_t$

zweitens: *das Polynom* $f_{t,0}(\omega)$ *für alle positive Wurzeln* $\alpha_{\nu,0}$ *der Gleichung* $F_{t,0}(\omega) = 0$ *von Null verschieden ist.*

Ist hingegen die zweite Bedingung nicht erfüllt, d. h. verschwindet $f_{t,0}(\omega)$ *für mindestens eine der positiven Wurzeln* $\alpha_{\nu,0}$ *der Gleichung* $F_{t,0}(\omega) = 0$, *so sagen wir der K. V.* $\begin{Bmatrix} + \\ p_t \end{Bmatrix}$ *sei vom allgemeinen Typus II, wenn* $L > l_t - q - p_t$.

Entsprechend wird der K. V. $\begin{Bmatrix} - \\ p_t \end{Bmatrix}$ vom Normaltypus II, bezw. vom allgemeinen Typus II definiert.

38. Für die Kurven $\vartheta = \theta_\nu(\varrho) = \sigma^{p_t}\,\Omega_\nu(\sigma)$ eines Verbandes nullter Ordnung vom Typus III ergibt sich nach (49), (50) und (54) des § 3

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{2\,B\,(\sigma^q,\, \sigma^{p_t}\,\Omega_\nu(\sigma))}{\sigma^{l_t - q - p_t}} \to v_0 + f'_{t,0}(\alpha_{\nu,0}) = v_0 + \frac{l_t}{p_t\,\alpha_{\nu,0}}\, f_{t,0}(\alpha_{\nu,0}). \tag{73}$$

Ebenso wie in Definition VII formulieren wir nunmehr

Definition VIII: *Ein K. V.* $\left\{\begin{matrix} + \\ p_t \end{matrix}\right\}$ *heisst vom Normaltypus III, wenn*

erstens: $L = l_t - q - p_t$

zweitens: *für alle positiven Wurzeln* $\alpha_{\nu,0}$ *der Gleichung* $F_{t,0}(\omega) = 0$ *der Ausdruck* $v_0 + \frac{l_t}{p_t \omega} f_{t,0}(\omega)$ *von Null verschieden ist.*

Erfüllt hingegen der K. V. $\left\{\begin{matrix} + \\ p_t \end{matrix}\right\}$ *nur die erste Bedingung* $L = l_t - q - p_t$, *so sagen wir,* $\left\{\begin{matrix} + \\ p_t \end{matrix}\right\}$ *sei vom allgemeinen Typus III.*

Entsprechendes gilt für den K. V. $\left\{\begin{matrix} - \\ p_t \end{matrix}\right\}$ vom Normaltypus III bezw. vom allgemeinen Typus III.

39. Zum Schluss noch eine Bemerkung über den in Abschnitt 26, § 4, eingeführten K. V. $\{p_0\}$, der sich, wenn $k_0 \geqq 1$, aus der k_0-fachen Kurve $\vartheta = 0$ zusammensetzt.

Es sei p_0 eine beliebig gewählte positive Zahl $> p_1$. Nunmehr bestimme man l_0 derart, dass

$$(74) \qquad l_0 - p_0 - q = \begin{cases} \infty, & \text{wenn } k_0 \geqq 2 \\ (m - 2 + m_0)\, q, & \text{»} \quad k_0 = 1. \end{cases}$$

Dann ergibt sich aus Formel (24) und (25), § 1,

$$(75) \qquad \frac{W_{\vartheta\vartheta}(\sigma^q, \vartheta)}{\sigma^{2q}} \Bigg/_{\vartheta = 0} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } k_0 \geqq 2 \\ \sigma^{l_0 - q - p_0} \sum\limits_{\mu = m_0}^{\infty} w_{\mu,1}\, \sigma^{q(\mu - m_0)}, & \text{wenn } k_0 = 1, \end{cases}$$

andererseits aus der Entwicklung (26), § 1,

$$(76) \qquad \frac{\partial^{k_0} A(\sigma^q, \vartheta)}{\partial \vartheta^{k_0}} \Bigg/_{\vartheta = 0} =$$

$$= k_0! \lim_{\vartheta \to 0} \frac{A(\sigma^q, \vartheta)}{\vartheta^{k_0}} = k_0!\, \sigma^{q(m-2+m_0)} \sum_{\mu = m_0}^{\infty} (m - 1 + \mu)\, w_{\mu, k_0}\, \sigma^{q(\mu - m_0)}.$$

Ist jetzt $L < l_0 - q - p_0$, so ist der K. V. $\{p_0\}$ als vom Typus I anzusehen und man hat

$$(77) \qquad \lim_{\sigma \to 0} \frac{2B(\sigma^q, 0)}{\sigma^L} \to v_0.$$

Ist aber $L > l_0 - q - p_0$, was wegen (74) nur für den Fall $k_0 = 1$ eintreten kann, so ist $\{p_0\}$ als ein K. V. vom Normaltypus II aufzufassen, und es folgt aus Formel (75) mit Rücksicht auf Formel (54) § 3

$$(78) \qquad \lim_{\sigma \to 0} \frac{2B(\sigma^q, 0)}{\sigma^{l_0 - q - p_0}} \to w_{m_0, 1}.$$

Ist endlich $L = l_0 - q - p_0$, was nach Fml. (74) auch nur für den Fall $k_0 = 1$ möglich ist, so sagen wir, der K. V. $\{p_0\}$ sei vom Typus III. Dann ist

$$(79) \qquad \lim_{\sigma \to 0} \frac{2B(\sigma^q, 0)}{\sigma^{l_0 - q - p_0}} \to v_0 + w_{m_0, 1}.$$

Ist ausserdem auch noch $v_0 + w_{m_0, 1} \neq 0$, so soll der K. V. $\{p_0\}$ vom Normaltypus III heissen.

§ 8. Die Verteilung der reellen Nullstellen der Polynome $F_{t,0}(\omega)$ und $f_{t,0}(\omega)$.

40. Man setze zunächst voraus, dass $F_{t,0}(\omega)$ und $f_{t,0}(\omega)$ für $\omega > 0$ nirgends gleichzeitig verschwinden. Sind jetzt $0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_{\overset{+}{N}}$ die sämtlichen positiven Wurzeln der Gleichung $f_{t,0}(\omega) = 0$, so folgt aus Formel (41), § 2, dass alle diese $\overset{+}{N}$ Wurzeln einfach sind.

Um weiter die positiven Nullstellen $\alpha_{\nu,0}$ von $F_{t,0}(\omega)$ geeignet zu ordnen, führe man eine neue Art der Numerierung für die $\alpha_{\nu,0}$ ein, und zwar seien

$$\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}, \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, M_\nu; \ \ \nu = 0, 1, 2, \ldots, \overset{+}{N})$$

sämtliche der Grösse nach geordneten zwischen β_ν und $\beta_{\nu+1}$ gelegenen Nullstellen ungerader Ordnung, d. h. Stellen des Zeichenwechsels von $F_{t,0}(\omega)$, während die Nullstellen gerader Ordnung von $F_{t,0}(\omega)$ bei dieser Betrachtung zunächst unberücksichtigt bleiben mögen; insbesondere sei

$$0 < \alpha^{(0)}_{\varkappa,0} < \beta_1, \ \ (\varkappa = 1, 2, \ldots, M_0); \quad \beta_{\overset{+}{N}} < \alpha^{(\overset{+}{N})}_{\varkappa,0} < \infty, \ \ (\varkappa = 1, 2, \ldots, M_{\overset{+}{N}}).$$

Es ist demnach $\alpha^{(0)}_{1,0}$ die kleinste, $\alpha^{(\overset{+}{N})}_{M_{\overset{+}{N}},0}$ die grösste der positiven Nullstellen ungerader Ordnung von $F_{t,0}(\omega)$.

41. Nunmehr setze man

$$f_{t,0}^{*}(\omega) = \frac{l_t}{p_t} \frac{f_{t,0}(\omega)}{\omega}. \tag{80}$$

Dann bemerkt man leicht, dass aus der Gleichung (41), § 2,

$$\frac{l_t}{p_t} \frac{q\, F_{t,0}(\omega)}{\omega} = (l_t - p_t) f_{t,0}^{*}(\omega) - p_t\, \omega f_{t,0}^{*\prime}(\omega) \tag{81}$$

folgt. Ausserdem haben $f_{t,0}^{*}(\omega)$ und $f_{t,0}(\omega)$ die gleichen positiven Nullstellen.

Ferner bezeichne man mit $\gamma_{\nu,\lambda}$, $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, P_\nu)$, diejenigen Stellen des Intervalls $\beta_\nu < \omega < \beta_{\nu+1}$, in welchem $|f_{t,0}^{*}(\omega)|$ ein relatives Maximum und mit $\gamma'_{\nu,\lambda}$, $(\lambda = 1, 2, \ldots, P_\nu)$ diejenigen Stellen des Intervalls, in welchen $|f_{t,0}^{*}(\omega)|$ ein relatives Minimum hat. Offenbar ist für $1 \leqq \nu \leqq \overset{+}{N} - 1$ die Anzahl der Stellen $\gamma_{\nu,\lambda}$ genau um eins grösser als die Anzahl der Stellen $\gamma'_{\nu,\lambda}$ und man erhält

$$\beta_\nu < \gamma_{\nu,0} < \gamma'_{\nu,1} < \gamma_{\nu,1} < \cdots < \gamma'_{\nu,P_\nu} < \gamma_{\nu,P_\nu} < \beta_{\nu+1},$$

$$f_{t,0}^{*\prime}(\gamma_{\nu,\lambda}) = f_{t,0}^{*\prime}(\gamma'_{\nu,\lambda}) = 0. \tag{82}$$

Mithin sind wegen (81) alle $\gamma_{\nu,\lambda}$ und $\gamma'_{\nu,\lambda}$ von sämtlichen $\alpha_{\varkappa,0}^{(\nu)}$ verschieden.

Im Intervall $\beta_{\overset{+}{N}} < \omega$ ist andererseits das letzte relative Extremum von $|f_{t,0}^{*}|$ ein Minimum $\omega = \gamma'_{\overset{+}{N}, P_{\overset{+}{N}}}$; es ist somit in diesem Intervall die Anzahl der relativen Maxima gleich der Anzahl der relativen Minima und man hat

$$\beta_{\overset{+}{N}} < \gamma_{\overset{+}{N},0} < \gamma'_{\overset{+}{N},1} < \gamma_{\overset{+}{N},1} < \cdots < \gamma_{\overset{+}{N}, P_{\overset{+}{N}-1}} < \gamma'_{\overset{+}{N}, P_{\overset{+}{N}}} < \infty.$$

Für das folgende ist es bequem, $\gamma_{\overset{+}{N}, P_{\overset{+}{N}}} = \infty$ zu setzen. Enthält zum Beispiel das Intervall $\beta_{\overset{+}{N}} < \omega$ überhaupt kein Extremum, so wird $\gamma_{\overset{+}{N},0} = \gamma_{\overset{+}{N}, P_{\overset{+}{N}}} = \infty$.

Im Intervall $0 < \omega < \beta_1$ kann die Reihe der relativen Extrema von $|f_{t,0}^{*}(\omega)|$ sowohl mit einem Maximum als auch mit einem Minimum beginnen. Im ersten Fall numerieren wir

$$0 < \gamma_{0,0} < \gamma'_{0,1} < \gamma_{0,1} < \cdots < \gamma'_{0,P_0} < \gamma_{0,P_0} < \beta_1; \tag{83}$$

dann ist die Anzahl der Maxima um eins grösser als die Anzahl der Minima; im zweiten Fall numerieren wir

$$0 < \gamma'_{0,1} < \gamma_{0,1} < \cdots < \gamma'_{0,P_0} < \gamma_{0,P_0} < \beta_1; \tag{84}$$

dann sind die Anzahl der Maxima und die Anzahl der Minima einander gleich.

42. Nunmehr folgt aus (81) und (82)

$$\begin{cases} \operatorname{sg} F_{t,0}(\gamma_{\nu,\lambda}) = \operatorname{sg} f^*_{t,0}(\gamma_{\nu,\lambda}) = \operatorname{sg} f^*_{t,0}(\beta_\nu + \varepsilon) = \operatorname{sg} f^*_{t,0}(\beta_{\nu+1} - \varepsilon), \\ \operatorname{sg} F_{t,0}(\gamma'_{\nu,\lambda}) = \operatorname{sg} f^*_{t,0}(\gamma'_{\nu,\lambda}) = \operatorname{sg} f^*_{t,0}(\beta_\nu + \varepsilon) = \operatorname{sg} f^*_{t,0}(\beta_{\nu+1} - \varepsilon) \end{cases} \tag{85}$$

für $0 \leqq \nu \leqq \overset{+}{N}$, wobei $\beta_0 = 0$, $\beta_{\overset{+}{N}+1} = \infty$ gesetzt ist.

Ferner ist wegen (81)

$$\operatorname{sg} F_{t,0}(\beta_\nu) = -\operatorname{sg} f^{*\prime}_{t,0}(\beta_\nu) = -\operatorname{sg} f^*_{t,0}(\beta_\nu + \varepsilon) = -\operatorname{sg} f^*_{t,0}(\beta_{\nu+1} - \varepsilon) \tag{86}$$

$$\text{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq \overset{+}{N}$$

und wegen (35), (37) § 1, (40) § 2

$$\operatorname{sg} F_{t,0}(\infty) = \operatorname{sg} F_{t,0}\left(\gamma_{\overset{+}{N},P_{\overset{+}{N}}}\right) = \operatorname{sg} w_{m_t,k_t} = \operatorname{sg} f^*_{t,0}\left(\gamma_{\overset{+}{N},P_{\overset{+}{N}}}\right) = \operatorname{sg} f^*_{t,0}(\beta_{\overset{+}{N}} + \varepsilon), \tag{87}$$

$$\operatorname{sg} F_{t,0}(0 + \varepsilon) = \operatorname{sg} w_{m_{t-1},k_{t-1}} = \operatorname{sg} f^*_{t,0}(0 + \varepsilon). \tag{88}$$

Für die Nullstellen $\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}$ von $F_{t,0}(\omega)$ ergibt sich endlich wegen (81)

$$\operatorname{sg} f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}) = \operatorname{sg} f^{*\prime}_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}). \tag{89}$$

Diese letzte Beziehung gilt offenbar auch für positive Nullstellen gerader Ordnung von $F_{t,0}(\omega)$, die wir mit $\alpha^*_{\mu,0}$ bezeichnen wollen, ohne ihre genaue Lage näher zu fixieren. Ihre Anzahl sei gleich M.

43. Aus (89) folgt nun aber unmittelbar, dass sowohl die Nullstellen $\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}$ als auch die $\alpha^*_{\mu,0}$ nur in den Intervallen

$$\beta_\nu < \omega < \gamma_{\nu,0}, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \overset{+}{N}), \quad 0 < \omega < \gamma_{0,0} \text{ im Falle (83)}$$

$$\gamma'_{\nu,\lambda} < \omega < \gamma_{\nu,\lambda}, \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, \overset{+}{N}; \;\; \lambda = 1, 2, \ldots, P_\nu),$$

aber nicht in den Intervallen

$$\gamma_{\nu, P_\nu} < \omega < \beta_{\nu+1}, \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, \overset{+}{N} - 1)$$

$$\gamma_{\nu, \lambda} < \omega < \gamma'_{\nu, \lambda+1}, \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, \overset{+}{N};\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots P_\nu - 1),$$

$$0 < \omega < \gamma'_{0,1} \text{ im Falle } (84)$$

gelegen sein können.

Genauer ergibt sich weiter, dass in den Intervallen

$$\beta_\nu < \omega < \gamma_{\nu, 0}, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \overset{+}{N})$$

wegen (85) und (86) eine ungerade Anzahl von Nullstellen ungerader Ordnung $\alpha^{(\nu)}_{\varkappa, 0}$; in den Intervallen

$$\gamma'_{\nu, \lambda} < \omega < \gamma_{\nu, \lambda}, \quad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, \ldots, \overset{+}{N} \\ \lambda = 1, 2, \ldots, P_\nu \end{pmatrix}$$

wegen (85) und (87) und, im Falle (83), auch im Intervall

$$0 < \omega < \gamma_{0,0}$$

wegen (85) und (88) indessen eine gerade Anzahl von Nullstellen $\alpha^{(\nu)}_{\varkappa, 0}$ bezw. gar keine Nullstellen gelegen sind.

Daraus folgt zusammenfassend:

Die Anzahl M_ν der Nullstellen $\alpha^{(\nu)}_{\varkappa, 0}$ ist immer ungerade für $\nu = 1, 2, \ldots, \overset{+}{N}$; hingegen ist die Anzahl M_0 eine gerade Zahl.

44. Es seien unter den positiven Nullstellen β_ν von $f^*_{t,0}(\omega)$ jetzt auch Nullstellen höherer Ordnung vorhanden, welche dann wegen (81) auch gleichzeitig $F_{t,0}(\omega)$ zum verschwinden bringen. $\alpha^{(\nu)}_{\varkappa, 0}$ mögen wie in Abschnitt **40.** die von den β_ν verschiedenen positiven Nullstellen ungerader Ordnung von $F_{t,0}(\omega)$ bezeichnen, für die somit $f^*_{t,0}(\omega)$ nicht verschwindet, und die $\gamma_{\nu,\lambda}$ bezw. $\gamma'_{\nu,\lambda}$ wieder die relativen Maxima bezw. Minima von $|f^*_{t,0}(\omega)|$, soweit sie von den β_ν verschieden sind. Auch unter den neuen Voraussetzungen bleiben die Beziehungen (82), (85), (87), (88) und (89) bestehen.

Nur anstelle von (86) ergibt sich nach einer einfachen Überlegung mit Rücksicht auf Formel (41) und (42) § 2

$$(90) \qquad \operatorname{sg} F_{t,0}(\beta_\nu + \varepsilon) = - \operatorname{sg} f^*_{t,0}(\beta_\nu + \varepsilon), \quad \operatorname{sg} F_{t,0}(\beta_\nu - \varepsilon) = \operatorname{sg} f^*_{t,0}(\beta_\nu - \varepsilon),$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \overset{+}{N})$$

eine Beziehung, welche indessen genau das gleiche leistet, wie die Beziehung (86).

Damit ist aber gezeigt, dass die im Abschnitt **43.** angegebenen Sätze über die Lage der Nullstellen ungerader Ordnung $\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}$ von $f^*_{t,0}(\omega)$ innerhalb der Intervalle $\beta_\nu < \omega < \beta_{\nu+1}$ auch dann noch gültig bleiben, wenn $f^*_{t,0}(\omega)$ Nullstellen β_ν von höherer Ordnung besitzt; denn diese Sätze wurden dort aus den Beziehungen (85), (86), (87), (88) und (89) geschlossen, die jetzt genau so gelten, nur dass anstelle von (86) die mit ihr äquivalente Beziehung (90) tritt.

45. Wir beschreiben noch kurz die Anordnung der negativen Nullstellen von $F_{t,0}(\omega)$. Es seien

$$0 > \bar{\beta}_1 > \bar{\beta}_2 > \cdots > \bar{\beta}_{\bar{N}}$$

die sämtlichen negativen Nullstellen von $f^*_{t,0}(\omega)$; wir lassen dabei von vornherein auch Nullstellen höherer Ordnung zu. Ferner seien

$$0 > \bar{\alpha}^{(0)}_{1,0} > \bar{\alpha}^{(0)}_{2,0} > \cdots > \bar{\alpha}^{(0)}_{\bar{M}_0,0} > \bar{\beta}_1, \ldots \quad \bar{\beta}_\nu > \bar{\alpha}^{(\nu)}_{1,0} > \bar{\alpha}^{(\nu)}_{2,0} > \cdots > \bar{\alpha}^{(\nu)}_{\bar{M}_\nu,0} > \bar{\beta}_{\nu+1}, \ldots$$

$$\bar{\beta}_{\bar{N}} > \bar{\alpha}^{(\bar{N})}_{1,0} > \bar{\alpha}^{(\bar{N})}_{2,0} > \cdots > \bar{\alpha}^{(\bar{N})}_{\bar{M}_{\bar{N}},0} > -\infty$$

sämtliche negativen Nullstellen ungerader Ordnung von $F_{t,0}(\omega)$ und $\bar{\gamma}_{\nu,\lambda}$ bezw. $\bar{\gamma}'_{\nu,\lambda}$ die relativen Maxima bezw. Minima von $|f^*_{t,0}(\omega)|$ derart, dass

$$\bar{\beta}_\nu > \bar{\gamma}_{\nu,0} > \bar{\gamma}'_{\nu,1} > \bar{\gamma}_{\nu,1} > \cdots > \bar{\gamma}'_{\nu,\bar{P}_\nu} > \bar{\gamma}_{\nu,\bar{P}_\nu} > \bar{\beta}_{\nu+1}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \bar{N}-1),$$

$$\bar{\beta}_{\bar{N}} > \bar{\gamma}_{\bar{N},0} > \bar{\gamma}'_{\bar{N},1} > \bar{\gamma}_{\bar{N},1} > \cdots > \bar{\gamma}'_{\bar{N},\bar{P}_{\bar{N}}} > \bar{\gamma}_{\bar{N},\bar{P}_{\bar{N}}} = -\infty$$

und endlich

$$0 > \bar{\gamma}_{0,0} > \bar{\gamma}'_{0,1} > \bar{\gamma}_{0,1} > \cdots > \bar{\gamma}'_{0,\bar{P}_0} > \bar{\gamma}_{0,\bar{P}_0} > \bar{\beta}_1 \tag{91}$$

oder

$$0 > \bar{\gamma}'_{0,1} > \bar{\gamma}_{0,1} > \cdots > \bar{\gamma}'_{0,\bar{P}_0} > \bar{\gamma}_{0,\bar{P}_0} > \bar{\beta}_1 \tag{92}$$

wird, je nachdem das dem Nullpunkt am nächsten gelegene relative Extremum von $|f^*_{t,0}(\omega)|$ für $\omega < 0$ ein Maximum (im Falle (91)) oder ein Minimum (im Falle (92)) ist.

Nunmehr erhält man aus (81) anstelle von (85), (90), (87), (88), (89) die Beziehungen

$$\begin{cases} \operatorname{sg} F_{t,0}(\bar{\gamma}_{\nu,\lambda}) = -\operatorname{sg} f^*_{t,0}(\bar{\gamma}_{\nu,\lambda}) = -\operatorname{sg} f^*_{t,0}(\bar{\beta}_\nu - \varepsilon) = -\operatorname{sg} f^*_{t,0}(\bar{\beta}_{\nu+1} + \varepsilon), \\ \operatorname{sg} F_{t,0}(\bar{\gamma}'_{\nu,\lambda}) = -\operatorname{sg} f^*_{t,0}(\bar{\gamma}'_{\nu,\lambda}) = -\operatorname{sg} f^*_{t,0}(\bar{\beta}_\nu - \varepsilon) = -\operatorname{sg} f^*_{t,0}(\bar{\beta}_{\nu+1} + \varepsilon), \end{cases} \tag{93}$$

$$(94)\quad \begin{cases} \operatorname{sg} F_{t,0}(\bar{\beta}_\nu - \varepsilon) = - \operatorname{sg} f^{*\prime}_{t,0}(\bar{\beta}_\nu - \varepsilon) = \quad \operatorname{sg} f^*_{t,0}(\bar{\beta}_\nu - \varepsilon), \\ \operatorname{sg} F_{t,0}(\bar{\beta}_\nu + \varepsilon) = - \operatorname{sg} f^{*\prime}_{t,0}(\bar{\beta}_\nu + \varepsilon) = - \operatorname{sg} f^*_{t,0}(\bar{\beta}_\nu + \varepsilon), \end{cases}$$

$$(95)\quad \operatorname{sg} F_{t,0}(-\infty) = \operatorname{sg} F_{t,0}(\bar{\gamma}_{\bar{N}, \bar{P}_{\bar{N}}}) = (-1)^{k_t} \operatorname{sg} w_{m_t, k_t} =$$
$$= \operatorname{sg} f_{t,0}(\bar{\gamma}_{\bar{N}, \bar{P}_{\bar{N}}}) = - \operatorname{sg} f^*_{t,0}(\bar{\gamma}_{\bar{N}, \bar{P}_{\bar{N}}}) = - \operatorname{sg} f^*_{t,0}(\beta_{\bar{N}} - \varepsilon),$$

$$(96)\quad \operatorname{sg} F_{t,0}(0 - \varepsilon) = (-1)^{k_t - 1} \operatorname{sg} w_{m_{t-1}, k_{t-1}} = \operatorname{sg} f_{t,0}(0 - \varepsilon) = - \operatorname{sg} f^*_{t,0}(0 - \varepsilon),$$

$$(97)\quad \operatorname{sg} f^*_{t,0}(\bar{\alpha}^{(\nu)}_{\varkappa,0}) = - \operatorname{sg} f^{*\prime}_{t,0}(\bar{\alpha}^{(\nu)}_{\varkappa,0}),$$

und diese führen nun zu entsprechenden Anordnungssätzen für die negativen, von $\bar{\beta}_\nu$ verschiedenen Nullstellen ungerader Ordnung $\bar{\alpha}^{(\nu)}_{\varkappa,0}$ von $F_{t,0}(\omega)$:

In den Intervallen

$\bar{\gamma}_{\nu,\lambda} > \omega > \bar{\gamma}'_{\nu,\lambda+1}$, $(\nu = 0, 1, \ldots, \bar{N};\ \lambda = 0, 1, \ldots, \bar{P}_\nu - 1)$, $0 > \omega > \bar{\gamma}'_{0,1}$ im Falle (92)

$$\bar{\gamma}_{\nu, \bar{P}_\nu} > \omega > \beta_{\nu+1} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, \bar{N} - 1)$$

liegen überhaupt keine Nullstellen $\bar{\alpha}^{(\nu)}_{\varkappa,0}$ (wegen (97)).

In den Intervallen

$\bar{\gamma}'_{\nu,\lambda} > \omega > \bar{\gamma}_{\nu,\lambda}$, $(\nu = 0, 1, \ldots, \bar{N};\ \lambda = 1, 2, \ldots, \bar{P}_\nu)$, $0 > \omega > \bar{\gamma}_{0,0}$ im Falle (91)

liegen eine gerade Anzahl von Nullstellen $\bar{\alpha}^{(\nu)}_{\varkappa,0}$ oder gar keine (wegen (93), (95) und (96)), während in den Intervallen

$$\beta_\nu > \omega > \bar{\gamma}_{\nu,0} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \bar{N})$$

eine ungerade Anzahl von Nullstellen $\bar{\alpha}^{(\nu)}_{\varkappa,0}$ gelegen ist (wegen (93) und (94)).

Daraus folgt wieder zusammenfassend:

Die Anzahl $\bar{M}_\nu$ von Nullstellen ungerader Ordnung $\bar{\alpha}^{(\nu)}_{\varkappa,0}$ ist immer ungerade für $\nu = 1, 2, \ldots, \bar{N}$; hingegen ist die Anzahl $\bar{M}_0$ eine gerade Zahl.

§ 9. Der Kurvenverband der Ordnung Null vom Typus II und sein Index.

46. Es sei ein K. V. $\left\{ {+ \atop p_t} \right\}$ vom Typus II vorgelegt. Wir fragen zunächst nach den in $\left\{ {+ \atop p_t} \right\}$ enthaltenen K. V. der Ordnung Eins, welche uns durch die Gesamtheit der positiven Wurzeln der Gleichung $F_{t,0}(\omega) = 0$ geliefert werden.

Dazu gehören zunächst die in § 8 mit $\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}$ bezw. mit $\alpha^{*}_{\mu,0}$ bezeichneten positiven Nullstellen ungerader bezw. gerader Ordnung von $F_{t,0}(\omega)$, für welche $f^{*}_{t,0}(\omega)$ nicht verschwindet. Sind ferner wie in § 8 die β_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, \overset{+}{N}$), sämtliche positiven Nullstellen von $f^{*}_{t,0}(\omega)$, so bestimmt β_ν nur dann einen K. V. erster Ordnung, wenn β_ν gleichzeitig Wurzel der Gleichung $F_{t,0}(\omega) = 0$ ist, d. h. wegen Formel (81) § 8, wenn β_ν eine Nullstelle der Ordnung $\geqq 2$ von $f^{*}_{t,0}(\omega)$ ist.

Um Formeln zu erhalten, die sich bequem handhaben lassen, ist es nützlich die Grösse $i\{\beta_\nu\}$ auch für den Fall zu definieren, dass β_ν eine Wurzel erster Ordnung der Gleichung $f_{t,0}(\omega) = 0$ ist, dass somit gar kein K. V. $\{\beta_\nu\}$ existiert, und zwar setze man in diesem Falle

$$i\{\beta_\nu\} = 0. \tag{98}$$

Dies vorausgeschickt, ergibt sich aus Formel (62) § 4

$$i\left\{\overset{+}{F_t}\right\} = \sum_{\nu=0}^{\overset{+}{N}} \sum_{\varkappa=1}^{M_\nu} i\{\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}\} + \sum_{\mu=1}^{M} i\{\alpha^{*}_{\mu,0}\} + \sum_{\nu=1}^{\overset{+}{N}} i\{\beta_\nu\}. \tag{99}$$

47. Mit unseren bisherigen Hilfsmitteln wird es uns leicht gelingen, die beiden Summen $\sum\limits_{\mu=1}^{M} i\{\alpha^{*}_{\mu,0}\}$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\overset{+}{N}} \sum\limits_{\varkappa=1}^{M_\nu} i\{\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}\}$ zu berechnen, während die Summe $\sum\limits_{\nu=1}^{\overset{+}{N}} i\{\beta_\nu\}$ für den allgemeinsten Fall erst in Kapitel V der Untersuchung zugänglich werden wird.

Ist $\vartheta = \theta_\lambda(\varrho)$ bezw. $\vartheta = \theta_{\lambda*}(\varrho)$ eine Kurve des K. V. $\{\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}\}$ bezw. $\{\alpha^{*}_{\mu,0}\}$, so ergibt sich aus der Beziehung (72) § 7

$$\operatorname{sg} 2B(\varrho, \theta_\lambda(\varrho)) = \operatorname{sg} f^{*}_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}), \quad \operatorname{sg} 2B(\varrho, \theta_{\lambda*}(\varrho)) = \operatorname{sg} f^{*}_{t,0}(\alpha^{*}_{\mu,0}). \tag{100}$$

Hieraus folgt aber, dass mit Rücksicht auf die Definition V, § 5, sämtliche K. V. $\{\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}\}$ und $\{\alpha^{*}_{\mu,0}\}$ von erster Art sind. Ausserdem sind (vgl. Definition III, § 4) nach bekannten Eigenschaften der die Gleichung $A(\varrho, \vartheta) = 0$ auflösenden Puiseuxschen Entwicklungen die K. V. $\{\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}\}$ von ungerader Mächtigkeit, die K. V. $\{\alpha^{*}_{\mu,0}\}$ von gerader Mächtigkeit.

Man erhält mithin nach Satz 2 § 5

$$i\{\alpha^{*}_{\mu,0}\} = 0 \tag{101}$$

und nach dem Zusatz zu Satz 2 Formel (68) § 5 in Verbindung mit Formel (100)

$$i\{\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}\} = \mathrm{sg}\,\frac{A\left(\varrho, \varrho^{\frac{p_t}{q}}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0} + \varepsilon)\right)}{f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0})}.$$

Da aber nach der Entwicklung (34) § 1

$$\mathrm{sg}\,A\left(\sigma^q, \sigma^{p_t}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0} + \varepsilon)\right) = \mathrm{sg}\,F_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0} + \varepsilon),$$

so ergibt sich schliesslich

$$i\{\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}\} = \mathrm{sg}\,\frac{F_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0} + \varepsilon)}{f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0})}.$$

Wir suchen jetzt

$$\sum_{\varkappa=1}^{M_\nu} i\{\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}\} = \sum_{\varkappa=1}^{M_\nu} \mathrm{sg}\,\frac{F_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0} + \varepsilon)}{f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0})} \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, \ldots, \overset{+}{N} \tag{102}$$

zu berechnen, und bemerken zunächst, dass (vgl. Formel (85) und (87) § 8)

$$\mathrm{sg}\,F_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{M_\nu,0} + \varepsilon) = \mathrm{sg}\,F_{t,0}(\gamma_{\nu,P_\nu}) = \mathrm{sg}\,f^*_{t,0}(\gamma_{\nu,P_\nu}) = \mathrm{sg}\,f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{M_\nu,0})$$

ist, wenn, wie in § 8, $\alpha^{(\nu)}_{M_\nu,0}$ die letzte Stelle des Zeichenwechsels des Polynoms $F_{t,0}(\omega)$ im Intervall $\beta_\nu < \omega < \beta_{\nu+1}$ $(\nu = 0, 1, \ldots \overset{+}{N})$ und γ_{ν,P_ν} das letzte Maximum der Funktion $|f^*_{t,0}(\omega)|$ im gleichen Intervall bezeichnet.

Hieraus folgt aber unmittelbar

$$\mathrm{sg}\,\frac{F_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{M_\nu,0} + \varepsilon)}{f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{M_\nu,0})} = +1. \tag{103}$$

Andererseits hat, da das Polynom $F_{t,0}(\omega)$ nur in den Stellen $\omega = \alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}$ im Intervall $\beta_\nu < \omega < \beta_{\nu+1}$ sein Vorzeichen wechselt, die Summe (102) rechter Hand die gleiche alternierende Grundeigenschaft (vgl. Formel (60), § 4) wie die Summe (59) § 4, und man erhält

$$\mathrm{sg}\,F_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa-1,0} + \varepsilon) = -\,\mathrm{sg}\,F_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0} + \varepsilon). \tag{104}$$

Ausserdem ist

$$\mathrm{sg}\,f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}) = \mathrm{sg}\,f^*_{t,0}(\beta_\nu + \varepsilon). \tag{105}$$

Berücksichtigt man noch, dass, wie im Abschnitt 43 § 8 gezeigt wurde, M_0 eine gerade Zahl oder o, aber M_ν eine ungerade Zahl für $\nu = 1, 2, \ldots, \overset{+}{N}$ ist, so ergibt sich schliesslich aus (103), (104) und (105)

$$(106)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\varkappa=1}^{M_0} \operatorname{sg} \frac{F_{t,0}(\alpha^{(0)}_{\varkappa,0} + \varepsilon)}{f^*_{t,0}(\alpha^{(0)}_{\varkappa,0})} = 0 \\ \displaystyle\sum_{\varkappa=1}^{M_\nu} \operatorname{sg} \frac{F_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0} + \varepsilon)}{f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0})} = 1 \qquad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, \overset{+}{N}. \end{cases}$$

Setzt man die Ergebnisse aus den Gleichungen (101) und (106) mit Rücksicht auf (102) in die Beziehung (99) ein, so erhält man

Satz 5. *Es sei* $\left\{\overset{+}{p_t}\right\}$ *ein K. V. vom Typus II und*

$$0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_{\overset{+}{N}}$$

seien sämtliche positiven Nullstellen der Funktion $f^*_{t,0}(\omega)$. *Dann ist*

$$(107)\qquad i\left\{\overset{+}{p_t}\right\} = \overset{+}{N} + \sum_{\nu=1}^{\overset{+}{N}} i\{\beta_\nu\}.$$

Entsprechend beweist man

$$i\left\{\overset{-}{p_t}\right\} = \overset{-}{N} + \sum_{\nu=1}^{\overset{-}{N}} i\{\overline{\beta}_\nu\},$$

wenn $\left\{\overset{-}{p_t}\right\}$ ein K. V. vom Typus II ist und die $\overline{\beta}_\nu$, $(\nu = 1, 2, \ldots, \overset{-}{N})$, sämtliche negativen Nullstellen der Funktion $f^*_{t,0}(\omega)$ bezeichnen.

48. Ist $\left\{\overset{+}{p_t}\right\}$ ein K. V. vom Normaltypus II, so müssen alle $\overset{+}{N}$ positiven Nullstellen $\omega = \beta_\nu$ von $f^*_{t,0}(\omega)$ einfache Nullstellen sein, da nach Definition VII § 7 $f^*_{t,0}(\omega)$ und $F_{t,0}(\omega)$ keine gemeinsamen Nullstellen haben, und es folgt aus (98) und (107) der

Satz 6. *Ist* $\left\{\overset{+}{p_t}\right\}$ *ein K. V. vom Normaltypus II, so ist*

$$i\left\{\overset{+}{p_t}\right\} = \overset{+}{N} \geqq 0,$$

unter $\overset{+}{N}$ *die Anzahl der positiven Nullstellen von* $f^*_{t,0}(\omega)$ *verstanden.*

Ebenso beweist man

$$i\left\{\overset{-}{p_t}\right\} = \bar{N} \geqq 0,$$

wenn $\left\{\overset{-}{p_t}\right\}$ ein K. V. vom Normaltypus II ist, und $\bar{N}$ die Anzahl der negativen Nullstellen von $f^*_{t,0}(\omega)$ bezeichnet.

49. Wir fügen hier eine Bemerkung über den K. V. $\{p_0\}$ vom Normaltypus II hinzu, der in Abschnitt 39, § 7, definiert worden ist. Da in diesem Fall $k_0 = 1$ ist, so ergibt sich aus den Beziehungen (76) und (78), § 7,

$$i\{p_0\} = \operatorname{sg} \frac{A_\vartheta(\sigma^q, \vartheta)}{2\,B(\sigma^q, \vartheta)}\Bigg/_{\vartheta = 0} = +\,1. \tag{108}$$

§ 10. Der Kurvenverband der Ordnung Null vom Normaltypus III und sein Index.

50. Es sei $\left\{\overset{+}{p_t}\right\}$, $(t \geqq 1)$, ein K. V. vom Normaltypus III (vgl. Definition VIII, § 7). Indem wir die Beziehungen der §§ 8 und 9 beibehalten, finden wir, dass auch in diesem Falle der Index $i\left\{\overset{+}{p_t}\right\}$ durch den Ausdruck (99), § 9, dargestellt wird. Hierbei sind die in (99) auftretenden K. V. erster Ordnung, die $\{\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}\}$, die $\{\alpha^*_{\mu,0}\}$, die $\{\beta_\nu\}$, sämtlich von erster Art; denn, wenn man berücksichtigt, dass $\left\{\overset{+}{p_t}\right\}$ als ein K. V. vom Normaltypus III vorausgesetzt wurde und somit nach Definition VIII, § 7, die Funktion $v_0 + f^*_{t,0}(\omega)$ für jede positive Wurzel der Gleichung $F_{t,0}(\omega) = 0$ von Null verschieden ist, so ergibt sich aus Formel (73), § 7,

$$\operatorname{sg} 2\,B(\varrho, \theta_\lambda(\varrho)) = \operatorname{sg}(v_0 + f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0})) \tag{109}$$

für jede Kurve $\vartheta = \theta_\lambda(\varrho)$ des K. V. $\{\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}\}$,

$$\operatorname{sg} 2\,B(\varrho, \theta_{\lambda *}(\varrho)) = \operatorname{sg}(v_0 + f^*_{t,0}(\alpha^*_{\mu,0})) \tag{110}$$

für jede Kurve $\vartheta = \theta_{\lambda *}(\varrho)$ des K. V. $\{\alpha^*_{\mu,0}\}$,

$$\operatorname{sg} 2\,B(\varrho, \theta_\varkappa(\varrho)) = \operatorname{sg} v_0 \tag{111}$$

für jede Kurve $\vartheta = \theta_\varkappa(\varrho)$ des K. V. $\{\beta_\nu\}$.

Man lasse jetzt in der Summe (99), § 9, diejenigen Glieder fort, die nach Satz 2, § 5, gleich Null sind, d. h. die Indices der K. V. von gerader Mächtigkeit. Auf diese Weise erhält man anstelle von (99)

$$i\left\{\overset{+}{p_t}\right\} = \sum_{\nu=0}^{\overset{+}{N}} \sum_{\varkappa=1}^{M_\nu} i\{\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}\} + \sum_{\beta_\nu}{}' \, i\{\beta_\nu\} \tag{112}$$

wobei die zweite Summe nur über diejenigen β_ν zu erstrecken ist, welche Nullstellen gerader Ordnung von $f^*_{t,0}(\omega)$, d. h. wegen Formel (81), § 8, Nullstellen ungerader Ordnung von $F_{t,0}(\omega)$ sind.

Wendet man jetzt ebenso wie in Abschnitt 47, § 9, den Zusatz zu Satz 2, § 5, an, so ergibt sich schliesslich aus (112) in Verbindung mit (109) und (111) entsprechend Formel (102), § 9,

$$i\left\{\overset{+}{p_t}\right\} = \sum_{\nu=0}^{\overset{+}{N}} \sum_{\varkappa=1}^{M_\nu} \operatorname{sg} \frac{F_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0} + \varepsilon)}{v_0 + f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0})} + \sum_{\beta_\nu}{}' \operatorname{sg} \frac{F_{t,0}(\beta_\nu + \varepsilon)}{v_0}. \tag{113}$$

51. Nunmehr haben wir zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall. Es ist

$$\operatorname{sg}(v_0 + f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0})) = \operatorname{sg} v_0, \quad \operatorname{sg}(v_0 + f^*_{t,0}(\alpha^*_{\mu,0})) = \operatorname{sg} v_0 \tag{114}$$

für alle positiven Wurzeln $\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}$ und $\alpha^*_{\mu,0}$ von $F_{t,0}(\omega)$.

2. Fall. Die Beziehung (114) ist nicht für alle positiven $\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}$ und $\alpha^*_{\mu,0}$ erfüllt.

Im 1. Fall ist der K. V. $\left\{\overset{+}{p_t}\right\}$ nach (109), (110) und (111) in Verbindung mit (114) offenbar von erster Art. Mithin ergibt sich aus Satz 2, § 5, in diesem Fall ein befriedigendes Ergebnis für den Index $i\left\{\overset{+}{p_t}\right\}$.

Im 2. Fall lässt sich offenbar eine Grösse v^*_0 bestimmen derart, dass gleichzeitig

$$\operatorname{sg} v^*_0 = \operatorname{sg} v_0, \quad |v^*_0| \geqq \begin{cases} |f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0})|, & \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots, \overset{+}{N} \\ \varkappa = 1, 2, \ldots, M_\nu \end{pmatrix}, \\ |f^*_{t,0}(\alpha^*_{\mu,0}|, & (\mu = 1, 2, \ldots, M). \end{cases} \tag{115}$$

Dann ergibt sich

$$\left.\begin{matrix} \operatorname{sg}(v^*_0 + f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0})) \\ \operatorname{sg}(v^*_0 + f^*_{t,0}(\alpha^*_{\mu,0})) \end{matrix}\right\} = \operatorname{sg} v^*_0 = \operatorname{sg} v_0. \tag{116}$$

Mit Hilfe von v_0^* konstruiere man nunmehr eine Funktion B^*, indem man in der Darstellung (54), § 3, für B den Koeffizienten v_0 der Entwicklung (50), § 3, für $V(\sigma)$ in v_0^* abändert, und setze entsprechend Formel (59), § 4,

$$(117) \qquad i^*\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\} = \sum_{\theta_\lambda(\varrho)}{}' \operatorname{sg} \left. \frac{\dfrac{\partial^{s_\lambda} A(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_\lambda}}}{2 B^*(\varrho, \vartheta)} \right/ \vartheta = \theta_\lambda(\varrho),$$

wobei die Summation über alle diejenigen Kurven $\vartheta = \theta_\lambda(\varrho)$ des K. V. $\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\}$ zu erstrecken ist, welche von *ungeradem* Vielfachheitsgrad s_λ sind.

Mit anderen Worten: $i^*\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\}$ ist der Index des K. V. $\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\}$ bezogen auf eine Differentialgleichung der Gestalt (5) mit den beiden Koeffizienten A und $2B^*$. Somit ergibt sich leicht für $i^*\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\}$ der der Beziehung (113) entsprechende Ausdruck

$$(118) \qquad i^*\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\} = \sum_{\nu=0}^{\overset{+}{N}} \sum_{\varkappa=1}^{M_\nu} \operatorname{sg} \frac{F_{t,0}(\alpha_{\varkappa,0}^{(\nu)} + \varepsilon)}{v_0^* + f_{t,0}^*(\alpha_{\varkappa,0}^{(\nu)})} + \sum_{\beta_\nu}{}' \operatorname{sg} \frac{F_{t,0}(\beta_\nu + \varepsilon)}{v_0^*}.$$

Andererseits ergibt sich aus den Beziehungen (116)

$$\operatorname{sg} 2B^*(\varrho, \theta_\lambda(\varrho)) = \operatorname{sg} v_0$$

für sämtliche Kurven $\vartheta = \theta_\lambda(\varrho)$ des K. V. $\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\}$. Mithin ist der K. V. $\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\}$ bezogen auf die Differentialgleichungskoeffizienten A und $2B^*$ von erster Art, und es lässt sich auch auf Index $i^*\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\}$ der Satz 2, § 5, anwenden.

52. Wir behaupten jetzt, in diesen Fällen gilt der

Satz 7: *Der K. V.* $\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\}$, $(t \geqq 1)$, *sei vom Normaltypus III, d. h. es sei* $L = l_t - q - p_t$, *und es sei* $v_0 + f_{t,0}^*(\omega)$ *für alle positiven Wurzeln der Gleichung* $F_{t,0}(\omega) = 0$ *von Null verschieden. Dann ist*

$$(119) \qquad i\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\} \geqq i^*\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\};$$

hierbei ist $i^*\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\}$ *der durch die Gleichung* (118) *definierte Index eines K. V., der, auf die Koeffizienten A und* $2B^*$ *bezogen, von erster Art ist.*

Eine entsprechende Abschätzung durch den Index eines K. V. erster Art gilt auch für $i\left\{\begin{matrix}-\\ p_t\end{matrix}\right\}$, $(t \geqq 1)$, *wenn der K. V. vom Normaltypus III ist.*

53. **Beweis:** Um einen bestimmten Fall ins Auge zu fassen, setzen wir voraus, es sei

$$\operatorname{sg} v_0 = \operatorname{sg} v_0^* = +1. \tag{120}$$

Wir bemerken, dass die beiden Summen über β_ν auf den rechten Seiten der Gleichungen (113) und (118) übereinstimmen. Es genügt somit, die erste Summe in (113), d. i. die Doppelsumme, zu untersuchen.

Zunächst betrachte man ein einzelnes Glied dieser Doppelsumme

$$\operatorname{sg} \frac{F_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0} + \varepsilon)}{v_0 + f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0})};$$

dann erhält man mit Rücksicht auf (120) im Falle $v_0 > -f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0})$

$$\operatorname{sg} \frac{F_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0} + \varepsilon)}{v_0 + f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0})} = \operatorname{sg} \frac{F_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0} + \varepsilon)}{v_0} = \operatorname{sg} F_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0} + \varepsilon), \tag{121}$$

im Falle $v_0 < -f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0})$ (wobei offenbar $f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}) < 0$)

$$\operatorname{sg} \frac{F_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0} + \varepsilon)}{v_0 + f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0})} = \operatorname{sg} \frac{F_{t,0}(\alpha'^{(\nu)}_{\varkappa,0} + \varepsilon)}{f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0})} = -\operatorname{sg} F_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0} + \varepsilon). \tag{122}$$

Hieraus folgt, dass sich der Ausdruck rechter Hand von (113) auch in der Form schreiben lässt:

$$i\left\{{+ \atop p_t}\right\} = \sum_{(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0})_{\mathrm{I}}} \operatorname{sg} \frac{F_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0} + \varepsilon)}{v_0^*} + \sum_{(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0})_{\mathrm{II}}} \operatorname{sg} \frac{F_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0} + \varepsilon)}{f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0})} + \sum_{\beta_\nu}{}' \frac{F_{t,0}(\beta_\nu + \varepsilon)}{v_0^*}, \tag{123}$$

wobei die Summe $\sum\limits_{(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0})_{\mathrm{I}}}$ über alle diejenigen $\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}$ zu erstrecken ist, für welche

$$v_0 > -f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}) \qquad \text{(vgl. Formel (121))},$$

die Summe $\sum\limits_{(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0})_{\mathrm{II}}}$ über alle diejenigen $\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}$, für welche

$$v_0 < -f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa,0}) \qquad \text{(vgl. Formel (122))}, \tag{124}$$

Da nach Formel (120) und (122)

$$\sum_{(\alpha_{\varkappa,0}^{(\nu)})_{\mathrm{II}}} \operatorname{sg} \frac{F_{t,0}(\alpha_{\varkappa,0}^{(\nu)}+\varepsilon)}{f_{t,0}^{*}(\alpha_{\varkappa,0}^{(\nu)})} = - \sum_{(\alpha_{\varkappa,0}^{(\nu)})_{\mathrm{II}}} \operatorname{sg} \frac{F_{t,0}(\alpha_{\varkappa,0}^{(\nu)}+\varepsilon)}{v_0^{*}}$$

ist, so ergibt sich aus (123) in Verbindung mit (116) und (118)

$$i\left\{\begin{smallmatrix}+\\ p_t\end{smallmatrix}\right\} = i^{*}\left\{\begin{smallmatrix}+\\ p_t\end{smallmatrix}\right\} + 2 \sum_{(\alpha_{\varkappa,0}^{(\nu)})_{\mathrm{II}}} \operatorname{sg} \frac{F_{t,0}(\alpha_{\varkappa,0}^{(\nu)}+\varepsilon)}{f_{t,0}^{*}(\alpha_{\varkappa,0}^{(\nu)})}.$$

Mithin haben wir zum Beweise von Behauptung (119) nur noch zu zeigen, dass

$$\sum_{(\alpha_{\varkappa,0}^{(\nu)})_{\mathrm{II}}} \operatorname{sg} \frac{F_{t,0}(\alpha_{\varkappa,0}^{(\nu)}+\varepsilon)}{f_{t,0}^{*}(\alpha_{\varkappa,0}^{(\nu)})} \geqq 0. \tag{125}$$

54. Nunmehr mögen $\alpha_{\varkappa_\lambda,0}^{(\nu)}$ diejenigen Nullstellen ungerader Ordnung von $F_{t,0}(\omega)$ bezeichnen, welche

erstens der Bedingung (122) genügen,

zweitens im Innern des Intervalls

$$\beta_\nu < \alpha_{\varkappa_0,0}^{(\nu)} < \gamma_{\nu,0}, \quad \text{bezw.} \quad \gamma'_{\nu,\lambda} < \alpha_{\varkappa_\lambda,0}^{(\nu)} < \gamma_{\nu,\lambda} \qquad \begin{pmatrix}\nu = 0, 1, \ldots, \overset{+}{N} \\ \lambda = 1, 2, \ldots, P_\nu\end{pmatrix} \tag{126}$$

gelegen sind. (Vgl. die Bezeichnungen aus Abschnitt **41**, § 8, und die Sätze über die Lage der Nullstellen aus den Abschnitten **43** und **44**, § 8).

Insbesondere sei $\alpha_{\varkappa'_\lambda,0}^{(\nu)}$ diejenigen unter den Nullstellen $\alpha_{\varkappa_\lambda,0}^{(\nu)}$, welche $\gamma_{\nu,\lambda}$ am nächsten gelegen sind. Dann lässt sich $\sum\limits_{(\alpha_{\varkappa,0}^{(\nu)})_{\mathrm{II}}}$ in (125) in der Form

$$\sum_{(\alpha_{\varkappa,0}^{(\nu)})_{\mathrm{II}}} = \sum_{\nu} \sum_{\lambda=0}^{P_\nu} \sum_{\varkappa_\lambda \leqq \varkappa'_\lambda} \operatorname{sg} \frac{F_{t,0}(\alpha_{\varkappa_\lambda,0}^{(\nu)}+\varepsilon)}{f_{t,0}^{*}(\alpha_{\varkappa_\lambda,0}^{(\nu)})} \tag{127}$$

schreiben. Hierbei ist offensichtlich die Summation nur über solche ν und λ zu erstrecken, zu denen $\alpha_{\varkappa_\lambda,0}^{(\nu)}$ gehören, welche den beiden Bedingungen (122) und (126) genügen. Nun ist aber (vgl. Formel (85), § 8)

$$\operatorname{sg} F_{t,0}(\alpha_{\varkappa'_\lambda,0}^{(\nu)}+\varepsilon) = \operatorname{sg} F_{t,0}(\gamma_{\nu,\lambda}) = \operatorname{sg} f_{t,0}^{*}(\gamma_{\nu,\lambda}) = \operatorname{sg} f_{t,0}^{*}(\alpha_{\varkappa'_\lambda,0}^{(\nu)}),$$

mithin

$$\operatorname{sg} \frac{F_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa'_\lambda,0} + \varepsilon)}{f^*_{t,0}(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa'_\lambda,0})} = +1,$$

und hieraus schliesst man in Verbindung mit (104) und (105), § 9, dass sämtliche Teilsummen

$$\sum_{\varkappa_\lambda \leq \varkappa'_\lambda} \operatorname{sg} \frac{F_{t,0}\left(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa_\lambda,0} + \varepsilon\right)}{f^*_{t,0}\left(\alpha^{(\nu)}_{\varkappa_\lambda,0}\right)} = 0 \text{ oder } +1 \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots P_\nu)$$

sind, je nachdem die Anzahl der Glieder dieser Teilsumme gerade oder ungerade ist. Hieraus folgt aber die behauptete Abschätzung (125) in Verbindung mit (127) unter der Voraussetzung (120) sg $v_0 = +1$.

Ist sg $v_0 = -1$, so führen die gleichen Überlegungen zum Beweis der Abschätzung (125) und der mit ihr äquivalenten Behauptung (119).

Offenbar lässt sich für einen K. V. $\overset{-}{\{p_t\}}$ vom Normaltypus III eine (119) entsprechende Abschätzung $i\,\overset{-}{\{p_t\}} \geqq i^*\,\overset{-}{\{p_t\}}$ ableiten. Damit ist Satz 7 vollständig bewiesen.

55. Zum Schluss bemerken wir noch, dass die Abschätzung (119) auch für den K. V. $\{p_0\}$ gilt, unter der Voraussetzung, dass $\{p_0\}$ von Normaltypus III ist. Denn in diesem Falle ist wegen Formel (76) und (79), § 7, und wegen $k_0 = 1$

$$(128) \qquad i\{p_0\} = \operatorname{sg} \left.\frac{A_\vartheta(\varrho, \vartheta)}{2B(\varrho, \vartheta)}\right/_{\vartheta = 0} = \operatorname{sg} \frac{w_{m_0,1}}{v_0 + w_{m_0,1}} \qquad (v_0 + w_{m_0,1} \neq 0).$$

Ist nun ausserdem

$$\operatorname{sg} v_0 = \operatorname{sg} w_{m_0,1}$$

so folgt für jedes beliebige v_0^* von gleichem Vorzeichen wie v_0

$$\operatorname{sg} \frac{w_{m_0,1}}{w_{m_0,1} + v_0} = \operatorname{sg} \frac{w_{m_0,1}}{v_0^* + w_{m_0,1}} = +1,$$

mithin

$$i\{p_0\} = i^*\{p_0\}.$$

Ist hingegen

$$\operatorname{sg} v_0 = -\operatorname{sg} w_{m_0,1},$$

so wähle man v_0^* derart, dass gleichzeitig

$$\operatorname{sg} v_0 = \operatorname{sg} v_0^*, \quad |v_0^*| > |w_{m_0,1}|.$$

Dann wird

$$\operatorname{sg}(v_0^* + w_{m_0,1}) = \operatorname{sg} v_0^* = -\operatorname{sg} w_{m_0,1},$$

mithin

(129) $$i^*\{p_0\} = \operatorname{sg} \frac{w_{m_0,1}}{v_0^* + w_{m_0,1}} = -1 \leqq i\{p_0\} \text{ wegen } (128).$$

Damit ist die Behauptung (119) von Satz 7 auch für den K. V. $\{p_0\}$ vom Normaltypus III bewiesen.

§ 11. Der Kurvenverband der Ordnung Null vom allgemeinen Typus III und sein Index.

56. Es sei der vorgelegte K. V. $\left\{\begin{smallmatrix}+\\p_t\end{smallmatrix}\right\}$ $(t \geqq 1)$ vom Typus III wie im vorigen Paragraphen, aber nicht mehr vom Normaltypus III; d. h. es sei zwar $L = l_t - - q - p_t$, aber es verschwinde $v_0 + f_{t,0}^*(\omega)$ für mindestens eine der Nullstellen ungerader Ordnung $\alpha_{\varkappa,0}^{(\nu)}$ oder gerader Ordnug $\alpha_{\mu,0}^*$ von $F_{t,0}(\omega)$. Wir werden in diesem Paragraphen zeigen, dass sich auch unter diesen allgemeineren Voraussetzungen die Abschätzung (119), § 10, beweisen lässt.

Man bezeichne etwa mit $\mathring{\alpha}$ eine Nullstelle gerader oder ungerader Ordnung von $F_{t,0}(\omega)$, für welche gleichzeitig

(130) $$v_0 + f_{t,0}^*(\mathring{\alpha}) = 0.$$

Wir bemerken zunächst, wenn man die Definitionsgleichung (59), § 4, für den Index $i\left\{\begin{smallmatrix}+\\p_t\end{smallmatrix}\right\}$ betrachtet, dass sich auf der rechten Seite von (59) $2B(\varrho, \vartheta)$ durch

(131) $$2\tilde{B}(\varrho, \vartheta) = 2B(\varrho, \vartheta) + \frac{q}{p_t} \frac{A(\varrho, \vartheta)}{\vartheta}$$

ersetzen lässt, da wegen $A(\varrho, \theta_\nu(\varrho)) = 0$

(132) $$2\tilde{B}(\varrho, \theta_\nu(\varrho)) = 2B(\varrho, \theta_\nu(\varrho))$$

ist.

Nunmehr untersuchen wir zunächst den Index

(133) $$i\{\mathring{\alpha}\} = \sum_{\{\mathring{\alpha}\}}{}' \operatorname{sg} \left. \frac{\dfrac{\partial^{s_\nu} A(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_\nu}}}{2\tilde{B}(\varrho, \vartheta)} \right/ \vartheta = \theta_\nu(\varrho),$$

wobei die Summation über alle diejenigen Kurven $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ des K. V. $\{\mathring{\alpha}\}$ erster Ordnung zu erstrecken ist, welche von *ungeradem* Vielfachheitsgrad s_ν sind (vgl. Definition IV, § 4), und behaupten: der K. V. $\{\mathring{\alpha}\}$ erster Ordnung ist von zweiter Art (im Sinne der Definition VI, § 6).

57. Um diese Behauptung zu beweisen, haben wir nach Definition VI, § 6, nur zu zeigen, dass $2\tilde{B}(\varrho, \vartheta)$ und damit wegen (132) auch $2B(\varrho, \vartheta)$ genau ein einziges Mal das Vorzeichen wechselt, wenn $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ alle Kurven des K. V. $\{\mathring{\alpha}\}$ durchläuft.

Nach der Substitution

$$\varrho = \sigma^q, \quad \vartheta = \sigma^{p_t}\omega$$

ergibt sich offenbar aus Formel (131) (vgl. auch Formel (34), § 1, und (49), (50), (54), § 3)

$$\begin{aligned}(134)\qquad \lim_{\sigma\to 0} \frac{2\tilde{B}(\sigma^q, \sigma^{p_t}\omega)}{\sigma^{l_t-q-p_t}} &\to v_0 + f'_{t,0}(\omega) + \frac{q}{p_t}\frac{F_{t,0}(\omega)}{\omega} \\ &= v_0 + f^*_{t,0}(\omega) \text{ (wegen (41) § 2 und (80) § 8).}\end{aligned}$$

Andererseits ist aber nach Formel (130)

$$(135)\qquad \lim_{\sigma\to 0} \frac{2\tilde{B}(\sigma^q, \sigma^{p_t}\mathring{\alpha})}{\sigma^{l_t-q-p_t}} \to v_0 + f^*_{t,0}(\mathring{\alpha}) = 0$$

d. h aber, dass

$$f^*_{t,0}(\mathring{\alpha}) = -v_0 \neq 0,$$

und damit wegen (81), § 8, und wegen $F_{t,0}(\mathring{\alpha}) = 0$ auch

$$f^{*\prime}_{t,0}(\mathring{\alpha}) = \frac{l_t - p_t}{p_t\mathring{\alpha}} f^*_{t,0}(\mathring{\alpha}) \neq 0$$

ist.

Jetzt lässt sich aber mit Rücksicht auf den Fundamentalsatz über die Existenz und Eindeutigkeit impliziter Funktionen leicht zeigen, dass eine und nur eine Funktion $\mathring{\omega}(\sigma)$ existiert derart, dass gleichzeitig

$$\tilde{B}(\sigma^q, \sigma^{p_t}\mathring{\omega}(\sigma)) = 0, \quad \lim_{\sigma\to 0}\mathring{\omega}(\sigma) \to \mathring{\alpha};$$

denn es ist mit Rücksicht auf (134)

$$\lim_{\substack{\sigma\to 0\\ \omega\to\mathring{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial\omega}\frac{2\tilde{B}(\sigma^q, \sigma^{p_t}\omega)}{\sigma^{l_t-q-p_t}} \to f^{*\prime}_{t,0}(\mathring{\alpha}) \neq 0.$$

Das bedeutet aber, dass nach Wahl eines hinreichend kleinen positiven ε das Rechteck $\mathring{\alpha} - \varepsilon \leqq \omega \leqq \mathring{\alpha} + \varepsilon$, $0 \leqq \sigma \leqq \delta$ der σ, ω-Ebene durch die Kurve $\omega = \mathring{\omega}(\sigma)$ in zwei Teilgebiete zerlegt wird, wobei in jedem dieser Teilgebiete die Funktion $\tilde{B}(\sigma^q, \sigma^{p_t}\omega)$ von einerlei Vorzeichen ist, andererseits ihr Vorzeichen nur beim Überschreiten der Kurve $\omega = \mathring{\omega}(\sigma)$ wechselt.

Es seien jetzt

$$\vartheta = \theta_\nu(\varrho) = \sigma^{p_t}\,\Omega_\nu(\sigma) \text{ für } \nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2$$

die sämtlichen Kurven des K. V. $\{\mathring{\alpha}\}$ erster Ordnung der Grösse nach geordnet, so wie es in Abschnitt 24 Formel (57), § 4, beschrieben ist. Dann existiert offenbar ein zwischen ν_1 und ν_2 gelegener Index ν_0, derart dass nach Wahl eines hinreichend kleinen δ

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_\nu(\sigma) > \mathring{\omega}(\sigma) \text{ für } \nu \leqq \nu_0 \\ \Omega_\nu(\sigma) < \mathring{\omega}(\sigma) \text{ für } \nu \geqq \nu_0 + 1 \end{array}\right\} 0 < \sigma \leqq \delta.$$

Berücksichtigt man ausserdem noch die Sätze über die Lage der Nullstelle $\mathring{\alpha}$ von $F_{t,0}(\omega)$ aus Abschnitt 43, § 8, so ergibt sich aus der soeben bewiesenen Eigenschaft der Funktion $\mathring{\omega}(\sigma)$ (vgl. auch Formel (130) und (135))

$$(136) \qquad \operatorname{sg} 2\,\tilde{B}(\sigma^q, \sigma^{p_t}\Omega_\nu(\sigma)) =$$

$$= \begin{cases} \operatorname{sg}(c_0 + f^*_{t,0}(\mathring{\alpha} + \varepsilon)) = \operatorname{sg} f^*_{t,0}(\mathring{\alpha}) & \text{für } \nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_0 \\ \operatorname{sg}(c_0 + f^*_{t,0}(\mathring{\alpha} - \varepsilon)) = \operatorname{sg} c_0 = -\operatorname{sg} f^*_{t,0}(\mathring{\alpha}) & \text{für } \nu_0 + 1 \leqq \nu \leqq \nu_2. \end{cases}$$

Die Beziehung (136) lässt aber unmittelbar erkennen, dass der K. V. $\{\mathring{\alpha}\}$, wie oben behauptet, von zweiter Art ist, und es folgt ferner aus (133) und (136)

$$(137) \qquad i\{\mathring{\alpha}\} = \sum_{\nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_0}{}' \operatorname{sg} \frac{\dfrac{\partial^{s_\nu} A(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_\nu}}}{f^*_{t,0}(\mathring{\alpha})} \Bigg/ \vartheta = \theta_\nu(\varrho) + \sum_{\nu_0+1 \leqq \nu \leqq \nu_2}{}' \operatorname{sg} \frac{\dfrac{\partial^{s_\nu} A(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_\nu}}}{c_0} \Bigg/ \vartheta = \theta_\nu(\varrho);$$

hierbei ist die Summation ebenso wie in (133) nur über diejenigen Kurven $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ zu erstrecken, welche zu einem *ungeraden* Vielfachheitsgrad s_ν gehören.

58. Nunmehr wähle man, unter ε eine positive kleine Zahl verstanden, $\nu_2 - \nu_1 + 1$ Zahlen $\mathring{\alpha}_\nu$, $\nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2$, die alle im Intervall $\mathring{\alpha} + \varepsilon > \mathring{\alpha}_\nu > \mathring{\alpha} - \varepsilon$ gelegen sind, derart dass

$$(138) \qquad \mathring{\alpha} + \varepsilon > \mathring{\alpha}_{\nu_1} > \mathring{\alpha}_{\nu_1+1} > \cdots > \mathring{\alpha}_{\nu_0} > \mathring{\alpha} > \mathring{\alpha}_{\nu_0+1} > \cdots > \mathring{\alpha}_{\nu_2} > \mathring{\alpha} - \varepsilon$$

und bestimme zu diesen Zahlen $\mathring{\alpha}_\nu$ Kurven $\vartheta = \hat{\theta}_\nu(\varrho) = \sigma^{\frac{p_t}{q}} \hat{\Omega}_\nu(\sigma)$ welche den Bedingungen

$$(139)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\sigma \to 0} \hat{\Omega}_\nu(\sigma) \to \mathring{\alpha}_\nu, \quad |\hat{\Omega}(\sigma) - \Omega_\nu(\sigma)| \leqq \varepsilon \qquad \begin{pmatrix} \nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2 \\ 0 \leqq \sigma \leqq \delta \end{pmatrix} \\ \Omega_{\nu_1-1}(\sigma) > \hat{\Omega}_{\nu_1}(\sigma) > \hat{\Omega}_{\nu_1+1}(\sigma) > \cdots > \hat{\Omega}_{\nu_0}(\sigma) > \mathring{\omega}(\sigma) > \hat{\Omega}_{\nu_0+1}(\sigma) > \cdots \\ \qquad > \hat{\Omega}_{\nu_2}(\sigma) > \Omega_{\nu_2+1}(\sigma) \end{cases}$$

genügen. Ferner konstruiere man eine Funktion $\hat{A}(\varrho, \vartheta)$ indem man in der Produktdarstellung (57′), § 4, des Koeffizienten $A(\varrho, \vartheta)$ die Funktionen $\theta_\nu(\varrho)$ für $\nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2$ durch die entsprechenden $\hat{\theta}(\varrho)$ ersetzt.

Indem man die alternierende Grundeigenschaft (60), § 4, der Summen (133) heranzieht, überzeugt man sich leicht davon, dass

$$(140)\quad \operatorname{sg} \frac{\partial^{s_\nu} \hat{A}(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_\nu}} \Bigg/ \vartheta = \hat{\theta}_\nu(\varrho) = \operatorname{sg} \frac{\partial^{s_\nu} A(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_\nu}} \Bigg/ \vartheta = \theta_\nu(\varrho) \quad \text{für } \nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2.$$

Endlich setze man entsprechend Formel (133)

$$(141)\quad \hat{i}\{\mathring{\alpha}\} = \sum_{\nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2}{}' \operatorname{sg} \frac{\dfrac{\partial^{s_\nu} \hat{A}(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_\nu}}}{2 \tilde{B}(\varrho, \vartheta)} \Bigg/ \vartheta = \hat{\theta}_\nu(\varrho).$$

Da ausserdem nach Formel (134) in Verbindung mit (138) und (139)

$$(142)\quad \operatorname{sg} 2 \tilde{B}(\sigma_q, \sigma^{p_t} \hat{\Omega}_\nu(\sigma)) = \operatorname{sg}(v_0 + f^*_{t,0}(\mathring{\alpha}_\nu)) = \\ = \begin{cases} \operatorname{sg} f^*_{t,0}(\mathring{\alpha}) & \text{für } \nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_0 \\ \operatorname{sg} v_0 = -\operatorname{sg} f^*_{t,0}(\mathring{\alpha}) & \text{für } \nu_0 + 1 \leqq \nu \leqq \nu_2 \end{cases}$$

ist, so folgt mit Rücksicht auf (137), indem man in Formel (141) für

$$\operatorname{sg} \frac{\partial^{s_\nu} \hat{A}(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_\nu}} \Bigg/ \vartheta = \hat{\theta}_\nu(\varrho)$$

bezw. $\operatorname{sg} 2 \tilde{B}(\varrho, \hat{\theta}(\varrho))$ ihre Werte aus (140) und (142) einsetzt

$$(143)\quad i\{\mathring{\alpha}\} = \hat{i}\{\mathring{\alpha}\}.$$

59. Es seien jetzt $\mathring{\alpha}^{(\varkappa)}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, \varkappa_0)$ alle positiven Nullstellen von $F_{t,0}(\omega)$, für die

$$v_0 + f_{t,0}^{*}(\mathring{\alpha}^{(\varkappa)}) = 0$$

ist und es bezeichne ferner $\hat{A}(\varrho, \vartheta)$ die Funktion, die man erhält, wenn man in der Produktdarstellung (57'), § 4, alle diejenigen Funktionen $\theta_\nu(\varrho)$, für welche

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-\frac{p_t}{q}} \theta_\nu(\varrho) \to \mathring{\alpha}^{(\varkappa)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \varkappa_0)$$

durch geeignet gewählte Funktionen $\hat{\theta}_\nu(\varrho)$ mit den in Abschnitt 58 Formel (138) und (139) geschilderten Eigenschaften ersetzt.

Nunmehr sei $\hat{i}\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix}$ der Index des K. V. $\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix}$ bezogen auf eine Differentialgleichung der Formel (5), bei der an die Stelle der Koeffizienten A und B die Funktionen $\hat{A}$ und $\tilde{B}$ treten. Dann ergibt sich wegen (143)

$$\hat{i}\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix} = i\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix} - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa_0} i\,\{\mathring{\alpha}^{(\varkappa)}\} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa_0} \hat{i}\,\{\mathring{\alpha}^{(\varkappa)}\} = i\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix}. \tag{144}$$

Nun hat aber der auf $\hat{A}$ und $\tilde{B}$ bezogene K. V. $\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix}$ die gleichen Eigenschaften, wie der in § 10 behandelte K. V. der Ordnung Null vom Normaltypus III. Denn, ist wieder v_0^* die Konstante, die den Bedingungen (115), § 10, genügt und B^* die mit Hilfe von v_0^* abgeänderte Funktion B des Abschnitts 51, § 10, so ergibt sich aus der in den Abschnitten 52, 53 und 54 entwickelten Schlusskette, entsprechend der Abschätzung (119), § 10,

$$\hat{i}\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix} \geqq \hat{i}^*\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix} \tag{145}$$

wobei $\hat{i}^*\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix}$ den Index des auf die Differentialgleichungskoeffizienten

$$\hat{A} \text{ und } 2\tilde{B}^* = 2B^*(\varrho, \vartheta) + \frac{q}{p_t}\,\frac{A(\varrho, \vartheta)}{\vartheta} \qquad \text{(vgl. Formel (131))}$$

bezogenen K. V. $\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix}$ bezeichnet.

Wenn man jetzt mit der in Formel (138) und (139) auftretenden Grösse ε zur Grenze $\varepsilon \to 0$ übergeht, so bemerkt man leicht, dass dabei $\hat{i}^*\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix}$ in $i^*\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix}$ übergeht, unter $i^*\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix}$ den Ausdruck (117) in § 10 verstanden. Da aber $\hat{i}^*\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix}$ bei abnehmendem ε unverändert bleibt, so ist

$$\hat{i}^*\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix} = i^*\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix}. \tag{146}$$

Mit den Beziehungen (144), (145) und (146) haben wir nun aber ein Gegenstück zu Satz 7, § 10, bewiesen, nämlich den

Satz 7 a: *Der K. V.* $\left\{ {+ \atop p_t} \right\}$ $(t \geqq 1)$ *sei vom allgemeinen Typus III, d. h. es werde nur* $L = l_t - q - p_t$ *vorausgesetzt.*

Dann ist

(147) $$i \left\{ {+ \atop p_t} \right\} \geqq i^* \left\{ {+ \atop p_t} \right\};$$

hierbei ist $i^* \left\{ {+ \atop p_t} \right\}$ *der Index eines in Abschnitt* 51, § 10, *definierten K. V. der Ordnung Null von erster Art.*

Eine entsprechende Abschätzung durch den Index eines K. V. von erster Art gilt für $i \left\{ {- \atop p_t} \right\}$, *wenn der K. V.* $\left\{ {- \atop p_t} \right\}$ *vom Typus III ist,* d. h. wenn für den K. V. $\left\{ {- \atop p_t} \right\}$ die Voraussetzung $L = l_t - q - p_t$ erfüllt ist.

60. Um endlich zu zeigen, dass die Abschätzung (147) auch für den K. V. $\{p_0\}$ gilt, wenn $\{p_0\}$ vom allgemeinen Typus III ist, berücksichtigen wir, dass (147) in Abschnitt 55, § 10, im Falle des Normaltypus III, d. h. wenn $v_0 + w_{m_0, 1} \neq 0$, bereits bewiesen wurde. Ist nun andererseits

$$v_0 + w_{m_0, 1} = 0,$$

so folgt

$$\text{sg } v_0 = - \text{sg } w_{m_0, 1}.$$

Bestimmt man nunmehr eine Grösse v_0^*, die den Bedingungen (115), § 10, genügt, so hat man wieder

$$\text{sg } (v_0^* + w_{m_0, 1}) = \text{sg } v_0^* = - \text{sg } w_{m_0, 1}$$

und mithin

(148) $$i^* \{p_0\} = \text{sg } \frac{w_{m_0, 1}}{v_0^* + w_{m_0, 1}} = - 1.$$

Andererseits ist aber, wegen $k_0 = 1$

(149) $$i \{p_0\} = \text{sg } \frac{A_\vartheta (\varrho, \vartheta)}{2 B (\varrho, \vartheta)} \Bigg/_{\vartheta = 0} \geqq - 1,$$

und damit ist die Abschätzung (147) des Satzes 7 a auch für den K. V. $\{p_0\}$ vom allgemeinen Typus III bewiesen.

§ 12. Der Index der Gesamthet aller Kurvenverbände der Ordnung Null vom Typus I und vom Typus III.

61. Den Betrachtungen dieses Paragraphen schicken wir den Beweis eines einfachen Hilfssatzes voraus.

Hilfssatz 1: Haben die Zahlen l_t, k_t, m_t, p_t und q die in § 1 auseinandergesetzte Bedeutung, so ist immer

$$l_{t-1} - p_{t-1} > l_t - p_t$$

ausgenommen, wenn $k_{t-1} = 1$; dann ist

$$l_{t-1} - p_{t-1} = l_t - p_t.$$

Beweis: Indem man berücksichtigt, dass die in Gleichung (36), § 1, eingeführte Gerade der $\varkappa$, μ-Ebene durch die beiden Punkte $\varkappa = k_t$, $\mu = m_t$ und $\varkappa = k_{t-1}$, $\mu = m_{t-1}$ geht, erhält man für l_t die beiden Ausdrücke

$$l_t = \begin{cases} q(m - 1 + m_t) + p_t k_t \\ q(m - 1 + m_{t-1}) + p_t k_{t-1}; \end{cases}$$

es ist folglich

$$(150) \qquad \begin{cases} l_t - p_t = q(m - 1 + m_{t-1}) + p_t(k_{t-1} - 1), \\ l_{t-1} - p_{t-1} = q(m - 1 + m_{t-1}) + p_{t-1}(k_{t-1} - 1), \end{cases}$$

und hieraus ergibt sich durch Subtraktion

$$(l_{t-1} - p_{t-1}) - (l_t - p_t) = (p_{t-1} - p_t)(k_{t-1} - 1).$$

Mithin ist, da nach Formel (30), § 1, $p_{t-1} > p_t$

$$l_{t-1} - p_{t-1} \geqq l_t - p_t,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn $k_{t-1} = 1$, was zu beweisen war.

62. Nunmehr sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall. Sämtliche K. V. der Ordnung Null sind vom Typus II. Dann folgt aus Satz 6, § 9, bereits die Behauptung (18) der Einleitung $i(0) \geqq -1$, wenn ausserdem noch jeder K. V. vom Normaltypus ist.

Ist hingegen einer der auftretenden K. V. vom allgemeinen Typus II, d. h. hat auch nur eins der Polynome $f_{t,0}(\omega)$ für $1 \leqq t \leqq T$ mindestens eine von Null verschiedene reelle Nullstelle der Ordnung $\geqq 2$, so lässt sich mit unseren bisherigen Hilfsmitteln über $i(0)$ noch nichts aussagen.

2. Fall. Nicht alle K. V. der Ordnung Null sind vom Typus II. Dann existiert nach Hilfssatz 1 eine Zahl $t_0 \leqq T$, derart dass

$$\begin{cases} l_t - q - p_t \geqq L, & \text{für } 0 \leqq t \leqq t_0 \\ l_t - q - p_t < L & \text{für } t_0 + 1 \leqq t \leqq T, \end{cases} \tag{151}$$

d. h. aber es sind die $\left\{\overset{+}{p_t}\right\}$ und $\left\{\overset{-}{p_t}\right\}$ vom Typus II, wenn $t \geqq t_0 + 1$, hingegen vom Typus I oder vom Typus III, wenn $t \leqq t_0$. Wir behaupten nunmehr: es ist

$$i\{p_0\} + \sum_{t=1}^{t_0} \left(i\left\{\overset{+}{p_t}\right\} + i\left\{\overset{-}{p_t}\right\} \right) \geqq -1$$

oder in Worten, wenn wir abkürzend mit $\{t_0\}$ die Gesamtheit der K. V. $\{p_0\}$, $\left\{\overset{+}{p_t}\right\}$, $\left\{\overset{-}{p_t}\right\}$ für $1 \leqq t \leqq t_0$ bezeichnen.

Satz 8. *Der Index $i\{t_0\}$ der Gesamtheit aller K. V. der Ordnung Null, welche entweder vom Typus I oder vom Typus III sind, ist $\geqq -1$. Dabei ist eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung dafür, dass dieser Index seinen Minimalwert -1 annimmt:*

$$k_{t_0} \textit{ ungerade}, \quad \operatorname{sg} \frac{w_{m_{t_0}, k_{t_0}}}{v_0} = -1; \tag{152}$$

oder anders formuliert: es ist

$$\begin{aligned} & i\{t_0\} \geqq 0, && \textit{wenn } k_{t_0} \textit{ gerade} \\ & i\{t_0\} \geqq +1 && \textit{wenn } k_{t_0} \textit{ ungerade und } \operatorname{sg} \frac{w_{m_{t_0}, k_{t_0}}}{v_0} = +1. \end{aligned} \tag{153}$$

63. **Beweis**: Nach Hilfssatz 1 sind höchstens die K. V. $\left\{\overset{+}{p_{t_0}}\right\}$, $\left\{\overset{-}{p_{t_0}}\right\}$ und $\left\{\overset{+}{p_{t_0-1}}\right\}$, $\left\{\overset{-}{p_{t_0-1}}\right\}$ vom Typus III, während alle anderen vom Typus I sind. Man bestimme nunmehr für die K. V., soweit diese vom Typus III sind, die Konstante v_0^*, die den Bedingungen (115), § 10 genügt, und konstruiere ebenso wie in Abschnitt 51, § 10, mit dieser Konstanten v_0^* die Funktion $B^*(\varrho, \vartheta)$. Aus den Beziehungen (70), (73), § 7, und (116), § 10, folgert man leicht, dass

$$\operatorname{sg} 2\, B^*(\varrho, \theta_\nu(\varrho)) = \operatorname{sg} v_0 \tag{154}$$

ist, und zwar für alle Kurven $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$, die zu einem der betrachteten K. V. $\{p_0\}$, $\left\{\overset{+}{p_t}\right\}$, $\left\{\overset{-}{p_t}\right\}$ für $1 \leqq t \leqq t_0$ gehören, mögen diese vom Typus III oder aber vom Typus I sein.

Bezeichnen wir mit $\{t_0\}$ die Gesamtheit der K. V. $\{p_0\}$, $\overset{+}{\{p_t\}}$, $\overset{-}{\{p_t\}}$ für $1 \leqq t \leqq t_0$ und mit $i^*\{t_0\}$ den auf die Differentialgleichung (5) mit den Koeffizienten A und B^* bezogenen Index des K. V. $\{t_0\}$, so ergibt sich nach Satz 2, § 5,

$$i^*\{t_0\} = -1, \text{ oder } 0, \text{ oder } +1,$$

da wegen (154) der auf die Koeffizienten A und B^* bezogene K. V. $\{t_0\}$ von erster Art ist.

64. Nunmehr suchen wir, indem wir die Ausführungen des Abschnitts **31**, § 5, heranziehen, die genauen Bedingungen anzugeben, unter denen $i^*\{t_0\} = -1$ ist. Es habe, wie in dem zitierten Abschnitt, die Kurve $\vartheta = \theta_{\nu_1}(\varrho)$ von ungeradem Vielfachheitsgrad s_{ν_1} die Eigenschaft, dass im Intervall $0 < \varrho \leqq \delta$

$$\theta_{\nu_1}(\varrho) > \theta_\nu(\varrho) \tag{155}$$

ist, für alle von $\theta_{\nu_1}(\varrho)$ verschiedenen Kurven $\theta_\nu(\varrho)$ von ungeradem Vielfachheitsgrad s_ν des K. V. $\{t_0\}$; ausserdem sei $\vartheta = \theta_{\nu'_1}(\varrho) > \theta_{\nu_1}(\varrho)$ $(\nu'_1 > \nu_1)$ die auf $\vartheta = \theta_{\nu_1}(\varrho)$ unmittelbar folgende Stelle des Zeichenwechsels der Funktion $A(\varrho, \vartheta)$, wobei wegen (155) $\vartheta = \theta_{\nu'_1}(\varrho)$ dem K. V. $\{t_0\}$ nicht mehr angehört. Endlich bemerkt man leicht, dass der K. V. $\{t_0\}$ dann und nur dann von ungerader Mächtigkeit ist, wenn k_{t_0} ungerade ist.

Jetzt ergibt sich für ungerades k_{t_0} unmittelbar aus den Beziehungen (66) und (67), § 5,

$$i^*\{t_0\} = \operatorname{sg} \frac{A(\varrho, \vartheta)}{B^*(\varrho, \theta_{\nu_1}(\varrho))}, \quad \text{wobei } \theta_{\nu_1}(\varrho) < \vartheta < \theta_{\nu'_1}(\varrho). \tag{156}$$

Nun ist aber offenbar mit Rücksicht auf Formel (34), (35) und (37), § 1,

$$\operatorname{sg} A(\varrho, \vartheta) = \operatorname{sg} F_{t_0, 0}(\infty) = \operatorname{sg} w_{m_{t_0}, k_{t_0}}, \tag{157}$$

und hieraus folgt weiter, indem man die Werte aus (154) und (157) in (156) einsetzt:

$$\begin{cases} i^*\{t_0\} = 0 & \text{für gerades } k_{t_0} \\ i^*\{t_0\} = \operatorname{sg} \dfrac{w_{m_{t_0}, k_{t_0}}}{v_0} & \text{für ungerades } k_{t_0}. \end{cases} \tag{158}$$

Diese Beziehung gilt, wie man leicht einsieht, auch dann, wenn sich $\{t_0\}$ nur aus dem einzigen K. V. $\{p_0\}$ zusammensetzt.

65. Zerlegt man endlich wieder die Gesamtheit $\{t_0\}$ in die einzelnen K. V. $\{p_0\}$, $\left\{\overset{+}{p_t}\right\}$, $\left\{\overset{-}{p_t}\right\}$, so hat man

$$i^*\{t_0\} = i^*\{p_0\} + \sum_{t=1}^{t_0}\left(i^*\left\{\overset{+}{p_t}\right\} + i^*\left\{\overset{-}{p_t}\right\}\right).$$

Andererseits ist nach Satz 7a

$$i^*\left\{\overset{+}{p_t}\right\} \leqq i\left\{\overset{+}{p_t}\right\},\quad i^*\left\{\overset{-}{p_t}\right\} \leqq i\left\{\overset{-}{p_t}\right\}, \tag{159}$$

wenn die K. V. $\left\{\overset{+}{p_t}\right\}$ und $\left\{\overset{-}{p_t}\right\}$ vom Typus III sind; ausserdem ist

$$i^*\left\{\overset{+}{p_t}\right\} = i\left\{\overset{+}{p_t}\right\},\quad i^*\left\{\overset{-}{p_t}\right\} = i\left\{\overset{-}{p_t}\right\}, \tag{160}$$

wenn die K. V. $\left\{\overset{+}{p_t}\right\}$ und $\left\{\overset{-}{p_t}\right\}$ vom Typus I sind, da in diesem Falle offenbar wegen (154) und wegen (70), § 7,

$$\operatorname{sg} 2B^*(\varrho, \theta_\nu(\varrho)) = \operatorname{sg} 2B(\varrho, \theta_\nu(\varrho)) = \operatorname{sg} v_0$$

ist. Ebenso erhält man aus (129), § 10, (148) und (149), § 11,

$$i^*\{p_0\} \leqq i\{p_0\}. \tag{161}$$

Aus den Abschätzungen (159), (160) und (161) ergibt sich nun aber

$$i\{t_0\} = i\{p_0\} + \sum_{t=1}^{t_0}\left(i\left\{\overset{+}{p_t}\right\} + i\left\{\overset{-}{p_t}\right\}\right) \geqq i^*\{t_0\},$$

und damit ist mit Rücksicht auf die Gleichung (158) für $i^*\{t_0\}$ der Satz 8 vollständig bewiesen.

66. Zusammenfassend bemerken wir, dass aus Satz 6, § 9, und Satz 8, § 12, das Ziel unserer Untersuchung, nämlich der Beweis der Abschätzung $i(0) \geqq -1$, unter der Voraussetzung folgt, dass sämtliche auftretenden K. V. der Ordnung Null entweder vom Typus I oder vom Typus III oder vom Normaltypus II sind. Treten aber unter den K. V. der Ordnung Null auch solche vom allgemeinen Typus II auf, so steht uns zur Abschätzung ihres Index nur Satz 5, § 9, zur Verfügung, nach dem

$$i\left\{\overset{+}{p_t}\right\} = \overset{+}{N} + \sum_{\nu=1}^{\overset{+}{N}} i\{\beta_\nu\}.$$

Hierbei sind die $\overset{+}{N}$ Grössen β_ν sämtliche positiven Nullstellen des dem K. V. $\left\{\begin{smallmatrix}+\\ p_t\end{smallmatrix}\right\}$ zugeordneten Polynoms $f_{t,0}(\omega)$.

Die Untersuchung von $\sum\limits_{\nu=1}^{\overset{+}{N}} i\{\beta_\nu\}$ ist die einzige Aufgabe, die in den folgenden drei Kapiteln des Teils III noch zu lösen ist. Dieses Problem ist aber schwierig. Nachdem in Kapitel III mit Hilfe einer Enriquesschen Methode ein Algorithmus entwickelt ist, der einen rechnerischen Zugang zu den K. V. höherer Ordnung eröffnet, wird in Kapitel IV zunächst eine Reihe von Sätzen über den Index gewisser K. V. höherer Ordnung mit speziellen Eigenschaften bewiesen. Dabei tritt ein erschwerender Umstand auf. Während wir bisher für die K. V. der Ordnung Null immer $i\left\{\begin{smallmatrix}+\\ p_t\end{smallmatrix}\right\} \geqq -1$ zeigen konnten, gilt für die K. V. der Ordnung $\lambda \geqq 1$ nur $i\{\alpha_{\nu,\lambda-1}\} \geqq -2$; und zwar sind leicht Beispiele zu konstruieren derart, dass der Index $i\{\alpha_{\nu,\lambda-1}\}$ seinen Minimalwert -2 wirklich annimt.

Der Nachweis der Abschätzung $i\left\{\begin{smallmatrix}+\\ p_t\end{smallmatrix}\right\} \geqq -1$ auch für solche K. V. der Ordnung 0, die vom allgemeinen Typus II sind, gelingt dann schliesslich im Kapitel V, § 28, auf Grund zweier Eigenschaften der K. V. erster Ordnung $\{\beta_\nu\}$, die in Satz 7 bezw. Satz 18, Kapitel V, § 27, bewiesen werden:

erste Eigenschaft: Es ist immer $i\{\beta_\nu\} \geqq -2$.

zweite Eigenschaft: Es seien $\beta_{\nu'}$ und $\beta_{\nu''}$ zwei unmittelbar aufeinanderfolgende positive Nullstellen ungerader Ordnung von $f_{t,0}(\omega)$ derart, dass im Intervall $\beta_{\nu'} < \omega < \beta_{\nu''}$ höchstens Nullstellen gerader Ordnung, aber keine Nullstelle ungerader Ordnung von $f_{t,0}(\omega)$ gelegen sind; dann können die beiden Beziehungen

$$i\{\beta_{\nu'}\} = -2, \quad i\{\beta_{\nu''}\} = -2$$

nicht gleichzeitig bestehen.

BEWEIS EINER CARATHEODORYSCHEN VERMUTUNG.

VON

HANS LUDWIG HAMBURGER
in CAMBRIDGE, ENGLAND.

TEIL III.[1]

Inhalt von Teil III.

---

[1] Vgl. auch Teil I und Teil II dieser Arbeit mit dem gleichen Titel: Annals of Math.

Während wir uns in dem vorliegenden Teil III auf den Teil I nicht mehr berufen, enthält die Einleitung zu Teil II und der letzte Abschnitt in Kapitel II von Teil II, d. i. Abschnitt 66, eine Übersicht über die in Teil III behandelten Probleme.

Da der Teil III sich unmittelbar an den Teil II anschliesst, sind die Kapitel, Paragraphen und Abschnitte, ferner die Sätze, Hilfssätze und Definitionen in Teil II und Teil III durchgehend numeriert, sodass bei den Zitierungen aus Teil II nur der Paragraph angegeben wird, ohne dass ausdrücklich die Bemerkung »aus Teil II» hinzugefügt wird.

KAPITEL III.

Einführung des Enriquesschen Differentialoperators.

§ 13. Die Grundformeln für den Enriquesschen Operator.[1]

67. Es sei $\Phi(\sigma, \omega)$ eine analytische Funktion der beiden Veränderlichen σ und ω. Substituiert man für ω eine analytische Funktion $\omega(\sigma)$ und bezeichnet mit $\omega^{(\mu)}(\sigma)$, wie üblich, die μ-te Ableitung von $\omega(\sigma)$, so ist offenbar

$$\frac{d\,\Phi(\sigma, \omega(\sigma))}{d\,\sigma} = \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,\sigma} + \omega' \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,\omega} = \Phi_1(\sigma;\, \omega(\sigma), \omega'(\sigma)),$$

$$\frac{d^n\,\Phi(\sigma, \omega(\sigma))}{d\,\sigma^n} = \Phi_n(\sigma;\, \omega(\sigma), \omega'(\sigma), \ldots, \omega^{(n)}(\sigma)),$$

unter Φ_n einen passend konstruierten Ausdruck verstanden, und es ergibt sich weiter

$$(1) \qquad \frac{d^{n+1}\,\Phi(\sigma, \omega(\sigma))}{d\,\sigma^{n+1}} = \frac{\partial\,\Phi_n}{\partial\,\sigma} + \sum_{\nu=0}^{n} \omega^{(\nu+1)}(\sigma) \frac{\partial\,\Phi_n}{\partial\,\omega^{(\nu)}} = \Phi_{n+1}(\sigma;\, \omega(\sigma), \omega'(\sigma), \ldots, \omega^{(n+1)}(\sigma)).$$

Man setze nunmehr

$$(2) \qquad \omega_0 = \omega(\sigma), \quad \omega_\mu = \frac{\omega^{(\mu)}(\sigma)}{\mu!}$$

und führe die folgende Reihe von Differentialoperatoren ein:

---

[1] Dieser Paragraph enthält einen Bericht über den Inhalt von Band II, S. 459—469 des Werkes von F. ENRIQUES—O. CHISINI, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche.

$$(3)\quad \begin{cases} \Delta_0 = \dfrac{\partial}{\partial \sigma}, \\ \Delta_1 = \dfrac{\partial}{\partial \sigma} + \omega' \dfrac{\partial}{\partial \omega} = \dfrac{\partial}{\partial \sigma} + \omega_1 \dfrac{\partial}{\partial \omega}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta_n = \dfrac{\partial}{\partial \sigma} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} \omega^{(\nu)} \dfrac{\partial}{\partial \omega^{(\nu-1)}} = \dfrac{\partial}{\partial \sigma} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu\, \omega_\nu \dfrac{\partial}{\partial \omega_{\nu-1}}; \end{cases}$$

dann erhält man mit Rücksicht auf die Rekursionsformel (1)

$$\frac{d^n \Phi(\sigma, \omega(\sigma))}{d\sigma^n} = \Delta_n \Delta_{n-1} \dots \Delta_1 \Phi(\sigma, \omega(\sigma)).$$

Man überzeugt sich leicht, dass sich dieser Ausdruck auch in der Form

$$(4)\quad \frac{d^n \Phi(\sigma, \omega(\sigma))}{d\sigma^n} = \Delta_n^n \Phi(\sigma, \omega(\sigma))$$

schreiben lässt; denn ist μ eine ganze Zahl $< n$, und $\Phi_{\mu-1}$ ein Ausdruck, der nur von σ; $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{\mu-1}$, aber nicht mehr von $\omega_\mu, \omega_{\mu+1}, \dots, \omega_{n-1}$ abhängt, so ist offenbar mit Rücksicht auf die Definitionsgleichungen (3)

$$\Delta_n \Phi_{\mu-1}(\sigma; \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{\mu-1}) = \Delta_\mu \Phi_{\mu-1}(\sigma; \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{\mu-1}).$$

Aus dieser Formel folgt auch unmittelbar

$$(5)\quad \Delta_n^\mu \Phi = \Delta_\mu^\mu \Phi \text{ für } n \geqq \mu.$$

Endlich setze man noch

$$(6)\quad \begin{cases} \Delta_n^0 \Phi = \Delta_0^0 \Phi = \Phi(\sigma, \omega(\sigma)) \\ \Delta_0^n \Phi = \dfrac{\partial^n \Phi(\sigma, \omega)}{\partial \sigma^n} \Big/_{\omega = \omega(\sigma)} \end{cases}$$

68. Wir stellen jetzt die wichtigsten Formeln zusammen, die Herr Enriques l. c. entwickelt hat, um mit dem Differentialoperator Δ_μ bequem rechnen zu können. Sie werden für unsere weiteren Untersuchungen von grundlegender Bedeutung sein.

Durch Schluss von λ auf $\lambda + 1$ beweist man leicht[1], dass

[1] l. c. Fussnote S. 230, S. 462—463. Der Unterschied zwischen Formel (7) unseres Textes und der Enriquesschen Formel (III) auf S. 463 erklärt sich daraus, dass nach Formel (2) unseres Textes $\omega_\nu = \dfrac{y_\nu}{\nu!}$ ist, wenn wie bei Enriques $y_\nu = \dfrac{d^\nu y}{dx^\nu}$ gesetzt wird.

$$(7)\qquad \frac{\partial}{\partial \omega_\lambda} \frac{\Delta_\mu^n \Phi}{n!} = \frac{\Delta_\mu^{n-\lambda} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \omega}}{(n-\lambda)!} \qquad (n \geqq \mu \geqq \lambda),$$

und hieraus folgt, indem man Formel (7) $\varkappa$-mal hintereinander anwendet,

$$(8)\qquad \frac{\partial^\varkappa}{\partial \omega_\lambda^\varkappa} \frac{\Delta_\mu^n \Phi}{n!} = \begin{cases} \dfrac{\Delta_\mu^{n-\varkappa\lambda} \dfrac{\partial^\varkappa \Phi}{\partial \omega^\varkappa}}{(n-\varkappa\lambda)!} & \text{für } n - \varkappa\lambda \geqq 0 \\ 0 & \text{für } n - \varkappa\lambda < 0. \end{cases}$$

Nach einigen weiteren Rechnungen[1] ergibt sich für $0 \leqq \lambda \leqq \mu - 1$ die fundamentale Entwicklungsformel

$$(9)\qquad \frac{\Delta_\mu^n \Phi}{n!} = \sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\mu-\lambda}} \frac{\partial^\varkappa}{\partial \omega_\lambda^\varkappa} \frac{\Delta_\lambda^h \Phi}{h!} \frac{\omega_{\lambda+1}^{\varkappa_1}}{\varkappa_1!} \frac{\omega_{\lambda+2}^{\varkappa_2}}{\varkappa_2!} \cdots \frac{\omega_\mu^{\varkappa_{\mu-\lambda}}}{\varkappa_{\mu-\lambda}!}.$$

Hierbei ist gesetzt

$$(10)\qquad \varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_{\mu-\lambda}, \quad h = n - (\varkappa_1 + 2\varkappa_2 + \cdots + (\mu-\lambda)\varkappa_{\mu-\lambda})$$

ausserdem ist die Summation auf der rechten Seite von (9) über alle diejenigen Wertesysteme $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\mu-\lambda}$ zu erstrecken, für die $h \geqq 0$ wird.

Speziell folgt aus (9), indem man $\lambda = \mu - 1$ setzt[2],

$$(11)\qquad \frac{\Delta_\mu^n \Phi}{n!} = \sum_{\varkappa=0}^{n} \frac{\partial^\varkappa}{\partial \omega_{\mu-1}^\varkappa} \frac{\Delta_{\mu-1}^{n-\varkappa} \Phi}{(n-\varkappa)!} \frac{\omega_\mu^\varkappa}{\varkappa!}$$

und hieraus ergibt sich weiter, indem man ι-mal nach ω_μ differentiiert,

$$(12)\qquad \frac{\partial^\iota}{\partial \omega_\mu^\iota} \frac{\Delta_\mu^n \Phi}{n!} = \sum_{\varkappa=\iota}^{n} \frac{\partial^\varkappa}{\partial \omega_{\mu-1}^\varkappa} \frac{\Delta_{\mu-1}^{n-\varkappa} \Phi}{(n-\varkappa)!} \frac{\omega_\mu^{\varkappa-\iota}}{(\varkappa-\iota)!}.$$

Setzt man andererseits in (9) $\lambda = 0$ und berücksichtigt die Definitionsgleichungen (6), so erhält man[3]

---

[1] l. c. Fussnote S. 230, S. 464—468, vgl. insbesondere Formel VI, S. 468.

[2] l. c. Formel V, S. 465.

[3] l. c. Formel VII, S. 469. Eine (13) sehr ähnliche Formel ist bereits angegeben bei S. F. Lacroix, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. 2. Aufl. (1810), Bd. I, S. 315—326, Bd. III, S. 629. Eine besonders durchsichtige Ableitung der Lacroixschen Formel findet sich in einer Arbeit von U. Amaldi, Forme isobariche e cambiamenti di variabile. Giorn. di Mat. di Battaglini 3ª serie, Bd. 56 (1918), S. 1—41. Siehe insbesondere S. 12—14. Vgl. auch dort die ausführlichen Litteraturangaben S. 13, Fussnote 17.

$$\frac{\Delta_\mu^n \Phi}{n!} = \sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\mu} \frac{1}{h!} \frac{\partial^{h+\varkappa} \Phi}{\partial \sigma^h \partial \omega^\varkappa} \frac{\omega_1^{\varkappa_1}}{\varkappa_1!} \frac{\omega_2^{\varkappa_2}}{\varkappa_2!} \cdots \frac{\omega_\mu^{\varkappa_\mu}}{\varkappa_\mu!}, \tag{13}$$

wobei wieder $\varkappa$ und h durch die Gleichungen (10) bestimmt sind.

§ 14. Der Enriquessche Operator und die Koeffizienten der Puiseuxschen Entwicklungen.[1]

69. Die Funktion $\Phi(\sigma, \omega)$ möge sich als ein Produkt von der Gestalt

$$\Phi(\sigma, \omega) = \prod_{\nu=1}^{k} (\omega - \Omega_\nu(\sigma)) \cdot \Phi^*(\sigma, \omega) \tag{14}$$

darstellen lassen. Hierbei seien die $\Omega_\nu(\sigma)$ beliebige, in einem gewissen Bereich $0 \leqq |\sigma| \leqq \delta$ konvergente Potenzreihen mit reellen oder komplexen Koeffizienten:

$$\Omega_\nu(\sigma) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_{\nu,\mu} \sigma^\mu, \quad \alpha_{\nu,0} \neq 0 \tag{15}$$

und $\Phi^*(\sigma, \omega)$ sei eine im Bereich $0 \leqq |\sigma| \leqq \delta$, $|\omega| < \infty$ reguläre analytische Funktion derart, dass $\Phi^*(0, \omega)$ für keinen von Null verschiedenen reellen oder komplexen Wert von ω verschwindet. Die Produktdarstellung (14) für $\Phi(\sigma, \omega)$ besagt aber nichts anderes, als dass die zur Gleichung $\Phi(\sigma, \omega) = 0$ gehörigen Puiseuxschen Entwicklungen gewöhnliche Potenzreihen sind. Man bemerkt leicht, dass die in Formel (44) und (46), § 2, eingeführten Funktionen $\Phi_t(\sigma, \omega)$ die von $\Phi(\sigma, \omega)$ verlangten Zerlegungseigenschaften haben.

Unter den Kurven $\omega = \Omega_\nu(\sigma)$ greifen wir eine bestimmte Kurve $\omega = \Omega_{\overset{\circ}{\nu}}(\sigma)$ heraus. Dann verstehen wir in diesem Paragraphen unter dem K. V. $[\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}]$ die Gesamtheit derjenigen (reellen oder komplexen) Kurven $\omega = \Omega_\nu(\sigma)$, welche mit $\Omega_{\overset{\circ}{\nu}}(\sigma)$ in den $\mu + 1$ ersten Koeffizienten $\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},1}, \ldots, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}$ übereinstimmen; die Mächtigkeit des K. V. $[\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}]$, d. i. die Anzahl der in $[\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}]$ enthaltenen Kurven, jede ihrem Vielfachheitsgrad entsprechend gezählt, werde gleich r_μ gesetzt. Offenbar ist dann $r_0 \geqq r_1 \geqq \cdots \geqq r_\mu \geqq \cdots$. Zum Unterschied von den in den Definitionen II und III des § 4 auftretenden K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}\}$ werden somit hier auch die komplexen Potenzreihen mit berücksichtigt.

[1] Dieser Paragraph enthält einen Bericht von ENRIQUES, l. c., S. 469—474.

70. Es gelingt nun Herrn Enriques l. c. mit Hilfe des im vorigen Paragraphen eingeführten Differentialoperators Δ_μ alle Gleichungen aufzustellen, welchen die Koeffizienten $\alpha_{\nu,\mu}$ der Potenzreihen (15) genügen müssen.

Wir formulieren den Satz von Enriques zunächst für $\mu = 0$.[1]

Ist der K. V. $[\alpha^\circ_{\bar{\nu},0}]$ von der Mächtigkeit r_0, so ist $\alpha^\circ_{\bar{\nu},0}$ eine Wurzel der Ordnung $r_0 - n$ einer jeden der r_0 Gleichungen in ω

$$\Delta_0^n \Phi\Big/_{\sigma=0} = \frac{\partial^n \Phi(\sigma, \omega)}{\partial \sigma^n}\Bigg/_{\sigma=0} = 0 \text{ für } n = 0, 1, \ldots, r_0 - 1.$$

Es ist mithin

$$\frac{\partial^{n+\varkappa} \Phi(\sigma, \omega)}{\partial \sigma^n \partial \omega^\varkappa}\Bigg/_{\substack{\sigma=0\\ \omega=\alpha^\circ_{\bar{\nu},0}}} = 0 \text{ für } n + \varkappa \leqq r_0 - 1. \tag{16}$$

Hingegen ist immer

$$\frac{\partial^{r_0} \Phi(\sigma, \omega)}{\partial \omega^{r_0}}\Bigg/_{\substack{\sigma=0\\ \omega=\alpha^\circ_{\bar{\nu},0}}} \neq 0.$$

Aus (13) § 13 folgt in Verbindung mit Formel (16), wenn man berücksichtigt, dass dort wegen (10), § 13, immer $h + \varkappa \leqq n$ ist, für $0 \leqq n \leqq r_0 - 1$ und für beliebiges μ

$$\Delta_\mu^n \Phi\Bigg/_{\substack{\sigma=0\\ \omega=\alpha^\circ_{\bar{\nu},0}}} \equiv 0 \text{ identisch in } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\mu.$$

71. Um den Enriquesschen Satz für allgemeine Koeffizienten $\alpha^\circ_{\bar{\nu},\mu}$ zu formulieren, setzen wir

$$n_0 = 0, \quad n_1 = r_0, \quad n_\mu = \sum_{\lambda=0}^{\mu-1} r_\lambda \tag{17}$$

unter r_λ wieder wie in Abschnitt 69. die Mächtigkeit des K. V. $[\alpha^\circ_{\bar{\nu},\lambda}]$ verstanden.

Ausserdem benutzen wir im folgenden durchgehend eine weitere abkürzende Bezeichnungsweise:

Es sei $F = F(\sigma; \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\mu)$ eine Funktion von $\mu + 2$ Veränderlichen. Dann schreibe man kurz

$$[F]_\nu \text{ für } F(0; \alpha_{\nu,0}, \alpha_{\nu,1}, \ldots, \alpha_{\nu,\mu}), \tag{18}$$

ferner, wenn $0 \leqq \lambda \leqq \mu$

$$[F]_{\nu,\lambda}(\omega_{\lambda+1}, \omega_{\lambda+2}, \ldots, \omega_\mu) \text{ oder auch einfach } [F]_{\nu,\lambda} \tag{19}$$

$$\text{für } F(0; \alpha_{\nu,0}, \alpha_{\nu,1}, \ldots, \alpha_{\nu,\lambda}, \omega_{\lambda+1}, \omega_{\lambda+2}, \ldots, \omega_\mu).$$

[1] Vgl. Enriques, l. c., S. 470.

72. Dies vorausgeschickt, lautet der

Satz von Enriques.[1] *Es ist* $\alpha^{\circ}_{\nu,\mu}$ *eine Wurzel der Ordnung* $r_\mu - \varkappa$ *einer jeden der* r_μ *Gleichungen in* ω_μ

$$(20)\qquad \left[\Delta_{\mu}^{n_\mu+\varkappa}\Phi\right]_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}(\omega_\mu)=0 \text{ für } 0\leqq\varkappa\leqq r_\mu-1;$$

oder anders formuliert: Es ist

$$(21)\qquad \left[\frac{\partial^{\varkappa}}{\partial\,\omega_{\mu}^{\varkappa}}\Delta_{\mu}^{n}\Phi\right]_{\overset{\circ}{\nu}}=0 \text{ für } n+\varkappa\leqq n_{\mu+1}-1,$$

und zwar gilt Gleichung (21), *auch wenn* $n\leqq n_\mu-1$ *ist, sie besagt mithin noch mehr als die Gleichungen* (20).

Andererseits ist immer

$$(22)\qquad \left[\frac{\partial^{r_\mu}}{\partial\,\omega_{\mu}^{r_\mu}}\Delta_{\mu}^{n_\mu}\Phi\right]_{\overset{\circ}{\nu}}\neq 0.$$

Suchen wir jetzt $\Delta_{\mu+\lambda}^{n}\Phi$ als Funktion von $\omega_{\mu+1}, \omega_{\mu+2}, \ldots, \omega_{\mu+\lambda}$ zu bestimmen, während $\sigma=0$, $\omega_0=\alpha^{\circ}_{\nu,0}$, $\omega_1=\alpha^{\circ}_{\nu,1}, \ldots, \omega_\mu=\alpha^{\circ}_{\nu,\mu}$ gesetzt ist, so ergibt sich aus (9) und (10), § 13,

$$\left[\frac{\Delta_{\mu+\lambda}^{n}\Phi}{n!}\right]_{\overset{\circ}{\nu},\mu}=\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_\lambda}\left[\frac{\partial^{\varkappa}}{\partial\,\omega_{\mu}^{\varkappa}}\frac{\Delta_{\mu}^{h}\Phi}{h!}\right]_{\overset{\circ}{\nu}}\frac{\omega_{\mu+1}^{\varkappa_1}}{\varkappa_1!}\frac{\omega_{\mu+2}^{\varkappa_2}}{\varkappa_2!}\cdots\frac{\omega_{\mu+\lambda}^{\varkappa_\lambda}}{\varkappa_\lambda!}.$$

Ist jetzt $n\leqq n_{\mu+1}-1$, *so folgt aus* (21), da andererseits wegen (10), § 13, $h+\varkappa\leqq n\leqq n_{\mu+1}-1$ ist,

$$(23)\qquad [\Delta_{\mu+\lambda}^{n}\Phi]_{\overset{\circ}{\nu},\mu}\equiv 0 \text{ identisch in } \omega_{\mu+1}, \omega_{\mu+2}, \ldots, \omega_{\mu+\lambda} \text{ für } 0\leqq n\leqq n_{\mu+1}-1.$$

73. Wir wenden nunmehr die Formel (9), § 13, noch einmal auf den Ausdruck $\left[\Delta_{\mu+\lambda}^{n_\mu}\Phi\right]_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}$ an, den wir als Funktion von $\omega_\mu, \omega_{\mu+1}, \ldots, \omega_{\mu+\lambda}$ darzustellen versuchen.

Es ist

$$(24)\qquad \frac{\left[\Delta_{\mu+\lambda}^{n_\mu}\Phi\right]_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}}{n_\mu!}=\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{\lambda+1}}\left[\frac{\partial^{\varkappa}}{\partial\,\omega_{\mu-1}^{\varkappa}}\frac{\Delta_{\mu-1}^{h}\Phi}{h!}\right]_{\overset{\circ}{\nu}}\frac{\omega_{\mu}^{\varkappa_1}}{\varkappa_1!}\frac{\omega_{\mu+1}^{\varkappa_2}}{\varkappa_2!}\cdots\frac{\omega_{\mu+\lambda}^{\varkappa_{\lambda+1}}}{\varkappa_{\lambda+1}!}.$$

[1] Vgl. Enriques, l. c., S. 473—474.

Nun folgt aber aus (10), § 13

$$h + \varkappa \leqq n_\mu - (\varkappa_2 + \varkappa_3 + \cdots + \varkappa_{\lambda+1}); \tag{25}$$

andererseits ist wegen (21)

$$\left[\frac{\partial^\varkappa}{\partial \omega_{\mu-1}^\varkappa} \Delta_{\mu-1}^h \Phi\right]_{\overset{\circ}{\nu}} = 0 \text{ für } h + \varkappa \leqq n_\mu - 1,$$

mithin sind in der Summe rechter Hand von (24) wegen (25) nur alle diejenigen Glieder von Null verschieden, deren Exponenten $\varkappa_2, \varkappa_3, \ldots, \varkappa_{\lambda+1}$ sämtlich verschwinden, und es ergibt sich aus (24) in Verbindung mit Formel (10), § 13,

$$\frac{\left[\Delta_{\mu+\lambda}^{n_\mu} \Phi\right]_{\overset{\circ}{\nu}, \mu-1}}{n_\mu!} \equiv \sum_{\varkappa=0}^{n_\mu} \left[\frac{\partial^\varkappa}{\partial \omega_{\mu-1}^\varkappa} \frac{\Delta_{\mu-1}^{n_\mu-\varkappa} \Phi}{(n_\mu - \varkappa)!}\right]_{\overset{\circ}{\nu}} \frac{\omega_\mu^\varkappa}{\varkappa!} \tag{26}$$

identisch in $\omega_\mu, \omega_{\mu+1}, \ldots, \omega_{\mu+\lambda}$.

Ausserdem verschwinden aber die Ausdrücke $[\Delta_{\mu-1}^n \Phi]_{\overset{\circ}{\nu}, \mu-2}$ für $0 \leqq n \leqq n_{\mu-1} - 1$ mit Rücksicht auf (23) identisch in $\omega_{\mu-1}$, und somit verschwinden die Glieder der Summe rechter Hand von (26) für $n_\mu - \varkappa \leqq n_{\mu-1} - 1$, d. h. wegen (17) für $\varkappa \geqq r_{\mu-1} + 1$.

Mithin erhält man schliesslich aus (26) die Beziehung

$$\frac{\left[\Delta_{\mu+\lambda}^{n_\mu} \Phi\right]_{\overset{\circ}{\nu}, \mu-1}}{n_\mu!} \equiv \frac{\left[\Delta_{\mu}^{n_\mu} \Phi\right]_{\overset{\circ}{\nu}, \mu-1}(\omega_\mu)}{n_\mu!} \equiv \sum_{\varkappa=0}^{r_{\mu-1}} \left[\frac{\partial^\varkappa}{\partial \omega_{\mu-1}^\varkappa} \frac{\Delta_{\mu-1}^{n_\mu-\varkappa} \Phi}{(n_\mu - \varkappa)!}\right]_{\overset{\circ}{\nu}} \frac{\omega_\mu^\varkappa}{\varkappa!} \tag{27}$$

identisch in $\omega_\mu, \omega_{\mu+1}, \ldots, \omega_{\mu+\lambda}$. D. h. aber: es wird $\left[\Delta_{\mu+\lambda}^{n_\mu} \Phi\right]_{\overset{\circ}{\nu}, \mu-1}$ gleich einem Polynom in ω_μ vom Grade $r_{\mu-1}$, und hängt gar nicht mehr von $\omega_{\mu+1}, \omega_{\mu+2}, \ldots \omega_{\mu+\lambda}$ ab.

Der Koeffizient des Gliedes vom höchsten Grade $r_{\mu-1}$ ist hierbei wegen (22) gleich

$$\frac{1}{r_{\mu-1}!} \left[\frac{\partial^{r_{\mu-1}}}{\partial \omega_{\mu-1}^{r_{\mu-1}}} \frac{\Delta_{\mu-1}^{n_{\mu-1}} \Phi}{n_{\mu-1}!}\right]_{\overset{\circ}{\nu}} \neq 0.$$

Sind $\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, 0}, \alpha_{\overset{\circ}{\nu}, 1}, \ldots, \alpha_{\overset{\circ}{\nu}, \mu-1}$ bereits bekannt, so lässt sich der Koeffizient $\alpha_{\nu, \mu}$ einer beliebigen Potenzreihe $\Omega_\nu(\sigma)$, die zum K. V. $[\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, \mu-1}]$ gehört, bestimmen, indem man den Ausdruck (27) gleich Null setzt.

§ 15. Beziehungen zwischen den Ausdrücken $\Delta_\mu^n \Phi_t$ und $\Delta_\mu^n \varphi_t$.

74. Es seien $\Phi_t(\sigma, \omega)$ und $\varphi_t(\sigma, \omega)$ die in § 2 Formel (44) und (43) eingeführten Potenzreihen. Ausserdem setze man ein für alle Mal zur Abkürzung

$$\varphi_t' = \frac{\partial \varphi_t(\sigma, \omega)}{\partial \omega}, \quad \varphi_t^{-1} = \int_0^\omega \varphi_t(\sigma, \omega)\, d\omega, \quad f_{t,0}^{-1}(\omega) = \int_0^\omega f_{t,0}(\omega)\, d\omega. \tag{28}$$

Man substituiere jetzt in $\Phi_t(\sigma, \omega)$ und $\varphi_t(\sigma, \omega)$

$$\omega = \omega(\sigma) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \omega_\mu \sigma^\mu, \tag{29}$$

wobei die ω_μ zunächst unbestimmte Koeffizienten sind. Dann wird

$$\frac{\omega^{(\mu)}(\sigma)}{\mu!}\Big/_{\sigma=0} = \omega_\mu.$$

Hilfssatz 2. *Für $\sigma = 0$ ist identisch in $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\mu$*

$$q\frac{\Delta_\mu^n \Phi_t}{n!} = (l_t + n)\frac{\Delta_\mu^n \varphi_t}{n!} - \sum_{\lambda=0}^{\mu} (p_t + \lambda)\, \omega_\lambda \frac{\partial}{\partial \omega_\lambda} \frac{\Delta_\mu^n \varphi_t}{n!}. \tag{30}$$

Beweis: Für $\mu = 0$ führt die Behauptung (30) auf die Gleichungen (41), § 2; denn nach den Definitionsgleichungen (6), § 13, ist

$$\frac{\Delta_0^n \Phi_t/_{\sigma=0}}{n!} = F_{t,n}(\omega_0), \quad \frac{\Delta_0^n \varphi_t/_{\sigma=0}}{n!} = f_{t,n}(\omega_0).$$

Nunmehr nehmen wir an, dass die Relation (30) bereits für ein festes μ bewiesen sei. Um unter dieser Annahme Gleichung (30) auch für $\mu + 1$ zu beweisen, gehen wir von der Darstellung (11), § 13, aus:

$$\begin{aligned} q\frac{\Delta_{\mu+1}^n \Phi_t/_{\sigma=0}}{n!} &= q\sum_{\varkappa=0}^{n} \frac{\partial^\varkappa}{\partial \omega_\mu^\varkappa} \frac{\Delta_\mu^{n-\varkappa} \Phi_t/_{\sigma=0}}{(n-\varkappa)!} \frac{\omega_{\mu+1}^\varkappa}{\varkappa!} \\ &= \sum_{\varkappa=0}^{n} \frac{\partial^\varkappa}{\partial \omega_\mu^\varkappa}\left((l_t + n - \varkappa) - \sum_{\lambda=0}^{\mu} (p_t + \lambda)\, \omega_\lambda \frac{\partial}{\partial \omega_\lambda}\right) \frac{\Delta_\mu^{n-\varkappa} \varphi_t/_{\sigma=0}}{(n-\varkappa)!} \frac{\omega_{\mu+1}^\varkappa}{\varkappa!} \end{aligned} \tag{31}$$

$$(31)\quad = \sum_{\varkappa=0}^{n}\Bigg((l_t+n)\frac{\omega_{\mu+1}^{\varkappa}}{\varkappa!}\frac{\partial^{\varkappa}}{\partial\omega_{\mu}^{\varkappa}} - \varkappa\frac{\omega_{\mu+1}^{\varkappa}}{\varkappa!}\frac{\partial^{\varkappa}}{\partial\omega_{\mu}^{\varkappa}} - (p_t+\mu)\varkappa\frac{\omega_{\mu+1}^{\varkappa}}{\varkappa!}\frac{\partial^{\varkappa}}{\partial\omega_{\mu}^{\varkappa}}$$

$$-\frac{\omega_{\mu+1}^{\varkappa}}{\varkappa!}\sum_{\lambda=0}^{\mu}(p_t+\lambda)\,\omega_\lambda\frac{\partial^{\varkappa+1}}{\partial\omega_\lambda\,\partial\omega_\mu^{\varkappa}}\Bigg)\frac{\Delta_\mu^{n-\varkappa}\,\varphi_t/_{\sigma=0}}{(n-\varkappa)!}$$

$$=(l_t+n)\sum_{\varkappa=0}^{n}\frac{\partial^{\varkappa}}{\partial\omega_\mu^{\varkappa}}\frac{\Delta_\mu^{n-\varkappa}\,\varphi_t/_{\sigma=0}}{(n-\varkappa)!}\frac{\omega_{\mu+1}^{\varkappa}}{\varkappa!} - (p_t+\mu+1)\,\omega_{\mu+1}\sum_{\varkappa=1}^{n}\frac{\partial^{\varkappa}}{\partial\omega_\mu^{\varkappa}}\frac{\Delta_\mu^{n-\varkappa}\,\varphi_t/_{\sigma=0}}{(n-\varkappa)!}\frac{\omega_{\mu+1}^{\varkappa-1}}{(\varkappa-1)!}$$

$$-\sum_{\lambda=0}^{\mu}(p_t+\lambda)\,\omega_\lambda\frac{\partial}{\partial\omega_\lambda}\sum_{\varkappa=0}^{n}\frac{\partial^{\varkappa}}{\partial\omega_\mu^{\varkappa}}\frac{\Delta_\mu^{n-\varkappa}\,\varphi_t/_{\sigma=0}}{(n-\varkappa)!}\frac{\omega_{\mu+1}^{\varkappa}}{\varkappa!}.$$

Berücksichtigt man noch, dass nach Formel (12), § 13,

$$\frac{\partial}{\partial\omega_{\mu+1}}\frac{\Delta_{\mu+1}^{n}\varphi_t}{n!} = \sum_{\varkappa=1}^{n}\frac{\partial^{\varkappa}}{\partial\omega_\mu^{\varkappa}}\frac{\Delta_\mu^{n-\varkappa}\varphi_t}{(n-\varkappa)!}\frac{\omega_{\mu+1}^{\varkappa-1}}{(\varkappa-1)!}$$

ist, so folgt aus (31) in Verbindung mit (11), § 13

$$q\frac{\Delta_{\mu+1}^{n}\,\Phi_t/_{\sigma=0}}{n!} = (l_t+n)\frac{\Delta_{\mu+1}^{n}\,\varphi_t/_{\sigma=0}}{n!} - \sum_{\lambda=0}^{\mu+1}(p_t+\lambda)\,\omega_\lambda\frac{\partial}{\partial\omega_\lambda}\frac{\Delta_{\mu+1}^{n}\,\varphi_t/_{\sigma=0}}{n!}.$$

Damit ist die Behauptung (30) vollständig bewiesen.

75. Die Beziehung (30) formen wir um, indem wir auf $\dfrac{\partial}{\partial\omega_\lambda}\dfrac{\Delta_\mu^n\varphi_t}{n!}$ Formel (7) aus § 13 anwenden, und erhalten so schliesslich (vgl. auch die abkürzende Bezeichnung (28))

$$(32)\qquad q\frac{\Delta_\mu^{n}\,\Phi_t/_{\sigma=0}}{n!} = (l_t+n)\frac{\Delta_\mu^{n}\,\varphi_t/_{\sigma=0}}{n!} - \sum_{\lambda=0}^{\mu}(p_t+\lambda)\,\omega_\lambda\frac{\Delta_\mu^{n-\lambda}\,\varphi_t'/_{\sigma=0}}{(n-\lambda)!}$$

identisch in $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\mu$.

Endlich ergibt sich nach leichter Rechnung aus (32) für alle $\varkappa \geqq 1$

$$(33)\qquad q\frac{\partial^{\varkappa}}{\partial\omega_\mu^{\varkappa}}\frac{\Delta_\mu^{n}\,\Phi_t/_{\sigma=0}}{n!} = (l_t+n-\varkappa(p_t+\mu))\frac{\partial^{\varkappa-1}}{\partial\omega_\mu^{\varkappa-1}}\frac{\Delta_\mu^{n-\mu}\,\varphi_t'/_{\sigma=0}}{(n-\mu)!}$$

$$-\sum_{\lambda=0}^{\mu}(p_t+\lambda)\,\omega_\lambda\frac{\partial^{\varkappa}}{\partial\omega_\mu^{\varkappa}}\frac{\Delta_\mu^{n-\lambda}\,\varphi_t'/_{\sigma=0}}{(n-\lambda)!}.$$

76. Durch wiederholte Anwendung von (32) gelangen wir zu einer neuen Relation, die für die Untersuchungen des folgenden Kapitels von grundlegender Bedeutung ist.

Hilfssatz 3: *Durch ein System von Rekursionsformeln führen wir ein System rationaler Funktionen der Veränderlichen* $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\mu$ *ein, indem wir setzen*

$$a^\mu_{0,\varkappa} = \begin{cases} -\dfrac{(p_t+\varkappa)\,\omega_\varkappa}{p_t\,\omega_0} & \textit{für } 1 \leqq \varkappa \leqq \mu \\ 0 & \textit{für } \varkappa \geqq \mu + 1, \end{cases} \tag{34}$$

$$a^\mu_{\lambda+1,\varkappa} = \begin{cases} a^\mu_{\lambda,\varkappa+1} - \dfrac{(p_t+\varkappa)\,\omega_\varkappa}{p_t\,\omega_0}\, a^\mu_{\lambda,1} & \textit{für } 1 \leqq \varkappa \leqq \mu \\ 0 & \textit{für } \varkappa \geqq \mu + 1. \end{cases} \tag{35}$$

Durch diese Beziehungen sind die Funktionen $a^\mu_{\lambda,\varkappa}$ *für alle* $\mu \geqq 1$, $\varkappa \geqq 1$, $\lambda \geqq 0$ *bestimmt.* Weitere Eigenschaften dieser Funktionen werden in Hilfssatz 4 dieses Paragraphen zusammengestellt.

Ferner setze man

$$b^\mu_{n,0} = \frac{l_t + n}{p_t\,\omega_0}, \quad b^\mu_{n,\varkappa} = \frac{l_t + n - \varkappa}{p_t\,\omega_0}\, a^\mu_{\varkappa-1,1}. \tag{36}$$

Dann ist, wenn man wieder für ω *die Potenzreihe* (29) *substituiert, identisch in* $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\mu$ *für* $0 \leqq \lambda \leqq n$

$$\frac{\Delta^n_\mu \varphi'_t/_{\sigma=0}}{n!} + \frac{q}{p_t\,\omega_0}\left(\frac{\Delta^n_\mu \Phi_t/_{\sigma=0}}{n!} + \sum_{\varkappa=1}^{\lambda} a^\mu_{\varkappa-1,1}\,\frac{\Delta^{n-\varkappa}_\mu \Phi_t/_{\sigma=0}}{(n-\varkappa)!}\right)$$
$$= \sum_{\varkappa=0}^{\lambda} b^\mu_{n,\varkappa}\,\frac{\Delta^{n-\varkappa}_\mu \varphi'_t/_{\sigma=0}}{(n-\varkappa)!} + \sum_{\varkappa=1}^{\mu} a^\mu_{\lambda,\varkappa}\,\frac{\Delta^{n-\lambda-\varkappa}_\mu \varphi'_t/_{\sigma=0}}{(n-\lambda-\varkappa)!}. \tag{37}$$

Hierbei ist $\Delta^{n-\lambda-\varkappa}_\mu \varphi'_t = 0$ zu setzen, wenn $n - \lambda - \varkappa < 0$ wird.

Mithin erhält man aus (37) für $\lambda = n$

$$\frac{\Delta^n_\mu \varphi'_t/_{\sigma=0}}{n!} + \frac{q}{p_t\,\omega_0}\left(\frac{\Delta^n_\mu \Phi_t/_{\sigma=0}}{n!} + \sum_{\varkappa=1}^{n} a^\mu_{\varkappa-1,1}\,\frac{\Delta^{n-\varkappa}_\mu \Phi_t/_{\sigma=0}}{(n-\varkappa)!}\right) = \sum_{\varkappa=0}^{n} b^\mu_{n,\varkappa}\,\frac{\Delta^{n-\varkappa}_\mu \varphi'_t/_{\sigma=0}}{(n-\varkappa)!}. \tag{38}$$

In dieser Beziehung kann bei dem Operator $\Delta^{n-\varkappa}_\mu$ nach Formel (5), § 13, μ durch $n - \varkappa$ ersetzt werden, wenn $n - \varkappa \leqq \mu$ ist.

Beweis: Für $\lambda = 0$ stimmt die Behauptung (37) mit Gleichung (32) wegen (34) und (36) überein. Unter der Annahme, dass Formel (37) für ein festes λ bereits bewiesen ist, addieren wir zu (37) die aus (32) folgende Gleichung

$$\frac{q}{p_t\,\omega_0}\, a^{\mu}_{\lambda,1} \frac{\Delta^{n-\lambda-1}_{\mu}\, \Phi_t/_{\sigma=0}}{(n-\lambda-1)!} = \frac{a^{\mu}_{\lambda,1}}{p_t\,\omega_0}\left((l_t + n - \lambda - 1)\frac{\Delta^{n-\lambda-1}_{\mu}\, \varphi_t/_{\sigma=0}}{(n-\lambda-1)!} - \sum_{\varkappa=0}^{\mu} (p_t + \varkappa)\,\omega_\varkappa \frac{\Delta^{n-\lambda-1-\varkappa}_{\mu}\, \varphi'_t/_{\sigma=0}}{(n-\lambda-1-\varkappa)!}\right)$$

$$= b^{\mu}_{n,\lambda+1} \frac{\Delta^{n-\lambda-1}_{\mu}\, \varphi_t/_{\sigma=0}}{(n-\lambda-1)!} - a^{\mu}_{\lambda,1} \frac{\Delta^{n-\lambda-1}_{\mu}\, \varphi'_t/_{\sigma=0}}{(n-\lambda-1)!} + \sum_{\varkappa=1}^{\mu} (a^{\mu}_{\lambda+1,\varkappa} - a^{\mu}_{\lambda,\varkappa+1}) \frac{\Delta^{n-\lambda-1-\varkappa}_{\mu}\, \varphi'_t/_{\sigma=0}}{(n-\lambda-1-\varkappa)!}$$

wegen (35) und (36). Nach Ausführung der Addition erkennt man unmittelbar, dass die Gleichung (37) auch für $\lambda + 1$ richtig ist, und damit ist Hilfssatz 3 vollständig bewiesen.

77. **Hilfssatz 4:** *Das durch die Gleichungen* (34), (35) *und* (36) *definierte System der Funktionen* $a^{\mu}_{\lambda,\varkappa}$ *und* $b^{\mu}_{\lambda,\varkappa}$ *hat die beiden Eigenschaften:*

1. *Ist* $\lambda + \varkappa \leqq \mu$, *so hängt* $a^{\mu}_{\lambda,\varkappa}$ *nur von* $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{\varkappa+\lambda}$ *ab, und es ist für jedes* $\mu \geqq \varkappa + \lambda$

(39) $$a^{\mu}_{\lambda,\varkappa} \equiv a^{\varkappa+\lambda}_{\lambda,\varkappa} \text{ identisch in } \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{\varkappa+\lambda}.$$

2. *Es ist*

(40) $$a^{\mu}_{\lambda,\mu-\varkappa} = -\frac{(p_t + \mu)\,\omega_\mu}{p_t\,\omega_0} + [\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{\mu-1}]$$

(41) $$b^{\mu}_{n,\varkappa} = -\frac{(l_t + n - \varkappa)(p_t + \varkappa)}{p_t^2\,\omega_0^2}\,\omega_\varkappa + [\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{\varkappa-1}] \text{ für } 1 \leqq \varkappa \leqq \mu$$

unter $[\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{\mu-1}]$ *einen Ausdruck verstanden, der nur von* $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{\mu-1}$, *aber nicht mehr von* ω_μ *abhängt.*

Beweis der Eigenschaft 1. Die Richtigkeit der Behauptung folgt unmittelbar aus (34) für $\lambda = 0$, $1 \leqq \varkappa \leqq \mu$. Unter der Annahme, dass die Eigenschaft 1. für ein festes λ und $1 \leqq \varkappa \leqq \mu - \lambda$ bereits bewiesen ist, schliesst man aus der Rekursionsformel (35), dass diese Eigenschaft auch der Funktion $a^{\mu}_{\lambda+1,\varkappa-1}$ $(1 \leqq \varkappa \leqq \mu - \lambda)$ zukommt.

Beweis der Eigenschaft 2. Nach (34) ist die Behauptung (40) für $\varkappa = 0$ sicher richtig. Ist (40) bereits für ein festes $\varkappa$ bewiesen, so folgt aus der Rekursionsformel (35) die Richtigkeit von (40) auch für $\varkappa + 1$ wenn $\varkappa + 1 \leqq \mu - 1$ ist. Damit ist Formel (40) bewiesen.

Andererseits ist nach der Definitionsgleichung (36)

$$b^{\mu}_{n,\varkappa} = \frac{l_t + n - \varkappa}{p_t\, \omega_0} a^{\mu}_{\varkappa-1,1} = \frac{l_t + n - \varkappa}{p_t\, \omega_0} a^{\varkappa}_{\varkappa-1,1} \text{ für } \varkappa \leqq \mu \text{ wegen (39)}$$

und nunmehr folgt die Behauptung (41) aus (40). Damit ist Hilfssatz 4 vollständig bewiesen.

§ 16. Beziehung zwischen den Ausdrücken $\Delta^n_\mu \psi_t$ und $\Delta^n_\mu \varphi_t$.

78. Es sei $\psi_t(\sigma, \omega)$ die in Formel (53), § 3, eingeführte Potenzreihe. Um die Beziehungen zwischen den Ausdrücken $\Delta^n_\mu \psi_t$ und $\Delta^n_\mu \varphi_t$ aufstellen zu können, führen wir ein System von Konstanten ein. Wir setzen

$$c_n = (l_t + p_t + n)^2 - q^2 \tag{42}$$

$$c_{n,\mu} = 2\,(p_t + \mu)(l_t + n - \mu) + (p_t + \mu)^2 \tag{43}$$

(vgl. die Formeln (56), § 3, wo bereits c_n und $c_{n,0}$ definiert wurden). Offenbar ist $c_n > 0$ für jedes n, da bereits die Zahl $l_t - q$ nach ihrer Definition in Abschnitt 15, § 1, immer positiv ist.

Zwischen diesen Konstanten bestehen leicht zu verifizierende Identitäten, die wir im folgenden heranziehen werden. Es ist nämlich

$$c_{n-h} - h\, c_{n-h,\mu} + h\,(h - 1)(p_t + \mu)^2 = c_n - h\, c_{n,\mu+1} + h\,(h - 1)(p_t + \mu + 1)^2, \tag{44}$$

$$c_{n-h,\varkappa} - 2\,h\,(p_t + \mu)(p_t + \varkappa) = c_{n,\varkappa} - 2\,h\,(p_t + \mu + 1)(p_t + \varkappa). \tag{45}$$

79. Indem wir die abkürzenden Bezeichnungen aus Formel (28), § 15, benutzen, formulieren wir den

Hilfssatz 5: *Setzt man in $\psi_t(\sigma, \omega)$ und $\varphi_t^{-1}(\sigma, \omega)$ die Grösse ω gleich der Potenzreihe (29), § 15, so ist für $\sigma = 0$ identisch in $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\mu$*

$$\frac{\Delta^n_\mu \psi_t/_{\sigma=0}}{n!} = \left(c_n - \sum_{\varkappa=0}^{\mu} c_{n,\varkappa}\, \omega_\varkappa \frac{\partial}{\partial \omega_\varkappa} + \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} (p_t + \varkappa)(p_t + \lambda)\, \omega_\varkappa\, \omega_\lambda \frac{\partial^2}{\partial \omega_\varkappa\, \partial \omega_\lambda}\right) \frac{\Delta^n_\mu \varphi_t^{-1}/_{\sigma=0}}{n!}. \tag{46}$$

Beweis: Für $\mu = 0$ lautet die Behauptung (46) wegen der Definitionsgleichungen (6), § 13

$$\frac{1}{n!}\frac{\partial^n \psi_t}{\partial \sigma^n}\Big/_{\sigma=0} = \left(c_n - c_{n,0}\,\omega\frac{\partial}{\partial\omega} + p_t^2\,\omega^2\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\right)\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\sigma^n}\int_0^\omega \varphi(\sigma,\omega)/_{\sigma=0}\,d\,\omega,$$

d. h. aber mit Rücksicht auf Formel (43), § 2, und (53), § 3

$$g_{t,n}(\omega) = c_n\int_0^\omega f_{t,n}(\omega)\,d\,\omega - c_{n,0}\,\omega f_{t,n}(\omega) + p_t^2\,\omega^2 f'_{t,n}(\omega),$$

und diese Formel stimmt mit der bereits bewiesenen Gleichung (55) aus § 3 überein.

Da somit die Behauptung (46) für $\mu = 0$ richtig ist, hat man diese Identität nur noch für $\mu + 1$ unter der Annahme zu beweisen, dass sie für ein festes μ gilt.

Wir setzen vorübergehend zur Abkürzung den Differentialoperator

$$(47)\quad \frac{\partial^h}{\partial\omega_\mu^h}\left(c_{n-h} - \sum_{\varkappa=0}^{\mu} c_{n-h,\varkappa}\,\omega_\varkappa\frac{\partial}{\partial\omega_\varkappa} + \sum_{\varkappa=0}^{\mu}\sum_{\lambda=0}^{\mu}(p_t+\varkappa)(p_t+\lambda)\,\omega_\varkappa\,\omega_\lambda\frac{\partial^2}{\partial\omega_\varkappa\,\partial\omega_\lambda}\right) = D_h.$$

Dann wird nach Formel (11), § 13,

$$(48)\qquad \frac{\varDelta_{\mu+1}^n\,\psi_t/_{\sigma=0}}{n!} = \sum_{h=0}^{n}\frac{\partial^h}{\partial\omega_\mu^h}\frac{\varDelta_\mu^{n-h}\,\psi_t/_{\sigma=0}}{(n-h)!}\frac{\omega_{\mu+1}^h}{h!}$$

$$= \sum_{h=0}^{n} D_h\frac{\varDelta_\mu^{n-h}\,\varphi_t^{-1}/_{\sigma=0}}{(n-h)!}\frac{\omega_{\mu+1}^h}{h!}\quad \text{(nach Formel (46) und (47))}.$$

Nun formen wir zunächst den Ausdruck (47) für D_h um, und zwar ergibt sich

$$D_h = c_{n-h}\frac{\partial^h}{\partial\omega_\mu^h} - \sum_{\varkappa=0}^{\mu} c_{n-h,\varkappa}\,\omega_\varkappa\frac{\partial^{h+1}}{\partial\omega_\varkappa\,\partial\omega_\mu^h} + \sum_{\varkappa=0}^{\mu}\sum_{\lambda=0}^{\mu}(p_t+\varkappa)(p_t+\lambda)\,\omega_\varkappa\,\omega_\lambda\frac{\partial^{h+2}}{\partial\omega_\varkappa\,\partial\omega_\lambda\,\partial\omega_\mu^h}$$

$$- h\,c_{n-h,\mu}\frac{\partial^h}{\partial\omega_\mu^h} + 2\,h(p_t+\mu)\sum_{\varkappa=0}^{\mu}(p_t+\varkappa)\,\omega_\varkappa\frac{\partial^{h+1}}{\partial\omega_\varkappa\,\partial\omega_\mu^h}$$

$$+ h(h-1)(p_t+\mu)^2\frac{\partial^h}{\partial\omega_\mu^h}$$

$$= (c_n - h\, c_{n,\mu+1} + h(h-1)(p_t+\mu+1)^2)\,\frac{\partial^h}{\partial\,\omega_\mu^h} \qquad \text{(vgl. Formel (44))}$$

$$-\sum_{\varkappa=0}^{\mu}(c_{n,\varkappa} - 2\,h\,(p_t+\mu+1)(p_t+\varkappa))\,\omega_\varkappa\,\frac{\partial^{h+1}}{\partial\,\omega_\varkappa\,\partial\,\omega_\mu^h} \qquad \text{(vgl. Formel (45)}$$

$$+\sum_{\varkappa=0}^{\mu}\sum_{\lambda=0}^{\mu}(p_t+\varkappa)(p_t+\lambda)\,\omega_\varkappa\,\omega_\lambda\,\frac{\partial^{h+2}}{\partial\,\omega_\varkappa\,\partial\,\omega_\lambda\,\partial\,\omega_\mu^h}.$$

Substituiert man diesen Ausdruck für den Operator D_h in (48), so erhält man

$$\frac{\varDelta_{\mu+1}^n\,\psi_t/_{\sigma=0}}{n!} = \left(c_n - \sum_{\varkappa=0}^{\mu} c_{n,\varkappa}\,\omega_\varkappa\,\frac{\partial}{\partial\,\omega_\varkappa} + \sum_{\varkappa=0}^{\mu}\sum_{\lambda=0}^{\mu}(p_t+\varkappa)(p_t+\lambda)\,\omega_\varkappa\,\omega_\lambda\,\frac{\partial^2}{\partial\,\omega_\varkappa\,\partial\,\omega_\lambda}\right)$$

$$\cdot\sum_{h=0}^{n}\frac{\partial^h}{\partial\,\omega_\mu^h}\,\frac{\varDelta_\mu^{n-h}\,\varphi_t^{-1}/_{\sigma=0}}{(n-h)!}\,\frac{\omega_{\mu+1}^h}{h!}$$

$$(49)\qquad -\left(c_{n,\mu+1}\,\omega_{\mu+1} - 2\sum_{\varkappa=0}^{\mu}(p_t+\mu+1)(p_t+\varkappa)\,\omega_{\mu+1}\,\omega_\varkappa\,\frac{\partial}{\partial\,\omega_\varkappa}\right)$$

$$\cdot\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial^h}{\partial\,\omega_\mu^h}\,\frac{\varDelta_\mu^{n-h}\,\varphi_t^{-1}/_{\sigma=0}}{(n-h)!}\,\frac{\omega_{\mu+1}^{h-1}}{(h-1)!}$$

$$+ (p_t+\mu+1)^2\,\omega_{\mu+1}^2\sum_{h=2}^{n}\frac{\partial^h}{\partial\,\omega_\mu^h}\,\frac{\varDelta_\mu^{n-h}\,\varphi_t^{-1}/_{\sigma=0}}{(n-h)!}\,\frac{\omega_{\mu+1}^{h-2}}{(h-2)!}.$$

Berücksichtigt man noch, dass nach Formel (11) und (12), § 13

$$\sum_{h=\iota}^{n}\frac{\partial^h}{\partial\,\omega_\mu^h}\,\frac{\varDelta_\mu^{n-h}\,\varphi_t^{-1}}{(n-h)!}\,\frac{\omega_{\mu+1}^{h-\iota}}{(h-\iota)!} = \frac{\partial^\iota}{\partial\,\omega_{\mu+1}^\iota}\,\frac{\varDelta_{\mu+1}^n\,\varphi_t^{-1}}{n!} \qquad (\iota = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist, so wird aus (49)

$$\frac{\varDelta_{\mu+1}^n\,\psi_t/_{\sigma=0}}{n!} = \left(c_n - \sum_{\varkappa=0}^{\mu} c_{n,\varkappa}\,\omega_\varkappa\,\frac{\partial}{\partial\,\omega_\varkappa} - c_{n,\mu+1}\,\omega_{\mu+1}\,\frac{\partial}{\partial\,\omega_{\mu+1}}\right.$$

$$+\sum_{\varkappa=0}^{\mu}\sum_{\lambda=0}^{\mu}(p_t+\varkappa)(p_t+\lambda)\,\omega_\varkappa\,\omega_\lambda\,\frac{\partial^2}{\partial\,\omega_\varkappa\,\partial\,\omega_\lambda} +$$

$$+ 2\sum_{\varkappa=0}^{\mu}(p_t+\varkappa)(p_t+\mu+1)\,\omega_\varkappa\,\omega_{\mu+1}\,\frac{\partial^2}{\partial\,\omega_\varkappa\,\partial\,\omega_{\mu+1}}$$

$$+ (p_t + \mu + 1)^2 \omega_{\mu+1}^2 \frac{\partial^2}{\partial \omega_{\mu+1}^2}\Bigg) \frac{\Delta_{\mu+1}^n \varphi_t^{-1}/_{\sigma=0}}{n!}$$

$$= \left(c_n - \sum_{\varkappa=0}^{\mu+1} c_{n,\varkappa}\, \omega_\varkappa \frac{\partial}{\partial \omega_\varkappa} + \sum_{\varkappa=0}^{\mu+1} \sum_{\lambda=0}^{\mu+1} (p_t + \varkappa)(p_t + \lambda)\, \omega_\varkappa \omega_\lambda \frac{\partial^2}{\partial \omega_\varkappa \partial \omega_\lambda}\right) \frac{\Delta_{\mu+1}^n \varphi_t^{-1}/_{\sigma=0}}{n!}.$$

D. h. aber, dass Formel (46) auch für $\mu + 1$ richtig ist, und damit ist der Hilfssatz 5 vollständig bewiesen.

80. Nunmehr formen wir die Gleichung (46) um, indem wir auf

$$\frac{\partial}{\partial \omega_\varkappa} \frac{\Delta_\mu^n \varphi_t^{-1}}{n!} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2}{\partial \omega_\varkappa \partial \omega_\lambda} \frac{\Delta_\mu^n \varphi_t^{-1}}{n!}$$

die Formel (7), § 13, anwenden, und erhalten so für $\sigma = 0$ identisch in ω_0, $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$

$$\frac{\Delta_\mu^n \psi_t/_{\sigma=0}}{n!} = c_n \frac{\Delta_\mu^n \varphi_t^{-1}/_{\sigma=0}}{n!} - \sum_{\varkappa=0}^{\mu} c_{n,\varkappa}\, \omega_\varkappa \frac{\Delta_\mu^{n-\varkappa} \varphi_t/_{\sigma=0}}{(n-\varkappa)!} + \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} (p_t + \varkappa)(p_t + \lambda)\, \omega_\varkappa \omega_\lambda \frac{\Delta_\mu^{n-\varkappa-\lambda} \varphi_t'/_{\sigma=0}}{(n-\varkappa-\lambda)!}. \tag{50}$$

Bilden wir endlich die Summe

$$\frac{\Delta_\mu^n \psi_t/_{\sigma=0}}{n!} + q \sum_{\varkappa=0}^{\mu} (p_t + \varkappa)\, \omega_\varkappa \frac{\Delta_\mu^{n-\varkappa} \Phi_t/_{\sigma=0}}{(n-\varkappa)!},$$

so ergibt sich, wenn man berücksichtigt, dass nach Formel (32), § 15,

$$q \sum_{\varkappa=0}^{\mu} (p_t + \varkappa)\, \omega_\varkappa \frac{\Delta_\mu^{n-\varkappa} \Phi_t/_{\sigma=0}}{(n-\varkappa)!} = \sum_{\varkappa=0}^{\mu} (p_t + \varkappa)(l_t + n - \varkappa)\, \omega_\varkappa \frac{\Delta_\mu^{n-\varkappa} \varphi_t/_{\sigma=0}}{(n-\varkappa)!} - \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} (p_t + \varkappa)(p_t + \lambda)\, \omega_\varkappa \omega_\lambda \frac{\Delta_\mu^{n-\varkappa-\lambda} \varphi_t'/_{\sigma=0}}{(n-\varkappa-\lambda)!}$$

ist, aus (50)

$$(51)\qquad \frac{\varDelta_\mu^n \psi_t/_{\sigma=0}}{n!} + q\sum_{\varkappa=0}^{\mu}(p_t+\varkappa)\,\omega_\varkappa\,\frac{\varDelta_\mu^{n-\varkappa}\Phi_t/_{\sigma=0}}{(n-\varkappa)!}$$
$$= c_n\,\frac{\varDelta_\mu^n \varphi_t^{-1}/_{\sigma=0}}{n!} - \sum_{\varkappa=0}^{\mu} c'_{n,\varkappa}\,\omega_\varkappa\,\frac{\varDelta_\mu^{n-\varkappa}\varphi_t/_{\sigma=0}}{(n-\varkappa)!},$$

wobei

$$\begin{aligned} c'_{n,\varkappa} &= c_{n,\varkappa} - (p_t+\varkappa)(l_t+n-\varkappa) \\ &= (p_t+\varkappa)(l_t+n-\varkappa) + (p_t+\varkappa)^2 \quad \text{wegen (43)} \\ &= (p_t+\varkappa)(l_t+p_t+n) \end{aligned}$$

gesetzt ist. Ausserdem kann in (51) ebenso wie in der Identität (38), § 15, bei dem Operator $\varDelta_\mu^{n-\varkappa}$ nach Formel (5), § 13, μ durch $n-\varkappa$ ersetzt werden, wenn $n-\varkappa \leqq \mu$ ist.

§ 17. Hilfsbetrachtungen.

81. Wir fassen eine bestimmte der in § 1 Formel (27) eingeführten Kurven (vgl. auch Formel (69), § 7)

$$(52)\qquad \vartheta = \theta_\nu(\varrho) = \sigma^{p_t}\,\Omega_\nu(\sigma) = \sigma^{p_t}\sum_{\mu=0}^{\infty}\alpha_{\nu,\mu}\,\sigma^\mu \qquad (\varrho = \sigma^q)$$

ins Auge. Da nach Formel (28), § 1, und (46), § 2, $\Phi_t(\sigma,\ \Omega_\nu(\sigma)) \equiv 0$ ist, so ist auf die Koeffizienten $\alpha_{\nu,\mu}$ der Potenzreihe (52) der Satz von Enriques des § 14 anwendbar. Somit gehört zu jedem der Koeffizienten $\alpha_{\nu,\mu}$ eine Zahl $r_{\nu,\mu}$, die die Mächtigkeit des in Abschnitt 69, § 14, eingeführten K. V. $[\alpha_{\nu,\mu}]$ angibt; ferner setze man entsprechend Formel (17), § 14,

$$(53)\qquad n_{\nu,0} = 0,\quad n_{\nu,1} = r_{\nu,0},\quad n_{\nu,\mu} = \sum_{\lambda=0}^{\mu-1} r_{\nu,\lambda}.$$

Nunmehr bilde man nacheinander die Ausdrücke

$$[\varDelta_0^0\varphi_t]_\nu = \varphi_t(0,\ \alpha_{\nu,0}) = f_{t,0}(\alpha_{\nu,0}),\quad [\varDelta_0^1\varphi_t]_\nu = \frac{\partial\varphi_t}{\partial\sigma}\Big/_{\substack{\sigma=0\\ \omega=\alpha_{\nu,0}}} = f_{t,1}(\alpha_{\nu,0}),$$

$$\ldots,\ [\varDelta_0^{r_{\nu,0}-1}\varphi_t]_\nu = \frac{\partial^{r_{\nu,0}-1}\varphi_t}{\partial\sigma^{r_{\nu,0}-1}}\Big/_{\substack{\sigma=0\\ \omega=\alpha_{\nu,0}}} = (r_{\nu,0}-1)!\ f_{t,\,r_{\nu,0}-1}(\alpha_{\nu,0})$$

(nach Formel (43), § 2)

$$[\Delta_1^{n_\nu,1}\varphi_t]_\nu,\ [\Delta_1^{n_\nu,1+1}\varphi_t]_\nu,\ \ldots,\ [\Delta_1^{n_\nu,1+r_\nu,1-1}\varphi_t]_\nu,$$

allgemein

$$[\Delta_\lambda^{n_\nu,\lambda+\varkappa}\varphi_t]_\nu \quad \text{für } 0 \leqq \varkappa \leqq r_{\nu,\lambda} - 1,$$

wobei das Zeichen $[\ \ ]_\nu$ wieder die in Formel (18), § 14, angegebene Bedeutung hat.

Es bezeichne ferner l'_ν diejenige der Reihe (52) zugeordnete Zahl, welche durch die beiden Eigenschaften

$$(54) \qquad \begin{cases} \textit{erstens} \quad [\Delta_\mu^{l'_\nu}\varphi_t]_\nu \neq 0, \\ \textit{zweitens}\ [\Delta_\lambda^n \varphi_t]_\nu = 0, \qquad \text{für } 0 \leqq n \leqq l'_\nu - 1 \end{cases}$$

eindeutig definiert ist. Hierbei ist der zu l'_ν gehörige Index μ durch die Abschätzung

$$(55) \qquad n_{\nu,\mu} \leqq l'_\nu \leqq n_{\nu,\mu+1} - 1,$$

der zu n gehörige Index λ durch die Abschätzung

$$(56) \qquad n_{\nu,\lambda} \leqq n \leqq n_{\nu,\lambda+1} - 1$$

bestimmt.

Die zur Kurve $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ gehörige Zahl l'_ν ist somit gleich einer ganzen Zahl zwischen 0 und ∞, und zwar ist $l'_\nu = 0$, wenn $\varphi_t(0, \alpha_{\nu,0}) = f_{t,0}(\alpha_{\nu,0}) \neq 0$; $l'_\nu = \infty$ wenn $[\Delta_\lambda^n \varphi_t]_\nu = 0$ für alle n.

82. Wir suchen jetzt in diesem und dem folgenden Paragraphen eine Reihe von Hilfssätzen zu beweisen, die das Ziel haben, aufzuweisen

1. in welchen Fällen man aus den Voraussetzungen (54) auf das Verschwinden des Ausdruckes $[\Delta_\lambda^n \varphi'_t]_\nu$ schliessen kann,

2. in welchen Fällen sich unter den Voraussetzungen (54) der Index λ in den Ausdrücken $[\Delta_\lambda^n \varphi'_t]_\nu$, $[\Delta_\lambda^n \varphi_t]_\nu$, $[\Delta_\lambda^n \varphi_t^{-1}]_\nu$ verkleinern lässt.

Hifssatz 6: *Unter den Voraussetzungen* (54) *sei*

$$l'_\nu \geqq 1, \quad 0 \leqq n \leqq l'_\nu - 1.$$

Bestimmt man den n zugehörigen Index λ vermittels der Abschätzung (56), *so ist*

$$(57) \qquad \left[\frac{\partial^\varkappa}{\partial \omega_\lambda^\varkappa} \Delta_\lambda^n \varphi'_t\right]_\nu = 0 \quad \text{für } n + \varkappa \leqq n_{\nu,\lambda+1} - 1.$$

Bedient man sich ferner der in Gleichung (19), § 14, *definierten Schreibweise, so ist ausserdem für* $n \leqq n_{\nu,\lambda+1} - 1$ *und für jede positive ganze Zahl* ι

$$(58)\qquad [\Delta^{n}_{\lambda+\iota}\varphi'_t]_{\nu,\lambda} \equiv [\Delta^{n}_{\lambda}\varphi'_t]_\nu = 0 \text{ identisch in } \omega_{\lambda+1}, \omega_{\lambda+2}, \ldots, \omega_{\lambda+\iota}.$$

Beweis: Für $n = 0$ lauten die Behauptungen (57) und (58), da nach Formel (56) auch λ gleichzeitig mit n verschwindet,

$$(59)\qquad \frac{d^\varkappa}{d\omega^\varkappa} f'_{t,0}(\omega)/_{\omega=\alpha_{\nu,0}} = 0 \quad \text{für } 0 \leqq \varkappa \leqq n_{\nu,1} - 1,$$

$$(60)\qquad \Delta^0_\iota \varphi'_t/_{\substack{\sigma=0\\ \omega_0=\alpha_{\nu,0}}} \equiv [\Delta^0_0\varphi'_t]_\nu = f'_{t,0}(\alpha_{\nu,0}) = 0 \text{ identisch in } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\iota.$$

(59) folgt aber aus Formel (42), § 2, wenn man berücksichtigt, dass nach dem Satze von Enriques § 14, Abschnitt 70. (vergl. Formel (16), § 14, und Formel (44), § 2)

$$F^{(\varkappa)}_{t,0}(\alpha_{\nu,0}) = 0 \quad \text{für } 0 \leqq \varkappa \leqq r_{\nu,0} - 1,$$

wobei nach Formel (53) $r_{\nu,0} = n_{\nu,1}$ ist. Weiter folgt dann Formel (60) aus der Definitionsgleichung (6), § 13.

Unter der Annahme, dass die Formeln (57) und (58) bereits für alle $0 \leqq n \leqq \mathring{n}$, unter $\mathring{n}$ eine feste Zahl $\leqq l'_\nu - 2$ verstanden, bewiesen sind, suchen wir zu zeigen, dass (57) und (58) auch für $n = \mathring{n} + 1$ richtig sind. Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem $\mathring{n} + 1 = n_{\nu,\lambda}$ oder $n_{\nu,\lambda} + 1 \leqq \mathring{n} + 1 \leqq n_{\nu,\lambda+1} - 1$ ist.

83. *1. Fall:* $\mathring{n} = n_{\nu,\lambda} - 1$, $\mathring{n} + 1 = n_{\nu,\lambda} \leqq l'_\nu - 1$, $\lambda \geqq 1$.

Es ist nach Formel (32) und (33), § 15,

$$(61)\qquad q\frac{[\Delta^{\mathring{n}+1}_\lambda \Phi_t]_\nu}{(\mathring{n}+1)!} = (l_t + \mathring{n} + 1)\frac{[\Delta^{\mathring{n}+1}_\lambda \varphi_t]_\nu}{(\mathring{n}+1)!} - p_t\omega_0\frac{[\Delta^{\mathring{n}+1}_\lambda \varphi'_t]_\nu}{(\mathring{n}+1)!} - \sum_{\iota=1}^{\lambda}(p_t+\iota)\,\omega_\iota\frac{[\Delta^{\mathring{n}+1-\iota}_\lambda \varphi'_t]_\nu}{(\mathring{n}+1-\iota)}$$

und für $\varkappa \geqq 1$

$$(62)\qquad q\left[\frac{\partial^\varkappa}{\partial\omega^\varkappa_\lambda}\frac{\Delta^{\mathring{n}+1}_\lambda \Phi_t}{(\mathring{n}+1)!}\right]_\nu = (l_t + \mathring{n} + 1 - \varkappa(p_t+\lambda))\left[\frac{\partial^{\varkappa-1}}{\partial\omega^{\varkappa-1}_\lambda}\frac{\Delta^{\mathring{n}+1-\lambda}_\lambda \varphi'_t}{(\mathring{n}+1-\lambda)!}\right]_\nu - {}$$
$$- p_t\omega_0\left[\frac{\partial^\varkappa}{\partial\omega^\varkappa_\lambda}\frac{\Delta^{\mathring{n}+1}_\lambda \varphi'_t}{(\mathring{n}+1)!}\right]_\nu - \sum_{\iota=1}^{\lambda}(p_t+\iota)\,\omega_\iota\left[\frac{\partial^\varkappa}{\partial\omega^\varkappa_\lambda}\frac{\Delta^{\mathring{n}+1-\iota}_\lambda \varphi'_t}{(\mathring{n}+1-\iota)!}\right]_\nu.$$

Nach dem Satz von Enriques Formel (21), § 14, ist nun aber wegen $\mathring{n} + 1 = n_{\nu,\lambda}$

$$(63)\qquad \left[\frac{\partial^\varkappa}{\partial \omega_\lambda^\varkappa} \Delta_\lambda^{\mathring{n}+1} \Phi_t\right]_\nu = 0 \quad \text{für } \mathring{n} + 1 + \varkappa \leqq n_{\nu,\lambda+1} - 1;$$

ferner ist nach Voraussetzung (54)

$$(64)\qquad [\Delta_\lambda^n \varphi_t]_\nu = 0 \quad \text{für alle } n \leqq \mathring{n} + 1.$$

Endlich folgt aus der Annahme, dass (58) bereits für $n \leqq \mathring{n}$ bewiesen ist,

$$(65)\qquad [\Delta_\lambda^n \varphi_t']_{\nu,\lambda-1} \equiv [\Delta_{\lambda-1}^n \varphi_t']_\nu = 0 \quad \text{identisch in } \omega_\lambda \text{ für alle } n \leqq n_{\nu,\lambda} - 1.$$

Da somit hier $[\Delta_\lambda^n \varphi_t']_{\nu,\lambda-1}$ gar nicht mehr von ω_λ abhängt, so ist auch für alle $\varkappa \geqq 0$

$$(66)\qquad \left[\frac{\partial^\varkappa}{\partial \omega_\lambda^\varkappa} \Delta_\lambda^n \varphi_t'\right]_{\nu,\lambda-1} \equiv 0 \quad \text{identisch in } \omega_\lambda \text{ für } n \leqq n_{\nu,\lambda} - 1.$$

Setzt man die Ergebnisse aus (63), (64) und (66) in die Gleichungen (61) und (62) ein, so folgt wegen $\mathring{n} + 1 = n_{\nu,\lambda}$

$$(67)\qquad \left[\frac{\partial^\varkappa}{\partial \omega_\lambda^\varkappa} \Delta_\lambda^{\mathring{n}+1} \varphi_t'\right]_\nu = 0 \quad \text{für } \mathring{n} + 1 + \varkappa \leqq n_{\nu,\lambda+1} - 1,$$

und damit ist die Behauptung (57) für $n = \mathring{n} + 1$ bewiesen.

Um jetzt zweitens, entsprechend der Behauptung (58), die Identität

$$(68)\qquad \left[\Delta_{\lambda+\iota}^{\mathring{n}+1} \varphi_t'\right]_{\nu,\lambda} \equiv \left[\Delta_\lambda^{\mathring{n}+1} \varphi_t'\right]_\nu = 0$$

zu beweisen, gehen wir von der Entwicklungsformel (9), § 13, aus und erhalten

$$(69)\qquad \frac{\left[\Delta_{\lambda+\iota}^{\mathring{n}+1} \varphi_t'\right]_{\nu,\lambda}}{(\mathring{n}+1)!} = \frac{\left[\Delta_\lambda^{\mathring{n}+1} \varphi_t'\right]_\nu}{(\mathring{n}+1)!} + \sum_{\substack{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\iota \\ \varkappa \geqq 1}} \left[\frac{\partial^\varkappa}{\partial \omega_\lambda^\varkappa} \frac{\Delta_\lambda^h \varphi_t'}{h!}\right]_\nu \frac{\omega_{\lambda+1}^{\varkappa_1}}{\varkappa_1!} \frac{\omega_{\lambda+2}^{\varkappa_2}}{\varkappa_2!} \cdots \frac{\omega_{\lambda+\iota}^{\varkappa_\iota}}{\varkappa_\iota!},$$

wobei h und $\varkappa$ durch die Gleichungen

$$(70)\qquad \varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_\iota, \quad h = \mathring{n} + 1 - (\varkappa_1 + 2\varkappa_2 + \cdots + \iota\varkappa_\iota)$$

bestimmt sind. Mithin ist in der Summe rechter Hand

$$h \leqq \mathring{n} = n_{\nu,\lambda} - 1 \quad \text{wegen } \varkappa \geqq 1$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf (66), dass sämtliche Glieder der Summe rechter Hand von (69) verschwinden, und damit ist Formel (68) bewiesen.

84. *2. Fall.*

$$n_{\nu,\lambda} \leqq \mathring{n} \leqq n_{\nu,\lambda+1} - 2, \quad \lambda \geqq 0.$$

Um auch in diesem Fall die Gleichungen (67) zu beweisen, gehen wir wieder von den Beziehungen (61) und (62) aus und bemerken unmittelbar, dass die Formeln (63), (64) und (65) auch jetzt gelten. Ferner folgt aus der Annahme, dass die Behauptung (57) für $0 \leqq n \leqq \mathring{n}$ bereits bewiesen ist:

$$\text{(71)} \qquad \left[\frac{\partial^{\varkappa}}{\partial \omega_{\lambda}^{\varkappa}} \Delta_{\lambda}^{\mathring{n}+1-\iota} \varphi_{\iota}'\right]_{\nu} = 0 \text{ für } \begin{cases} n_{\nu,\lambda} \leqq \mathring{n} + 1 - \iota \leqq \mathring{n} \\ \mathring{n} + 1 + \varkappa - \iota \leqq n_{\nu,\lambda+1} - 1. \end{cases}$$

Ist aber $\mathring{n} + 1 - \iota \leqq n_{\nu,\lambda} - 1$, so folgt (71) bereits aus (65).

Setzt man die Ergebnisse aus (63), (64) und (71) in (61) und (62) ein, so ergibt sich unmittelbar die Richtigkeit der behaupteten Gleichungen (67).

Auch im 2. Fall folgt die Identität (68) unmittelbar aus der Entwicklung (69) für $\left[\Delta_{\lambda+\iota}^{\mathring{n}+1} \varphi_{\iota}'\right]_{\nu,\lambda}$; denn es ist wieder in der Summe rechter Hand

$$\text{(72)} \qquad \left[\frac{\partial^{\varkappa}}{\partial \omega_{\lambda}^{\varkappa}} \Delta_{\lambda}^{h} \varphi_{\iota}'\right]_{\nu} = 0 \text{ für } \varkappa \geqq 1,$$

und zwar ergibt sich für $n_{\nu,\lambda} \leqq h \leqq \mathring{n} + 1$ die Gleichung (72) aus (71), da mit Rücksicht auf (70)

$$h + \varkappa \leqq n + 1 \leqq n_{\nu,\lambda+1} - 1$$

ist, während für $h \leqq n_{\nu,\lambda} - 1$ die Beziehung (72) aus (65) folgt.

Damit ist für jedes $\mathring{n}$ der Schluss von $\mathring{n}$ auf $\mathring{n} + 1$ für die beiden Behauptungen (57) und (58) durchgeführt, und mithin der Hilfssatz 6 vollständig bewiesen.

§ 18. Fortsetzung der Hilfsbetrachtungen.

85. Wir leiten jetzt zunächst zwei Hilfssätze ab, die dazu dienen, den Index λ in $[\Delta_{\lambda}^{n} \varphi_{\iota}]_{\nu}$ zu verkleinern, wenn λ der zu n gehörige durch die Beziehung (56), § 17, definierte Index ist.

Hilfssatz 7. *Es sei*

$$n \leqq l'_\nu + \mu, \tag{73}$$

wobei l'_ν *die durch die Bedingungen* (54), § 17, *definierte, einer Kurve* $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ *zugeordnete Zahl bezeichnet, während* μ *durch die Beziehung* (55), § 17, *festgelegt sei.*

Nunmehr bestimme man zur Zahl n *ausser dem Index* λ *einen zweiten Index* λ' *durch die Beziehung*

$$n_{\nu,\lambda'} + \lambda' \leqq n \leqq n_{\nu,\lambda'+1} + \lambda'. \tag{74}$$

Dann ist für alle $\iota \geqq 1$

$$[\Delta^n_{\lambda'+\iota}\varphi_\iota]_{\nu,\lambda'} \equiv [\Delta^n_{\lambda'}\varphi_\iota]_\nu \text{ identisch in } \omega_{\lambda'+1}, \omega_{\lambda'+2}, \ldots, \omega_{\lambda'+\iota}.$$

Beweis: Aus Formel (9), § 13, ergibt sich in Verbindung mit Formel (7), § 13,

$$\frac{[\Delta^n_{\lambda'+\iota}\varphi_\iota]_{\nu,\lambda'}}{n!} \equiv \frac{[\Delta^n_{\lambda'}\varphi_\iota]_\nu}{n!} + \sum_{\substack{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\iota \\ \varkappa \geqq 1}} \left[\frac{\partial^{\varkappa-1}}{\partial\omega^{\varkappa-1}_{\lambda'}} \frac{\Delta^{h-\lambda'}_{\lambda'}\varphi'_\iota}{(h-\lambda)!}\right]_\nu \frac{\omega^{\varkappa_1}_{\lambda'+1}}{\varkappa_1!}\frac{\omega^{\varkappa_2}_{\lambda'+2}}{\varkappa_2!}\cdots\frac{\omega^{\varkappa_\iota}_{\lambda'+\iota}}{\varkappa_\iota!} \tag{75}$$

identisch in $\omega_{\lambda'+1}, \omega_{\lambda'+2}, \ldots, \omega_{\lambda'+\iota}$.

Da die Grössen h und $\varkappa$ wieder durch die Gleichung (10), § 13, definiert sind, so folgt in Verbindung mit der Abschätzung (74)

$$h - \lambda' + \varkappa - 1 \leqq n - \lambda' - 1 \leqq n_{\nu,\lambda'+1} - 1. \tag{76}$$

Andererseits ist auch

$$h - \lambda' \leqq l'_\nu - 1, \tag{77}$$

denn wegen $\varkappa \geqq 1$ ist für $0 \leqq \lambda' \leqq \mu - 1$

$$h - \lambda' \leqq n - \varkappa - \lambda' \leqq n - \lambda' - 1 \leqq n_{\nu,\lambda'+1} - 1 \leqq n_{\nu,\mu} - 1 \leqq l'_\nu - 1$$

wegen (55), § 17, und für $\lambda' = \mu$ ist mit Rücksicht auf die Voraussetzung (73)

$$h - \lambda' \leqq n - \varkappa - \mu \leq l'_\nu - 1.$$

Mithin gilt für jedes Glied der Summe rechter Hand von (75)

$$\left[\frac{\partial^{\varkappa-1}}{\partial\omega^{\varkappa-1}_{\lambda'}} \Delta^{h-\lambda'}_{\lambda'}\varphi'_\iota\right]_\nu = 0,$$

da alle Voraussetzungen der Behauptung (57) des Hilfssatzes 6, § 17, wegen (76) und (77) erfüllt sind. Damit ist aber der Hilfssatz 7 vollständig bewiesen.

86. Bestimmt man zur Zahl l'_ν einen Index μ', derart dass

$$n_{\nu,\mu'} + \mu' \leqq l'_\nu \leqq n_{\nu,\mu'+1} + \mu', \tag{78}$$

so ist offenbar $\mu' \leqq \mu$, unter μ wieder den in Formel (55), § 17, definierten Index verstanden. Ferner folgt aus Hilfssatz 7

$$\left[\varDelta_\mu^{l'_\nu} \varphi_t\right]_{\nu,\mu'} \equiv \left[\varDelta_{\mu'}^{l'_\nu} \varphi_t\right]_\nu \text{ identisch in } \omega_{\mu'+1}, \omega_{\mu'+2}, \ldots, \omega_\mu. \tag{79}$$

Aus der Beziehung (32), § 15, ergibt sich somit für $n = l'_\nu$ wegen (79)

$$q\frac{\left[\varDelta_\mu^{l'_\nu} \Phi_t\right]_\nu}{l'_\nu!} = (l_t + l'_\nu)\frac{\left[\varDelta_{\mu'}^{l'_\nu} \varphi_t\right]_\nu}{l'_\nu!} - \sum_{\lambda=0}^{\mu} (p_t + \lambda)\alpha_{\nu,\lambda}\frac{\left[\varDelta_\mu^{l'_\nu-\lambda} \varphi'_t\right]_\nu}{(l'_\nu - \lambda)!}. \tag{80}$$

Nun ist aber

$$\left[\varDelta_\mu^{l'_\nu} \Phi_t\right]_\nu = 0 \text{ nach dem Satz von Enriques § 14}$$

$$\left[\varDelta_\mu^{l'_\nu-\lambda} \varphi'_t\right]_\nu = 0 \text{ für } \lambda \geqq 1 \text{ nach Hilfssatz 6, Behauptung (58);}$$

folglich erhält man aus (80)

$$\frac{\left[\varDelta_\mu^{l'_\nu} \varphi'_t\right]_\nu}{l'_\nu!} = \frac{l_t + l'_\nu}{p_t\,\alpha_{\nu,0}}\frac{\left[\varDelta_{\mu'}^{l'_\nu} \varphi_t\right]_\nu}{l'_\nu!}. \tag{81}$$

87. Wir beweisen jetzt als eine Art Ergänzung zu Hilfssatz 7 den

Hilfssatz 8: *Es ist für alle* $\iota \geqq 1$

$$\begin{aligned}\frac{\left[\varDelta_{\mu+\iota}^{l'_\nu+\mu+1} \varphi_t\right]_{\nu,\mu}}{(l'_\nu+\mu+1)!} &\equiv \frac{\left[\varDelta_{\mu+1}^{l'_\nu+\mu+1} \varphi_t\right]_{\nu,\mu}(\omega_{\mu+1})}{(l'_\nu+\mu+1)!}\\ &\equiv \frac{\left[\varDelta_\mu^{l'_\nu+\mu+1} \varphi_t\right]_\nu}{(l'_\nu+\mu+1)!} + \frac{l_t + l'_\nu}{p_t + \alpha_{\nu,0}}\frac{\left[\varDelta_{\mu'}^{l'_\nu} \varphi_t\right]_\nu}{l'_\nu!}\,\omega_{\mu+1}\end{aligned} \tag{82}$$

identisch in $\omega_{\mu+1}, \omega_{\mu+2}, \ldots, \omega_{\mu+\iota}$.

Beweis: Zum Beweise gehen wir von einer der Formel (75) entsprechenden Entwicklung von $\left[\varDelta_{\mu+\iota}^{l'_\nu+\mu+1} \varphi_t\right]_{\nu,\mu}$ aus, wobei aber die Glieder der Summe, bei denen $\varkappa = 1$ ist, gesondert aufgeschrieben sein mögen. So ergibt sich aus Gleichung (7), (9) und (10), § 13,

$$(83)\qquad \frac{\left[\varDelta_{\mu+\iota}^{l'_\nu+\mu+1}\varphi_t\right]_{\nu,\mu}}{(l'_\nu+\mu+1)!} = \frac{\left[\varDelta_{\mu}^{l'_\nu+\mu+1}\varphi_t\right]_\nu}{(l'_\nu+\mu+1)!} + \sum_{\lambda=1}^{\iota} \frac{\left[\varDelta_{\mu}^{l'_\nu+1-\lambda}\varphi'_t\right]_\nu}{(l'_\nu+1-\lambda)!}\,\omega_{\mu+\lambda}$$

$$+ \sum_{\substack{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_\iota \\ \varkappa\geqq 2}} \left[\frac{\partial^{\varkappa-1}}{\partial\omega_\mu^{\varkappa-1}}\frac{\varDelta_\mu^{h-\mu}\varphi'_t}{(h-\mu)!}\right]_\nu \frac{\omega_{\mu+1}^{\varkappa_1}}{\varkappa_1!}\,\frac{\omega_{\mu+2}^{\varkappa_2}}{\varkappa_2!}\cdots\frac{\omega_{\mu+\iota}^{\varkappa_\iota}}{\varkappa_\iota!}.$$

Nun ist aber

$$(84)\qquad \left[\varDelta_\mu^{l'_\nu+1-\lambda}\varphi'_t\right]_\nu = 0 \quad \text{für } \lambda \geqq 2 \text{ nach Hilfssatz 6, Behauptung (57), § (17).}$$

Ausserdem ist mit Rücksicht auf die Gleichungen (10), § 13, für h und $\varkappa$

$$h-\mu \leqq l'_\nu + \mu + 1 - \varkappa - \mu \leqq l'_\nu - 1 \quad \text{wegen } \varkappa \geqq 2,$$

$$h-\mu+\varkappa-1 \leqq l'_\nu \leqq n_{\nu,\mu+1} - 1 \quad \text{wegen (55), § 17.}$$

Daraus folgt aber

$$(85)\qquad \left[\frac{\partial^{\varkappa-1}}{\partial\omega_\mu^{\varkappa-1}}\frac{\varDelta_\mu^{h-\mu}\varphi'_t}{(h-\mu)!}\right]_\nu = 0 \quad \text{für } \varkappa \geqq 2,$$

da ja die Voraussetzung des Hilfssatzes 6, § 17, erfüllt sind.

Wegen (84) und (85) ergibt sich aus (83)

$$\frac{\left[\varDelta_{\mu+\iota}^{l'_\nu+\mu+1}\varphi_t\right]_{\nu,\mu}}{(l'_\nu+\mu+1)!} \equiv \frac{\left[\varDelta_{\mu}^{l'_\nu+\mu+1}\varphi_t\right]_\nu}{(l'_\nu+\mu+1)!} + \frac{\left[\varDelta_{\mu}^{l'_\nu}\varphi'_t\right]_\nu}{l'_\nu!}\,\omega_{\mu+1},$$

und hieraus folgt, in Verbindung mit Formel (81), die Behauptung (82) von Hilfssatz 8 unmittelbar.

88. Mit der Verkleinerung des Index λ in $[\varDelta_\lambda^n \varphi_t^{-1}]_\nu$ beschäftigt sich

Hilfssatz 9: *Es seien zwei Zahlen n und λ'' gegeben derart, dass*

$$(86)\qquad n \leqq n_{\nu,\lambda''+1} + 2\lambda'' + 1.$$

Ausserdem sei

$$(87)\qquad n \leqq l'_\nu + \lambda''.$$

Dann ist für alle $\iota \geqq 1$

$$[\Delta^n_{\lambda''+\iota}\, \varphi_t^{-1}]_{\nu,\lambda''} \equiv [\Delta^n_{\lambda''}\, \varphi_t^{-1}]_\nu, \tag{88}$$

identisch in

$$\omega_{\lambda''+1},\ \omega_{\lambda''+2}, \ldots, \omega_{\lambda''+\iota}.$$

Bemerkung. Ist λ' der zu n gehörige durch die Beziehung (74) definierte Index, so kann man in der Identität (88) $\lambda'' = \lambda'$ setzen, da für $\lambda'' = \lambda'$ die Beziehung (86) wegen (74) sicherlich erfüllt ist.

Beweis: Aus der Beziehung (9), § 13, ergibt sich in Verbindung mit Formel (7), § 13, entsprechend der Entwicklung (83)

$$\frac{[\Delta^n_{\lambda''+\iota}\varphi_t^{-1}]_{\nu,\lambda''}}{n!} \equiv \frac{[\Delta^n_{\lambda''}\varphi_t^{-1}]_\nu}{n!} + \sum_{\tau=1}^{\iota} \frac{[\Delta^{n-\lambda''-\tau}_{\lambda''}\,\varphi_t]_\nu}{(n-\lambda''-\tau)!}\,\omega_{\lambda''+\tau} \tag{89}$$

$$+ \sum_{\substack{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\iota \\ \varkappa \geqq 2}} \left[\frac{\partial^{\varkappa-2}}{\partial\, \omega_{\lambda''}^{\varkappa-2}}\, \frac{\Delta^{h-2\lambda''}_{\lambda''}\,\varphi_t'}{[h-2\lambda'']!}\right]_\nu \frac{\omega^{\varkappa_1}_{\lambda''+1}}{\varkappa_1!}\, \frac{\omega^{\varkappa_2}_{\lambda''+2}}{\varkappa_2!} \cdots \frac{\omega^{\varkappa_\iota}_{\lambda''+\iota}}{\varkappa_\iota!}.$$

Aus (87) folgt

$$n - \lambda'' - \tau \leqq l_\nu' - 1,$$

d. h. aber, es ist wegen (54), § 17,

$$[\Delta^{n-\lambda''-\tau}_{\lambda''}\,\varphi_t]_\nu = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq \tau \leqq \iota.$$

Andererseits folgt aus (10), § 13, in Verbindung mit (86) und (87) für $\varkappa \geqq 2$

$$h - 2\lambda'' \leqq n - \varkappa - 2\lambda'' \leqq l_\nu' - 2 - \lambda'',$$

$$h - 2\lambda'' + \varkappa - 2 \leqq n - 2\lambda'' - 2 \leqq n_{\nu,\lambda''+1} - 1.$$

Mithin ist nach Hilfssatz 6, § 17,

$$\left[\frac{\partial^{\varkappa-2}}{\partial\, \omega_{\lambda''}^{\varkappa-2}}\, \Delta^{h-2\lambda''}_{\lambda''}\,\varphi_t'\right]_\nu = 0.$$

Nunmehr folgt die Behauptung (88) unmittelbar aus (89). Was zu beweisen war.

89. Zum Schluss formulieren wir noch einen etwas anders gearteten

Hilfssatz 10: Es sei $n_{\nu,\lambda} \leqq l'_\nu$, $\lambda \geqq 1$. Dann gilt identisch in $\omega_\lambda, \omega_{\lambda+1}, \ldots, \omega_{\lambda+\iota}$

$$(90)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\left[\Delta_{\lambda+\iota}^{n_{\nu,\lambda}+\lambda}\varphi_t\right]_{\nu,\lambda-1}}{(n_{\nu,\lambda}+\lambda)!} &\equiv \frac{\left[\Delta_{\lambda}^{n_{\nu,\lambda}+\lambda}\varphi_t\right]_{\nu,\lambda-1}(\omega_\lambda)}{(n_{\nu,\lambda}+\lambda)!} \\ &\equiv \frac{\left[\Delta_{\lambda}^{n_{\nu,\lambda}+\lambda}\varphi_t\right]_{\nu}}{(n_{\nu,\lambda}+\lambda)!} + \frac{l_t+n_{\nu,\lambda}}{p_t\,\alpha_{\nu,0}}\,\frac{\left[\Delta_{\lambda-1}^{n_{\nu,\lambda}}\varphi_t\right]_{\nu}}{n_{\nu,\lambda}!}(\omega_\lambda-\alpha_{\nu,\lambda}) \\ &\qquad - \frac{q}{p_t\,\alpha_{\nu,0}}\int\limits_{\alpha_{\nu,\lambda}}^{\omega_\lambda}\frac{\left[\Delta_{\lambda}^{n_{\nu,\lambda}}\Phi_t\right]_{\nu,\lambda-1}(\omega_\lambda)}{n_{\nu,\lambda}!}\,d\omega_\lambda. \end{aligned}\right.$$

Beweis: Wir beweisen zunächst den ersten Teil der Behauptung (90), das ist die Identität

$$(90^a)\qquad \left[\Delta_{\lambda+\iota}^{n_{\nu,\lambda}+\lambda}\varphi_t\right]_{\nu,\lambda-1}(\omega_\lambda, \omega_{\lambda+1}, \ldots, \omega_{\lambda+\iota}) \equiv \left[\Delta_{\lambda}^{n_{\nu,\lambda}+\lambda}\varphi_t\right]_{\nu,\lambda-1}(\omega_\lambda)$$

indem wir uns ebenso wie beim Beweis der Hilfsätze 7. und 9. auf die Formeln (7) und (9), § 13 stützen. Aus diesen Formeln ergibt sich nämlich die Entwicklung

$$\frac{\left[\Delta_{\lambda+\iota}^{n_{\nu,\lambda}+\lambda}\varphi_t\right]_{\nu,\lambda-1}}{(n_{\nu,\lambda}+\lambda)!} \equiv \frac{\left[\Delta_{\lambda}^{n_{\nu,\lambda}+\lambda}\varphi_t\right]_{\nu,\lambda-1}}{(n_{\nu,\lambda}+\lambda)!} + \sum_{\substack{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_\iota \\ \varkappa \geqq 1}} \left[\frac{\partial^{\varkappa-1}}{\partial\omega_\lambda^{\varkappa-1}}\,\frac{\Delta_\lambda^{h-\lambda}\varphi'_t}{(h-\lambda)!}\right]_{\nu,\lambda-1}\frac{\omega_{\lambda+1}^{\varkappa_1}}{\varkappa_1!}\,\frac{\omega_{\lambda+2}^{\varkappa_2}}{\varkappa_2!}\cdots\frac{\omega_{\lambda+\iota}^{\varkappa_\iota}}{\varkappa_\iota!}.$$

Nun ist aber nach (10), § 13, und wegen $\varkappa \geqq 1$

$$h+\varkappa \leqq n_{\nu,\lambda}+\lambda,$$

folglich

$$h-\lambda+\varkappa-1 \leqq n_{\nu,\lambda}-1,$$

$$h-\lambda \leqq n_{\nu,\lambda}-\varkappa \leqq l'_\nu - 1.$$

Mithin lässt sich auf die einzelnen Glieder der Summe Hilfsatz 6, § 17, anwenden, und man erhält

$$\left[\frac{\partial^{\varkappa-1}}{\partial\omega_\lambda^{\varkappa-1}}\,\frac{\Delta_\lambda^{h-\lambda}\varphi'_t}{(h-\lambda)!}\right]_{\nu,\lambda-1} = 0 \quad \text{für} \quad \varkappa \geqq 1,$$

da nach Formel (58), § 17, der Ausdruck $[\Delta_\lambda^{h-\lambda}\varphi_t']_{\nu,\lambda-1}$ gar nicht mehr von ω_λ abhängt. Damit ist die Identität (90^a) bewiesen.

Um nunmehr die Behauptung (90) in vollem Umfange zu beweisen, gehen wir von der Bemerkung aus, dass (90) offenbar für $\omega_\lambda = \alpha_{\nu,\lambda}$ richtig ist. Der Beweis von (90) ist somit erbracht, wenn jetzt noch die nach ω_λ *differenzierte* Gleichung (90) verifiziert wird. Die Differentiation von (90) nach ω_λ ergibt nun aber mit Rücksicht auf Formel (7), § 13,

$$(91)\qquad \frac{\left[\Delta_\lambda^{n_{\nu,\lambda}}\varphi_t'\right]_{\nu,\lambda-1}(\omega_\lambda)}{n_{\nu,\lambda}!} = \frac{l_t + n_{\nu,\lambda}}{p_t\,\alpha_{\nu,0}}\,\frac{\left[\Delta_{\lambda-1}^{n_{\nu,\lambda}}\varphi_t\right]_\nu}{n_{\nu,\lambda}!} - \frac{q}{p_t\,\alpha_{\nu,0}}\,\frac{\left[\Delta_\lambda^{n_{\nu,\lambda}}\Phi_t\right]_{\nu,\lambda-1}(\omega_\lambda)}{n_{\nu,\lambda}!}.$$

Um nunmehr (91) zu beweisen, gehe man von der aus der Identität (32), § 15, abgeleiteten Beziehung

$$(92)\qquad q\,\frac{\left[\Delta_\lambda^{n_{\nu,\lambda}}\Phi_t\right]_{\nu,\lambda-1}(\omega_\lambda)}{n_{\nu,\lambda}!} = (l_t + n_{\nu,\lambda})\,\frac{\left[\Delta_\lambda^{n_{\nu,\lambda}}\varphi_t\right]_{\nu,\lambda-1}(\omega_\lambda)}{n_{\nu,\lambda}!}$$

$$- (p_t + \lambda)\,\omega_\lambda\,\frac{\left[\Delta_\lambda^{n_{\nu,\lambda}-\lambda}\varphi_t'\right]_{\nu,\lambda-1}(\omega_\lambda)}{(n_{\nu,\lambda}-\lambda)!} - \sum_{\iota=0}^{\lambda-1}(p_t + \iota)\,\alpha_{\nu,\iota}\,\frac{\left[\Delta_\lambda^{n_{\nu,\lambda}-\iota}\varphi_t'\right]_{\nu,\lambda-1}(\omega_\lambda)}{(n_{\nu,\lambda}-\iota)!}$$

aus. Nun ist aber nach Hilfssatz 6, § 17, Behauptung (58) wegen der Voraussetzung $n_{\nu,\lambda} \leqq l_\nu'$

$$(93)\qquad \left[\Delta_\lambda^{n_{\nu,\lambda}-\iota}\varphi_t'\right]_{\nu,\lambda-1}(\omega_\lambda) \equiv \left[\Delta_{\lambda-1}^{n_{\nu,\lambda}-\iota}\varphi_t'\right]_\nu = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq \iota \leqq \lambda;$$

ferner ist nach Hilfssatz 7, da wegen (74) für $n = n_{\nu,\lambda}$ offenbar $\lambda' \leqq \lambda - 1$ ist,

$$(94)\qquad \left[\Delta_\lambda^{n_{\nu,\lambda}}\varphi_t\right]_{\nu,\lambda-1}(\omega_\lambda) \equiv \left[\Delta_{\lambda-1}^{n_{\nu,\lambda}}\varphi_t\right]_\nu,$$

wobei übrigens nach den Definitionsgleichungen (54), § 17, $\left[\Delta_{\lambda-1}^{n_{\nu,\lambda}}\varphi_t\right]_\nu \neq 0$ nur für $n_{\nu,\lambda} = l_\nu'$, (aber nicht für $n_{\nu,\lambda} < l_\nu'$) ist. Setzt man die Ergebnisse aus (93) und (94) in (92) ein, so folgt die behauptete Beziehung (91) unmittelbar. Damit ist aber Hilfssatz 10 vollständig bewiesen.

KAPITEL IV.

Die Kurvenverbände höherer Ordnung und ihre Indices.

§ 19. Die Funktion $\tilde{B}^{\lambda}$ und ihre Entwicklungskoeffizienten.

90. Um brauchbare Sätze über die Indices der K. V. höherer Ordnung abzuleiten, suchen wir zunächst, gestützt auf die im Kapitel III getroffenen Vorbereitungen, die Funktion $2\,B\,(\sigma^q, \sigma^{p_t}\,\Omega_\nu(\sigma))$ mit Hilfe des Enriquesschen Differentialoperators in eine Potenzreihe nach σ zu entwickeln und einen brauchbaren Ausdruck für den ersten, von Null verschiedenen Koeffizienten dieser Potenzreihe zu bestimmen.

Um die hierzu erforderlichen Rechnungen zu vereinfachen, führe man die Funktion

$$2\,\tilde{B}^{\lambda}(\sigma^q, \sigma^{p_t}\,\omega(\sigma)) = 2\,B\,(\sigma^q, \sigma^{p_t}\,\omega(\sigma)) + q\,A\,(\sigma^q, \sigma^{p_t}\,\omega(\sigma))\left(\frac{\sigma^{-p_t}}{p_t\,\omega_0} + \sum_{\varkappa=1}^{\lambda}\frac{a^{\lambda}_{\varkappa-1,1}}{p_t\,\omega_0}\,\sigma^{\varkappa-p_t} - \sum_{\varkappa=0}^{\lambda-2p_t}\frac{p_t+\varkappa}{q^2}\,\omega_\varkappa\,\sigma^{\varkappa+p_t}\right) \tag{95}$$

ein, unter $\omega(\sigma)$ die Potenzreihe (29), § 15, und unter $a^{\lambda}_{\varkappa,\iota}$ die in Hilfssatz 3, Formel (34) und (35), § 15 eingeführten Funktionen verstanden.

Es werde ferner

$$L_t = L - (l_t - q - p_t) \tag{96}$$

gesetzt, wobei L die Konstante aus Formel (50), § 3, bezeichnet.

Es sei jetzt

$$L_t \geqq 1, \tag{97}$$

denn die Fälle $L_t \leqq 0$, die auf K. V. der Ordnung 0 vom Typus I oder III führen (vgl. § 7), sind bereits in Kapitel II, § 12, erschöpfend behandelt worden. Dann wird nach Formel (46), § 2 und (54), § 3, aus (95)

$$\begin{aligned}2\,\tilde{B}^{\lambda} = \sigma^{l_t-q-p_t}\Bigg(&\varphi_t'(\sigma, \omega(\sigma)) - \frac{\sigma^{2p_t}}{q^2}\,\psi_t(\sigma, \omega(\sigma)) + \sigma^{L_t}\,V(\sigma)\\ &+ q\,\Phi_t(\sigma, \omega(\sigma))\left(\frac{1}{p_t\,\omega_0} + \sum_{\varkappa=1}^{\lambda}\frac{a^{\lambda}_{\varkappa-1,1}}{p_t\,\omega_0}\,\sigma^{\varkappa} - \sum_{\varkappa=0}^{\lambda-2p_t}\frac{p_t+\varkappa}{q^2}\,\omega_\varkappa\,\sigma^{\varkappa+2p_t}\right)\Bigg)\\ = \sigma^{l_t-q-p_t}&\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{B}^{\lambda}_n\,\sigma^n.\end{aligned} \tag{98}$$

91. Es sei, indem man wiederum an die in Gleichung (18), § 14, definierte, abkürzende Schreibweise anknüpft,

$$[2\,\tilde{B}^{\lambda}]_{\nu} = 2\,\tilde{B}^{\lambda}(\sigma^{q}, \sigma^{p_t}\,\Omega_{\nu}(\sigma)),$$ [1]

wobei $\Omega_{\nu}(\sigma)$ die Potenzreihe (52) aus § 17 bezeichnet, und ausserdem auf der rechten Seite von (95) bezw. (98) sämtliche Grössen $\omega_{\varkappa} = \alpha_{\nu,\varkappa}$ gesetzt sind. Entsprechende Bedeutung mögen die Symbole $[B]_{\nu}$, $[A]_{\nu}$ haben. Nunmehr ist offenbar für jedes λ

$$[2\,\tilde{B}^{\lambda}]_{\nu} \equiv [2\,B]_{\nu} \quad \text{identisch in } \sigma, \tag{99}$$

wobei $[2\,B]_{\nu}$ in die Potenzreihe

$$[2\,B]_{\nu} = \sigma^{l_t - q - p_t} \sum_{n=0}^{\infty} B_{\nu,n}\,\sigma^{n} \tag{100}$$

entwickelbar sei; denn nach der Definitionsgleichung (52), § 17, für die Potenzreihe $\Omega_{\nu}(\sigma)$ ist mit Rücksicht auf Formel (28), § 1, und (46), § 2,

$$[A]_{\nu} = \sigma^{l_t - q}\,[\Phi_t]_{\nu} \equiv 0.$$

Statt der Potenzreihe $[2\,B]_{\nu}$ können wir somit die Potenzreihe $[2\,\tilde{B}^{\lambda}]_{\nu}$ untersuchen, was erhebliche Vereinfachungen in den Rechnungen gestattet.

Wir suchen zunächst den n^{ten} Koeffizienten $\tilde{B}_n^n$ der Potenzreihe (98) für $\lambda = n$ zu berechnen. Dann ist nach Formel (4) und (5), § 13,

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_n^n &= \frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{d\sigma^n}\,\frac{2\,\tilde{B}^n}{\sigma^{l_t - q - p_t}}\Big/_{\sigma=0} = \frac{1}{n!}\,\Delta_n^n\,\frac{2\,\tilde{B}^n}{\sigma^{l_t - q - p_t}}\Big/_{\sigma=0} \\
&= v_{n-L_t} + \frac{\Delta_n^n \varphi_t'/_{\sigma=0}}{n!} + \frac{q}{p_t\,\omega_0}\left(\frac{\Delta_n^n\,\Phi_t/_{\sigma=0}}{n!} + \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa-1,1}^{n}\,\frac{\Delta_{n-\varkappa}^{n-\varkappa}\,\Phi_t/_{\sigma=0}}{(n-\varkappa)!}\right) \\
&\quad - \frac{1}{q^2}\left(\frac{\Delta_{n-2p_t}^{n-2p_t}\,\psi_t/_{\sigma=0}}{(n-2\,p_t)!} + q\sum_{\varkappa=0}^{n-2p_t}(p_t+\varkappa)\,\omega_{\varkappa}\,\frac{\Delta_{n-2p_t-\varkappa}^{n-2p_t-\varkappa}\,\Phi_t/_{\sigma=0}}{(n-2\,p_t-\varkappa)!}\right),
\end{aligned}$$

---

[1] Wir weisen ausdrücklich darauf hin, dass bei den in § 14 eingeführten Symbolen $[\Delta_{\mu}^{n}\,\Phi]_{\nu}$, $\left[\frac{\partial^{\varkappa}}{\partial\,\omega_{\mu}^{\varkappa}}\,\Delta_{\mu}^{n}\,\Phi\right]_{\nu}$ ausserdem auch noch $\sigma = 0$ gesetzt ist, während die hier auftretenden Symbole $[\tilde{B}^{\lambda}]_{\nu}$, $[A]_{\nu}$, $[B]_{\nu}$ weiter von σ abhängen.

oder aber, indem man Hilfssatz 3, § 15, Formel (38) und die Identität (51), § 16 heranzieht,

$$(101) \quad \tilde{B}_n^n = v_{n-L_t} + \sum_{\varkappa=0}^{n} b_{n,\varkappa}^n \frac{\Delta_{n-\varkappa}^{n-\varkappa}\varphi_t/_{\sigma=0}}{(n-\varkappa)!}$$

$$-\frac{1}{q^2}\left(c_{n-2p_t}\frac{\Delta_{n-2p_t}^{n-2p_t}\varphi_t^{-1}/_{\sigma=0}}{(n-2p_t)!} - \sum_{\varkappa=0}^{n-2p_t} c'_{n-2p_t,\varkappa}\,\omega_\varkappa \frac{\Delta_{n-2p_t-\varkappa}^{n-2p_t-\varkappa}\varphi_t/_{\sigma=0}}{(n-2p_t-\varkappa)!}\right);$$

dabei ist zu setzen:

$$(102) \quad \begin{cases} v_{n-L_t} = 0 \quad \text{für} \quad n - L_t < 0, \\ \Delta_{n-2p_t}^{n-2p_t}\varphi_t^{-1} = 0 \quad \text{für} \quad n - 2p_t < 0. \end{cases}$$

92. Nunmehr substituiere man in $2\tilde{B}^n$ für $\omega(\sigma)$ die Potenzreihe

$$\Omega_{\nu,\lambda}(\sigma) = \sum_{\varkappa=0}^{\lambda} \alpha_{\nu,\varkappa}\sigma^\varkappa + \sum_{\varkappa=\lambda+1}^{\infty} \omega_\varkappa \sigma^\varkappa$$

und bezeichne, ähnlich wie in den Definitionsgleichungen (19), § 14, mit $[2\tilde{B}^n]_{\nu,\lambda}$ die Funktion $2\tilde{B}^n(\sigma^q, \sigma^{p_t}\Omega_{\nu,\lambda}(\sigma))$, wobei ausserdem auch alle übrigen auf der rechten Seite von (98) auftretenden Grössen $\omega_\varkappa$ für $0 \leqq \varkappa \leqq \lambda$ gleich $\alpha_{\nu,\varkappa}$ gesetzt werden mögen.[1]

Entsprechend erhält man den n^{ten} Koeffizienten $[\tilde{B}_n^n]_{\nu,\lambda}$ der Entwicklung für $[2\tilde{B}^n]_{\nu,\lambda}$, indem man in $\tilde{B}_n^n$ die Grössen $\omega_\varkappa$ für $0 \leqq \varkappa \leqq \lambda$ durch $\alpha_{\nu,\varkappa}$ ersetzt. Statt $[\tilde{B}_n^n]_{\nu,\lambda}$ schreiben wir auch mitunter ausführlicher $[\tilde{B}_n^n]_{\nu,\lambda}(\omega_{\lambda+1}, \omega_{\lambda+2}, \ldots, \omega_{\lambda+\iota})$, um anzudeuten, dass dieser Ausdruck von $\omega_{\lambda+1}, \omega_{\lambda+2}, \ldots, \omega_{\lambda+\iota}$, aber nicht mehr von $\omega_{\lambda+\iota+1}$ abhängt.

93. Unter den in § 1 eingeführten Kurven

$$\vartheta = \theta_\nu(\varrho) = \sigma^{p_t}\Omega_\nu(\sigma)$$

fassen wir jetzt eine feste, reelle Kurve $\vartheta = \theta_{\bar\nu}^\circ(\varrho)$ ins Auge, und es sei $l_{\bar\nu}'^\circ$ die in § 17 Formel (54) eingeführte, der Kurve $\vartheta = \theta_{\bar\nu}^\circ(\varrho)$ zugeordnete Konstante, μ der zu $l_{\bar\nu}'^\circ$ gehörige durch die Beziehung (55), § 17, definierte Index.

[1] Vgl. die Fussnote S. 257.

Ferner sei n eine Zahl $\leqq l'^\circ_\nu + \mu$, und λ' der zu n gehörige Index, der durch die Beziehung (74), § 18, eindeutig festgelegt ist. Wir suchen nunmehr auf Grund der Beziehung (101) einen Ausdruck für $[\tilde{B}^n_n]^\circ_{\nu,\lambda'}$ zu bestimmen.

Nun ist aber nach Hilfssatz 7 bezw. Hilfssatz 9, § 18,

$$[\varDelta^{n-\varkappa}_{n-\varkappa}\varphi_t]^\circ_{\nu,\lambda'} \equiv [\varDelta^{n-\varkappa}_{\lambda'}\varphi_t]^\circ_\nu \text{ für } 0 \leqq \varkappa \leqq n,$$

$$\left[\varDelta^{n-2p_t}_{n-2p_t}\varphi_t^{-1}\right]^\circ_{\nu,\lambda'} \equiv \left[\varDelta^{n-2p_t}_{\lambda'}\varphi_t^{-1}\right]^\circ_\nu$$

identisch in $\omega_{\lambda'+1}, \omega_{\lambda'+2}, \ldots, \omega_{n-\varkappa}$, bezw. ω_{n-2p_t}.

Da ausserdem nach Formel (54), § 17,

$$[\varDelta^{n-\varkappa}_{\lambda'}\varphi_t]^\circ_\nu = 0 \text{ für } n-\varkappa \leqq l'^\circ_\nu - 1,$$

so ergibt sich aus (101) (man beachte Formel (102)!)

$$(103) \qquad [\tilde{B}^n_n]^\circ_{\nu,\lambda'} = v_{n-L_t} - \frac{c_{n-2p_t}}{q^2}\frac{[\varDelta^{n-2p_t}_{\lambda'}\varphi_t^{-1}]^\circ_\nu}{(n-2p_t)!} \cdot \text{für } 0 \leqq n \leqq l'^\circ_\nu - 1.$$

Für $l'^\circ_\nu \leqq n \leqq l'^\circ_\nu + \mu$ hat man mit Rücksicht auf (55), § 17, und (74), § 18,

$$n - l'^\circ_\nu \leqq n^\circ_{\nu,\lambda'+1} + \lambda' - n^\circ_{\nu,\mu} \leqq \lambda', \quad \text{wenn } \lambda' \leqq \mu - 1,$$

$$n - l'^\circ_\nu \leqq \mu, \quad \text{wenn } \lambda' = \mu.$$

Daraus folgt aber in Verbindung mit Hilfssatz 4 Formel (41), § 15, dass $b^n_{n,\varkappa}$ für $0 \leqq \varkappa \leqq n - l'^\circ_\nu$ nur von $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{\lambda'}$, aber nicht mehr von $\omega_{\lambda'+1}, \omega_{\lambda'+2}, \ldots,$ u. s. w. abhängt.

Mithin ergibt sich aus (101) für $l'^\circ_\nu \leqq n \leqq l'^\circ_\nu + \mu$

$$(104) \qquad [\tilde{B}^n_n]^\circ_{\nu,\lambda'} = v_{n-L_t} + \sum_{\varkappa=0}^{n-l'^\circ_\nu}[b^n_{n,\varkappa}]^\circ_\nu \frac{[\varDelta^{n-\varkappa}_{\lambda'}\varphi_t]^\circ_\nu}{(n-\varkappa)!}$$

$$- \frac{1}{q^2}\left(c_{n-2p_t}\frac{[\varDelta^{n-2p_t}_{\lambda'}\varphi_t^{-1}]^\circ_\nu}{(n-2p_t)!} - \sum_{\varkappa=0}^{n-2p_t-l'^\circ_\nu} c'_{n-2p_t,\varkappa}\,\alpha^\circ_{\nu,\varkappa}\frac{[\varDelta^{n-2p_t-\varkappa}_{\lambda'}\varphi_t]^\circ_\nu}{(n-2p_t-\varkappa)!}\right).$$

Die Formeln (103) und (104) lassen unmittelbar erkennen, dass die rechten Seiten der beiden Gleichungen gar nicht mehr von $\omega_{\lambda'+1}, \omega_{\lambda'+2}, \ldots,$ u. s. w.

abhängen. Daraus folgt aber in Verbindung mit der Identität (99) für den Koeffizienten $B_{\mathring{\nu},n}$ der Entwicklung (100)

$$B_{\mathring{\nu},n} = [\tilde{B}^n_n]_{\mathring{\nu}} = [\tilde{B}^n_n]_{\mathring{\nu},\lambda'}. \tag{105}$$

Diese Tatsache führt zur Formulierung von

Hilfssatz 11: *Es sei gleichzeitig*

$$n \leqq l'_{\mathring{\nu}} + \mu, \quad n_{\mathring{\nu},\lambda'} + \lambda' \leqq n \leqq n_{\mathring{\nu},\lambda'+1} + \lambda'.$$

Dann ist

$$B_{\mathring{\nu},n} = [\tilde{B}^n_n]_{\mathring{\nu},\lambda'},$$

wobei $[\tilde{B}^n_n]_{\mathring{\nu},\lambda'}$ *eine Grösse ist, die durch die Werte* $\alpha_{\mathring{\nu},0}, \alpha_{\mathring{\nu},1}, \ldots, \alpha_{\mathring{\nu},\lambda'}$ *vollständig bestimmt ist, und nicht mehr von den Veränderlichen* $\omega_{\lambda'+1}, \omega_{\lambda'+2}, \ldots,$ u. s. w. *abhängt.*

94. Wir kommen jetzt noch einmal auf den Fall

$$n = n_{\mathring{\nu},\lambda'} + \lambda', \quad 1 \leqq \lambda' \leqq \mu$$

zurück und suchen aus (101) einen Ausdruck für $[\tilde{B}^n_n]_{\mathring{\nu},\lambda'-1}$ abzuleiten.

Aus $n - \varkappa \leqq n_{\mathring{\nu},\lambda'} + \lambda' - 1$ für $\varkappa \geqq 1$, folgt nach Hilfssatz 7, § 18, bezw. Hilfssatz 9, § 18

$$[\Delta^{n-\varkappa}_{n-\varkappa}\varphi_t]_{\mathring{\nu},\lambda'-1} \equiv \begin{cases} [\Delta^{n-\varkappa}_{\lambda'-1}\varphi_t]_{\mathring{\nu}} & \text{für } 1 \leqq \varkappa \leqq n - l'_{\mathring{\nu}} \\ 0 & \text{für } \varkappa \geqq n - l'_{\mathring{\nu}} + 1, \end{cases} \tag{106}$$

$$\left[\Delta^{n-2p_t}_{n-2p_t}\varphi_t^{-1}\right]_{\mathring{\nu},\lambda'-1} \equiv \left[\Delta^{n-2p_t}_{\lambda'-1}\varphi_t^{-1}\right]_{\mathring{\nu}} \tag{107}$$

identisch in $\omega_{\lambda'}, \omega_{\lambda'+1}, \ldots, \omega_{n-\varkappa}$ bzw. ω_{n-2p_t}.

Wir setzen jetzt ausserdem noch $n < l'_{\mathring{\nu}} + \mu$ voraus. Dann ist der Fall $\lambda' = \mu$ nur möglich, wenn $n_{\mathring{\nu},\mu} < l'_{\mathring{\nu}}$. Man erhält somit

$$n - l'_{\mathring{\nu}} = n_{\mathring{\nu},\lambda'} + \lambda' - l'_{\mathring{\nu}} \leqq n_{\mathring{\nu},\lambda'} - n_{\mathring{\nu},\mu} + \lambda' \leqq \lambda' - 1 \quad \text{für } 1 \leqq \lambda' \leqq \mu - 1,$$

$$n - l'_{\mathring{\nu}} = n_{\mathring{\nu},\mu} + \mu - l'_{\mathring{\nu}} \leqq \mu - 1 \quad \text{für } \lambda' = \mu.$$

Mithin hängt in dem sich aus (101) ergebenden Ausdruck für $[\tilde{B}^n_n]_{\mathring{\nu},\lambda'-1}$ die Grösse $b^n_{n,\varkappa}$ für $0 \leqq \varkappa \leqq n - l'_{\mathring{\nu}} \leqq \lambda' - 1$ nach Hilfssatz 4 Formel (41), § 15, höchstens von $\alpha_{\mathring{\nu},0}, \alpha_{\mathring{\nu},1}, \ldots, \alpha_{\mathring{\nu},\lambda'-1}$ aber nicht mehr von $\omega_{\lambda'}, \omega_{\lambda'+1}, \ldots,$ u. s. w.

ab. Da ausserdem nach Formel (106) diejenigen Glieder, welche den Koeffizienten $b^n_{n,\varkappa}$ für $\varkappa \geqq n - l'_{\overset{\circ}{\nu}} + 1$ enthalten, verschwinden, so ist (vergl. Formel (36) § 15)

$$b^n_{n,0} \frac{[\Delta^n_n \varphi_t]_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'-1}}{n!} = \frac{l_t + n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'} + \lambda'}{p_t \alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}} \frac{\left[\Delta^{n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}+\lambda'}_{n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}+\lambda'} \varphi_t\right]_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'-1}}{(n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}+\lambda')!}$$

das einzige Glied in dem Ausdruck für $[\tilde{B}^n_n]_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'-1}$, das von $\omega_{\lambda'}$ abhängt, und man erhält nach Hilfssatz 10 Formel (90), § 18, mit Rücksicht darauf, dass $\left[\Delta^{n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}}_{\lambda'} \varphi_t\right]_{\overset{\circ}{\nu}} = 0$ wegen $n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'} < l'_{\overset{\circ}{\nu}}$

$$(108) \qquad \left[\tilde{B}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}+\lambda'}_{n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}+\lambda'}\right] = \left[\tilde{B}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}+\lambda'}_{n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}+\lambda'}\right]_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'-1}(\omega_{\lambda'})$$

$$= -\frac{q(l_t + n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'} + \lambda')}{p_t^2 \alpha^2_{\overset{\circ}{\nu},0}} \int\limits_{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}}^{\omega_{\lambda'}} \frac{\left[\Delta^{n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}}_{\lambda'} \Phi_t\right]_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'-1}}{n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}!} d\,\omega_{\lambda'} + [\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},1}, \ldots, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}]$$

unter $[\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},1}, \ldots, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}]$, wie in Hilfssatz 4 Formel (40) § 15, einen Ausdruck verstanden, der durch die $\lambda' + 1$ Konstanten $\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},1}, \ldots, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}$ bestimmt ist, aber nicht mehr von der Veränderlichen $\omega_{\lambda'}$ abhängt.

Der bequemeren Schreibweise halber setzen wir jetzt zur Abkürzung

$$(109) \qquad \Psi_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}(\omega_{\lambda'}) = \frac{q(l_t + n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'} + \lambda')}{p_t^2 \alpha^2_{\overset{\circ}{\nu},0}} \int\limits_{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}}^{\omega_{\lambda'}} \frac{\left[\Delta^{n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}}_{\lambda'} \Phi_t\right]_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'-1}(\omega_{\lambda'})}{n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}!} d\,\omega_{\lambda'}.$$

Um endlich auch noch den Ausdruck $[\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},1}, \ldots, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}]$ explizit anzugeben, gehe man von der Tatsache aus, dass nach Formel (99)

$$[\tilde{B}^n_n]_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'-1}(\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}) = [\tilde{B}^n_n]_{\overset{\circ}{\nu}} = B_{\overset{\circ}{\nu},n}$$

ist, und so erhält man schliesslich aus Formel (108)

$$(110) \qquad \left[\tilde{B}^{n_{\overset{\circ}{\nu}},\lambda'+\lambda'}_{n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}+\lambda'}\right]_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'-1}(\omega_{\lambda'}) = B_{\overset{\circ}{\nu},n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}+\lambda'} - \Psi_{\overset{\circ}{\nu},\lambda'}(\omega_{\lambda'}),$$

wobei $B_{\overset{\circ}{\nu}, n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda'}+\lambda'}$ je nachdem $n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda'} + \lambda' \geqq l'_{\overset{\circ}{\nu}}$ oder $\leqq l'_{\overset{\circ}{\nu}} - 1$ durch Formel (104) oder Formel (103) vollständig bestimmt ist.

Unsere Ergebnisse fassen wir zusammen in

Hilfssatz 12: *Es sei*

$$n = n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda'} + \lambda' < l'_{\overset{\circ}{\nu}} + \mu.$$

Dann hängt der Koeffizient $\left[\tilde{B}^{n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda'} + \lambda'}_{n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda'} + \lambda'}\right]_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda'-1}$ *nur von* $\omega_{\lambda'}$, *aber nicht mehr von* $\omega_{\lambda'+1}, \omega_{\lambda'+2}, \ldots,$ u. s. w. *ab und wird durch Formel* (110) *dargestellt.*

Ist

$$\vartheta = \theta_\nu(\varrho) = \sigma^{p_t} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \alpha_{\nu, \varkappa} \sigma^\varkappa$$

eine beliebige Kurve des K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda'-1}\}$, *d. h. ist* $\alpha_{\nu, \varkappa} = \alpha_{\overset{\circ}{\nu}, \varkappa}$ *für* $0 \leqq \varkappa \leqq \lambda' - 1$, *so wird offenbar*

$$B_{\nu, n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda'} + \lambda'} + \left[\tilde{B}^{n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda} + \lambda'}_{n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda'} + \lambda'}\right]_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda'-1} (\alpha_{\nu, \lambda'}). \tag{111}$$

Formel (111) liefert somit den $n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda'} + \lambda'^{\text{ten}}$ Koeffizienten von $2B(\sigma^q, \vartheta)$, wenn man in diese Funktion für ϑ eine beliebige Kurve des K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda'-1}\}$ einsetzt. Hierbei ist nach dem Satz von Enriques, § 14, die Grösse $\alpha_{\nu, \lambda'}$ eine Wurzel der Gleichung vom Grade $r_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda'-1}$

$$\left[\Delta^{n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda'}}_{\lambda'} \Phi_t\right]_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda'-1} (\omega_{\lambda'}) = 0, \tag{112}$$

deren explizite Gestalt in Formel (27), § 14 angegeben ist. Ausserdem ist die Gleichung (112) nach Formel (109) mit der Gleichung

$$\Psi'_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda'}(\omega_{\lambda'}) = 0 \tag{113}$$

äquivalent.

95. Es sei jetzt

$$n = n_{\overset{\circ}{\nu}, \mu} + \mu, \quad l'_{\overset{\circ}{\nu}} = n_{\overset{\circ}{\nu}, \mu}.$$

Um einen expliziten Ausdruck für $[\tilde{B}^n_n]_{\overset{\circ}{\nu}, \mu-1}$ aus der Beziehung (101) abzuleiten, bemerken wir zunächst, dass auch in diesem Fall die Identitäten (106) und (107) für $\lambda' = \mu$ gelten. Ferner folgt nach Hilfssatz 4 Formel (41), § 15, dass $b^n_{n,\varkappa}$ für $0 \leqq \varkappa \leqq \mu - 1$ nur von $\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},1}, \ldots, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}$ abhängt, während

$$(114) \qquad b^n_{n,\mu} = -\frac{(l_t + n - \mu)(p_t + \mu)}{p_t^2\, \alpha^2_{\overset{\circ}{\nu},0}}\, \omega_\mu + [\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},1}, \ldots, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}]$$

$$= -\frac{(l_t + n_{\overset{\circ}{\nu},\mu})(p_t + \mu)}{p_t^2\, \alpha^2_{\overset{\circ}{\nu},0}}\, (\omega_\mu - \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}) + [\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},1}, \ldots, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}]$$

wird. Ausserdem verschwinden wegen $n - l'_{\overset{\circ}{\nu}} = \mu$ nach Formel (106) alle Glieder mit einem Koeffizienten $b^n_{n,\varkappa}$, wenn $\varkappa \geqq \mu + 1$ ist.

Mithin hängen in dem sich aus (101) ergebenden Ausdruck für $\left[\tilde{B}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}_{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}\right]_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}$ nur die beiden Glieder

$$b^n_{n,0}\, \frac{[\varDelta^n_\mu \varphi_t]_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}(\omega_\mu)}{n!} \quad \text{und} \quad b^n_{n,\mu}\, \frac{[\varDelta^{n-\mu}_{\mu-1}\varphi_t]_{\overset{\circ}{\nu}}}{(n-\mu)!}$$

von ω_μ ab.

Zieht man noch Hilfssatz 10, § 18, heran, so erhält man schliesslich in Verbindung mit Formel (36), § 15, und Formel (14)

$$\left[\tilde{B}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}_{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}\right]_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1} = \left[\tilde{B}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}_{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}\right]_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}(\omega_\mu)$$

$$= \frac{(l_t + n_{\overset{\circ}{\nu},\mu})(l_t + n_{\overset{\circ}{\nu},\mu} - p_t)}{p_t^2\, \alpha^2_{\overset{\circ}{\nu},0}}\, \frac{\left[\varDelta^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}}_{\mu-1}\varphi_t\right]_{\overset{\circ}{\nu}}}{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}!}\, (\omega_\mu - \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}) - \Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu)$$

$$+ [\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},1}, \ldots, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}],$$

unter $\Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ den in Gleichung (109) definierten Ausdruck für $\lambda' = \mu$ verstanden. Schliesslich lässt sich der Ausdruck $[\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},1}, \ldots, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}]$ leicht explizit bestimmen, wenn man berücksichtigt, dass wegen (99)

$$\left[\tilde{B}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}_{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}\right]_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}(\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}) = \left[\tilde{B}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}_{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}\right]_{\overset{\circ}{\nu}} = B_{\overset{\circ}{\nu},\, n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}$$

wird und der Wert für $B_{\overset{\circ}{\nu},\, n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}$ durch Formel (104) gegeben ist.

Wir fassen das Ergebnis dieses Abschnitts zusammen in

Hilfssatz 13. *Es sei* $l'_{\overset{\circ}{\nu}} = n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}$. *Dann hängt der Koeffizient* $\left[\tilde{B}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}_{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}\right]_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}$ *nur von* ω_μ, *aber nicht mehr von* $\omega_{\mu+1}, \omega_{\mu+2}, \ldots$, u. s. w. *ab, und es ist*

$$\left[\tilde{B}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}_{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}\right]_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1} = B_{\overset{\circ}{\nu},\, n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu} + \frac{(l_t + n_{\overset{\circ}{\nu},\mu})(l_t + n_{\overset{\circ}{\nu},\mu} - p_t)}{p_t^2\, \alpha^2_{\overset{\circ}{\nu},0}} \frac{\left[\Delta^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}}_{\mu-1}\varphi_t\right]_{\overset{\circ}{\nu}}}{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}!}(\omega_\mu - \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}) - \Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu). \tag{115}$$

Ist $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ (vgl. Hilfssatz 12) *eine beliebige Kurve des K. V.* $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}\}$, *so wird offenbar wieder* wie in Hilfssatz 12 Formel (111)

$$B_{\nu,\, n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu} = \left[\tilde{B}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}_{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}\right]_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}(\alpha_{\nu,\mu}). \tag{116}$$

Hierbei ist ebenso wie in Hilfssatz 12 *die Grösse* $\alpha_{\nu,\mu}$ *eine Wurzel der Gleichung*

$$\Psi'_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu) = 0.$$

96. Zum Schluss suchen wir den Koeffizienten $\left[\tilde{B}^{l'_{\overset{\circ}{\nu}}+\mu+1}_{l'_{\overset{\circ}{\nu}}+\mu+1}\right]_{\overset{\circ}{\nu},\mu}$ mit Hilfe von (101) zu bestimmen.

Aus $l'_{\overset{\circ}{\nu}} + \mu + 1 - \varkappa \leqq l'_{\overset{\circ}{\nu}} + \mu \leqq n_{\overset{\circ}{\nu},\mu+1} - 1 + \mu$ für $\varkappa \geqq 1$ (vgl. Formel (55), § 17) folgt mit Rücksicht auf Hilfssatz 7 bezw. 9, § 18,

$$\left[\Delta^{l'_{\overset{\circ}{\nu}}+\mu+1-\varkappa}_{l'_{\overset{\circ}{\nu}}+\mu+1-\varkappa}\varphi_t\right]_{\overset{\circ}{\nu},\mu} \equiv \begin{cases} \left[\Delta^{l'_{\overset{\circ}{\nu}}+\mu+1-\varkappa}_{\mu}\varphi_t\right]_{\overset{\circ}{\nu}} & \text{für } 1 \leqq \varkappa \leqq \mu + 1, \\ 0 & \text{für } \varkappa \geqq \mu + 2, \end{cases}$$

$$\left[\Delta^{l'_{\overset{\circ}{\nu}}+\mu+1-2p_t}_{l'_{\overset{\circ}{\nu}}+\mu+1-2p_t}\varphi_t^{-1}\right]_{\overset{\circ}{\nu},\mu} \equiv \left[\Delta^{l'_{\overset{\circ}{\nu}}+\mu+1-2p_t}_{\mu}\varphi_t^{-1}\right]_{\overset{\circ}{\nu}}$$

identisch in $\omega_{\mu+1}, \omega_{\mu+2}, \ldots$, u. s. w.

Berücksichtigt man, dass nach Hilfssatz 4, § 15, die Grössen $b^{l'_{\overset{\circ}{\nu}}+\mu+1}_{l'_{\overset{\circ}{\nu}}+\mu+1,\varkappa}$ für $0 \leqq \varkappa \leqq \mu$ nur von $\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},1}, \ldots, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}$, aber nicht von $\omega_{\mu+1}, \omega_{\mu+2}, \ldots$, u. s. w. abhängen, während nach Formel (41), § 15,

$$b^{l'_{\overset{\circ}{\nu}}+\mu+1}_{l'_{\overset{\circ}{\nu}}+\mu+1,\mu+1} = -\frac{(l_t + l'_{\overset{\circ}{\nu}})(p_t + \mu + 1)}{p_t^2\, \alpha^2_{\overset{\circ}{\nu},0}}\,\omega_{\mu+1} + [\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},1}, \ldots, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}] \tag{117}$$

wird, so erhält man als einzige Glieder des Ausdruckes für $\left[\tilde{B}^{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}_{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}\right]_{\mathring{\nu},\mu}$, welche von $\omega_{\mu+1}$ abhängen:

$$b^{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}_{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1,\,0}\,\frac{\left[\Delta^{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}_{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}\varphi_t\right]_{\mathring{\nu},\mu}}{(l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1)!} \quad \text{und} \quad b^{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}_{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1,\,\mu+1}\,\frac{\left[\Delta^{l'_{\mathring{\nu}}}_{\mu}\varphi_t\right]_{\mathring{\nu}}}{l'_{\mathring{\nu}}!}.$$

Zieht man noch zur Berechnung von $b^{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}_{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1,0}$ bezw. von $\Delta^{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}_{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}\varphi_t$ Formel (36), § 15, besw. Hilfssatz 8, § 18, heran, so ergibt sich schliesslich aus (101) in Verbindung mit Formel (117)

$$\left[\tilde{B}^{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}_{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}\right]_{\mathring{\nu},\mu} = \left[\tilde{B}^{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}_{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}\right]_{\mathring{\nu},\mu}(\omega_{\mu+1}) \tag{118}$$

$$= \frac{(l_t+l'_{\mathring{\nu}})(l_t+l'_{\mathring{\nu}}-p_t)}{p_t^2\,\alpha^2_{\mathring{\nu},0}}\,\frac{\left[\Delta^{l'_{\mathring{\nu}}}_{\mu'}\varphi_t\right]_{\mathring{\nu}}}{l'_{\mathring{\nu}}!}\,\omega_{\mu+1} + \left[\alpha_{\mathring{\nu},0},\ \alpha_{\mathring{\nu},1},\ \ldots,\ \alpha_{\mathring{\nu},\mu}\right],$$

wobei $\mu' \leqq \mu$ durch die Bedingung (78), § 18, bestimmt ist.

Da wegen (99)

$$\left[\tilde{B}^{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}_{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}\right]_{\mathring{\nu},\mu}(\alpha_{\mathring{\nu},\mu+1}) = \left[\tilde{B}^{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}_{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}\right]_{\mathring{\nu}} = B_{\mathring{\nu},\,l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}$$

ist, so lässt sich die Beziehung (118) auch in der Form

$$\left[\tilde{B}^{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}_{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}\right]_{\mathring{\nu},\mu} = B_{\mathring{\nu},\,l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1} + \frac{(l_t+l'_{\mathring{\nu}})(l_t+l'_{\mathring{\nu}}-p_t)}{p_t^2\,\alpha^2_{\mathring{\nu},0}} \cdot \frac{\left[\Delta^{l'_{\mathring{\nu}}}_{\mu'}\varphi_t\right]_{\mathring{\nu}}}{l'_{\mathring{\nu}}!}\,(\omega_{\mu+1}-\alpha_{\mathring{\nu},\mu+1}) \tag{119}$$

schreiben. Unser Ergebnis fassen wir zusammen in

Hilfssatz 14: *Der Koeffizient* $\left[\tilde{B}^{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}_{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}\right]_{\mathring{\nu},\mu}$ *hängt nur von* $\omega_{\mu+1}$, *aber nicht mehr von* $\omega_{\mu+2}, \omega_{\mu+3}, \ldots,$ u. s. w. *ab und wird durch die Formel* (119) *dargestellt.*

Ist $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ *eine beliebige Kurve des K. V.* $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu}\}$, *so ist,* entsprechend Hilfssatz 12 Formel (111)

$$B_{\nu,\,l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1} = \left[\tilde{B}^{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}_{l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1}\right]_{\mathring{\nu},\mu}(\alpha_{\nu,\,\mu+1}). \tag{120}$$

Hierbei ist nach dem Satz von Enriques, § 14, in Verbindung mit Formel (109) *die Grösse* $\alpha_{\nu,\mu+1}$ *eine Wurzel der Gleichung*

$$\Psi'_{\overset{\circ}{\nu},\mu+1}(\omega_{\mu+1}) = 0.$$

§ 20. Die vier Typen der Kurvenverbände höherer Ordnung.

97. Im Kapitel II hat sich bereits für die Indices fast aller K. V. der Ordnung 0 eine Abschätzung beweisen lassen, aus welcher die Behauptung $i(0) \geqq -1$, das eigentliche Ziel unserer Untersuchung (vergl. die Ausführungen der Abschnitte 8. und 9. der Einleitung), leicht abzuleiten war; ausgenommen war jedoch dort der Fall, dass der zu untersuchende K. V. $\begin{Bmatrix} + \\ p_t \end{Bmatrix}$ bezw. $\begin{Bmatrix} - \\ p_t \end{Bmatrix}$ vom allgemeinen Typus II, d. h. *nicht vom Normaltypus II*, ist. In dem folgenden Paragraphen dieses Kapitels haben wir uns ausschliesslich mit diesem Fall zu beschäftigen.

Nach Definition VII, § 7, existiert dann eine Wurzel $\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}$ der Gleichung $F_{t,0}(\omega) = 0$, derart dass gleichzeitig $f_{t,0}(\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}) = 0$ ist. Ist jetzt $\vartheta = \theta_{\overset{\circ}{\nu}}(\varrho)$ eine Kurve des K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}\}$ so ist nach den Definitionsgleichungen (54), § 17, die dieser Kurve zugeordnete Zahl $l'_{\overset{\circ}{\nu}} \geqq 1$ wegen

$$[\varDelta_0^0 \varphi_t]_{\overset{\circ}{\nu}} = f_{t,0}(\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}) = 0 \text{ (vgl. Formel (6), § 13).}$$

Ferner ergibt sich mit Rücksicht auf die Beziehung (72), § 7, für den ersten Koeffizienten $B_{\overset{\circ}{\nu},0}$ der Entwicklung (100), § 19,

$$B_{\overset{\circ}{\nu},0} = \lim_{\sigma\to 0} \frac{[2\,B]}{\sigma^{l_t-q-p_t}} \to \frac{l_t}{p_t\,\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}} f_{t,0}(\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}) = 0. \tag{121}$$

98. Ausser der in § 17 Formel (54) und (55) eingeführten Zahl $l'_{\overset{\circ}{\nu}}$ ordne man jetzt der Kurve $\vartheta = \theta_{\overset{\circ}{\nu}}(\varrho)$ eine zweite Zahl $l''_{\overset{\circ}{\nu}}$ zu, die durch die Gleichungen

$$B_{\overset{\circ}{\nu},n} = 0 \text{ für } 0 \leqq n \leqq l''_{\overset{\circ}{\nu}} - 1,\ B_{\overset{\circ}{\nu},l''_{\overset{\circ}{\nu}}} \neq 0 \tag{122}$$

definiert wird.

In dem hier betrachteten Falle ist immer $l''_{\overset{\circ}{\nu}} \geqq 1$ wegen (121). Ausserdem ist $l''_{\overset{\circ}{\nu}}$ eine endliche Zahl; denn aus $l''_{\overset{\circ}{\nu}} = \infty$ würde $B(\varrho, \theta_{\overset{\circ}{\nu}}(\varrho)) \equiv 0$ folgen und somit jeder Punkt der Kurve $\vartheta = \theta_{\overset{\circ}{\nu}}(\varrho)$ ein Nabel sein, im Widerspruch mit der Voraussetzung, dass der Punkt $\varrho = 0$ ein isolierter Nabelpunkt ist.

Endlich werde durch die Abschätzung

$$n_{\stackrel{\circ}{\nu},\tau}+\tau \leqq l''_{\stackrel{\circ}{\nu}} \leqq n_{\stackrel{\circ}{\nu},\tau+1}+\tau \tag{123}$$

ein zu $l''_{\stackrel{\circ}{\nu}}$ gehöriger Index τ eindeutig festgelegt.

99. Die K. V. $\{\alpha_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda}\}$ der Ordnung $\lambda+1$, deren Index wir im folgenden zu untersuchen haben, mögen so, wie sie in der Definition II, § 4, eingeführt wurden, wieder nur reelle Kurven $\vartheta=\theta_\nu(\varrho)$ enthalten, zum Unterschied von den in § 14 betrachteten K. V. $[\alpha_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda}]$. Der K. V. $\{\alpha_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda}\}$ setzt sich somit aus der Gesamtheit der in $[\alpha_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda}]$ enthaltenen reellen Kurven zusammen. Bezeichnet wieder, wie in § 14 und § 17, $r_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda}$ die Mächtigkeit von $[\alpha_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda}]$, $r^*_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda}$ die Mächtigkeit von $\{\alpha_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda}\}$, so ist offenbar $r^*_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda}\leqq r_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda}$, und *ausserdem sind* $r_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda}$ *und* $r^*_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda}$ *beide entweder gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade.* Wir erinnern endlich daran, dass nach dem Satz von Enriques, § 14, $r_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda}$ ausserdem gleich der Ordnung der Wurzel $\alpha_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda}$ der Gleichung

$$\left[\Delta_\lambda^{n_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda}}\Phi_t\right]_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda-1}(\omega_\lambda)=0$$

ist.

100. Dies vorausgeschickt, gehen wir dazu über, gewisse Typen von Verbänden höherer Ordnung zu charakterisieren.

Definition IX: *Ein K. V.* $\{\alpha_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda-1}\}$ *heisst, für* $\lambda\geqq 1$, *K. V. vom Typus I, wenn er im Sinne der Definition V,* § 5, *von erster Art ist.*

Definition X: *Der K. V.* $\{\alpha_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda-1}\}$ *heisst, für* $\lambda\geqq 1$, *K. V. vom Typus II, wenn*

erstens $B_{\stackrel{\circ}{\nu},n}=0$ *für* $0\leqq n\leqq n_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda}+\lambda-1$

zweitens *für alle Kurven* $\vartheta=\theta_\nu(\varrho)$ *des K. V.* $\{\alpha_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda-1}\}$

$$B_{\nu,n_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda}+\lambda}=C-\Psi_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda}(\alpha_{\nu,\lambda}). \tag{124}$$

Hierbei bezeichnet $\Psi_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda}(\omega_\lambda)$ die in Formel (109), § 19, definierte Funktion und C eine Grösse, die durch die Werte $\alpha_{\stackrel{\circ}{\nu},0},\alpha_{\stackrel{\circ}{\nu},1},\ldots,\alpha_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda}$ bestimmt ist, aber nicht von $\alpha_{\nu,\lambda}$ abhängt (d. h. sich bezüglich $\alpha_{\nu,\lambda}$ wie eine Konstante verhält). $\alpha_{\nu,\lambda}$ selbst ist offenbar eine beliebige Wurzel der Gleichung

$$\Psi'_{\stackrel{\circ}{\nu},\lambda}(\omega_\lambda)=0 \quad \text{(vergl. Gleichung (112) und (113), § 19).} \tag{125}$$

Definition XI: *Der K. V.* $\{\alpha^{\circ}_{\nu,\lambda-1}\}$ *heisst für* $\lambda \geqq 1$ *K. V. vom Typus III, wenn*

erstens $B^{\circ}_{\nu,n} = 0$ *für* $0 \leqq n \leqq n^{\circ}_{\nu,\lambda} + \lambda - 1$

zweitens *für alle Kurven* $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ *des K. V.* $\{\alpha^{\circ}_{\nu,\lambda-1}\}$

$$B_{\nu, n^{\circ}_{\nu,\lambda}+\lambda} = C_1 + C_2\,\alpha_{\nu,\lambda} - \Psi^{\circ}_{\nu,\lambda}(\alpha^{\circ}_{\nu,\lambda}). \tag{126}$$

Hierbei bezeichnen C_1 und C_2 Grössen, die (ebenso wie die Grösse C in Definition X) sich bezüglich $\alpha_{\nu,\lambda}$ wie eine Konstante verhalten. $\alpha_{\nu,\lambda}$ selbst ist eine beliebige Wurzel der Gleichung (125).

Definition XII: *Der K. V.* $\{\alpha^{\circ}_{\nu,\mu}\}$ *heisst für* $\mu \geqq 0$ *K. V. vom Typus IV, wenn*

erstens $B'^{\circ}_{\nu,n} = 0$ *für* $0 \leqq n \leqq l'^{\circ}_{\nu} + \mu$

zweitens *für alle Kurven* $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ *des K. V.* $\{\alpha^{\circ}_{\nu,\mu}\}$

$$B_{\nu, l'^{\circ}_{\nu}+\mu+1} = C_1 + C_2\,\alpha_{\nu,\mu+1}, \tag{127}$$

wobei unter C_1 und C_2 Grössen derselben Art wie in Definition XI zu verstehen sind. $\alpha_{\nu,\mu+1}$ selbst ist eine beliebige Wurzel der Gleichung

$$\Psi'^{\circ}_{\nu,\mu+1}(\omega_{\mu+1}) = 0. \tag{128}$$

Die drei Typen I, II, III von K. V einer Ordnung $\geqq 1$ erweisen sich als sinngemässe Verallgemeinerungen der in Kapitel II, § 7, eingeführten drei Typen der K. V. der Ordnung Null. Der in Definition XII formulierte Typus IV hat bei den K. V. der Ordnung Null kein genaues Analogon.

101. Die Hilfssätze des § 19 reichen bereits aus, um alle diejenigen für unsere Untersuchung wichtigen Fälle zu charakterisieren, in welchen die oben definierten vier Typen auftreten.

Um die Tabelle der Typen aufzustellen, haben wir, indem wir an die Abschätzung (55), § 17, erinnern, die beiden Fälle zu unterscheiden, dass

(129) ***erstens*** $n^{\circ}_{\nu,\mu} + 1 \leqq l'^{\circ}_{\nu} \leqq n^{\circ}_{\nu,\mu+1} - 1$ $(\mu \geqq 0)$ aber $l'^{\circ}_{\nu} = \infty$,

(130) ***zweitens*** $l'^{\circ}_{\nu} = n^{\circ}_{\nu,\mu}$ $(\mu \geqq 1)$ wird.

Zunächst behandeln wir den durch die Beziehung (129) charakterisierten Fall. Ausserdem genüge die zu Beginn dieses Paragraphen in Formel (122) definierte immer endliche Grösse l''°_{ν} der Abschätzung

$$1 \leqq l''^{\circ}_{\nu} \leqq l'^{\circ}_{\nu} + \mu, \tag{1^a}$$

sodass für den zu $l''_{\mathring{\nu}}$ gehörigen, durch die Beziehung (123) bestimmten Index τ

$$0 \leqq \tau \leqq \mu$$

ist.

Dann sind alle K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu}, \lambda-1}\}$ für $0 \leqq \lambda - 1 \leqq \tau - 1$ und auch der zugehörige K. V. $\left\{\begin{matrix}+\\p_t\end{matrix}\right\}$ bezw. $\left\{\begin{matrix}-\\p_t\end{matrix}\right\}$ vom Typus II. Dies folgt für den K. V. der Ordnung Null aus der Bemerkung zu Beginn dieses Paragraphen in Abschnitt 97; für die K. V. der Ordnung $\geqq 1$ gilt, wie in Definition X gefordert wird,

$$B_{\mathring{\nu}, n} = 0 \text{ für alle } n \leqq n_{\mathring{\nu}, \lambda} + \lambda - 1 \leqq n_{\mathring{\nu}, \tau} + \tau - 1 \leqq l''_{\mathring{\nu}} - 1.$$

Ferner lässt sich nach Hilfssatz 12 in Verbindung mit Formel (110) und (111), § 19, der Koeffizient $B_{\nu, n_{\mathring{\nu}, \lambda} + \lambda}$ für $1 \leqq \lambda \leqq \tau$ auf die Gestalt (124) bringen.

Andererseits ist der K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu}, \tau}\}$ vom Typus I. Denn $B_{\mathring{\nu}, l''_{\mathring{\nu}}}$, der nach der Definitionsgleichung (122) erste von Null verschiedene Koeffizient der Potenzreihe $[2\,B]^{\circ}_{\nu} = 2\,B(\sigma^q, \sigma^{p_t}\,\Omega_{\mathring{\nu}}(\sigma))$, ist wegen (123) nach Hilfssatz 11 in Verbindung mit der Beziehung $[1^\alpha]$ durch die Zahlen $\alpha_{\mathring{\nu}, 0}, \alpha_{\mathring{\nu}, 1}, \ldots, \alpha_{\mathring{\nu}, \tau}$ bereits bestimmt und hängt nicht mehr von $\alpha_{\mathring{\nu}, \tau+1}$ ab. Es ist somit für jede Kurve $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ des K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu}, \tau}\}$

$$\operatorname{sg} 2\,B(\varrho, \theta_\nu(\varrho)) = \operatorname{sg} B_{\mathring{\nu}, l''_{\mathring{\nu}}}$$

d. h. der K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu}, \tau}\}$ ist nach Definition V, § 5, von erster Art, oder aber nach *Definition* X vom Typus I, was zu beweisen war.

102. Es sei jetzt wieder die Beziehung (129) erfüllt, aber es sei ausserdem

$$[1^\beta] \qquad l''_{\mathring{\nu}} \geqq l'_{\mathring{\nu}} + \mu + 1.$$

Dann überzeugt man sich ebenso wie im Falle $[1^\alpha]$ davon, dass alle K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu}, \lambda-1}\}$ für $0 \leqq \lambda - 1 \leqq \mu - 1$ nebst dem dazugehörigen K. V. $\left\{\begin{matrix}+\\p_t\end{matrix}\right\}$ bezw. $\left\{\begin{matrix}-\\p_t\end{matrix}\right\}$ vom Typus II sind.

Der K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu}, \mu}\}$ ist nun aber vom Typus IV. Denn wegen $[1^\beta]$ ist erstens $B_{\mathring{\nu}, n} = 0$ für $0 \leqq n \leqq l'_{\mathring{\nu}} + \mu$, zweitens folgt aus Hilfssatz 14 in Verbindung mit Formel (119) und (120), dass der Koeffizient $B_{\nu, l'_{\mathring{\nu}} + \mu + 1}$ von der Gestalt (127) ist. Mithin sind die beiden Bedingungen der Definition XII für den Typus IV erfüllt.

103. Nunmehr sei zweitens

$$l'_{\mathring{\nu}} = n_{\mathring{\nu}, \mu}, \quad \mu \geqq 1,$$

ausserdem sei

$$[2^\alpha] \qquad 1 \leqq l''_{\overset{\circ}{\nu}} \leqq l'_{\overset{\circ}{\nu}} + \mu - 1 = n_{\overset{\circ}{\nu},\mu} + \mu - 1,$$

sodass der zu $l''_{\overset{\circ}{\nu}}$ gehörige, durch die Beziehung (123) bestimmte Index τ der Abschätzung

$$0 \leqq \tau \leqq \mu - 1$$

genügt.

Dann zeigt man ebenso wie im Falle $[1^\alpha]$, dass die K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda-1}\}$ für für $0 \leqq \lambda - 1 \leqq \tau - 1$ nebst $\left\{\begin{matrix}+\\p_t\end{matrix}\right\}$ bezw. $\left\{\begin{matrix}-\\p_t\end{matrix}\right\}$ vom Typus II und der K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\tau}\}$ vom Typus I ist.

104. Es sei jetzt wieder die Beziehung (130) erfüllt, es sei aber ausserdem

$$[2^\beta] \qquad l''_{\overset{\circ}{\nu}} \geqq l'_{\overset{\circ}{\nu}} + \mu = n_{\overset{\circ}{\nu},\mu} + \mu.$$

Dann sind die K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda-1}\}$ für $0 \leqq \lambda - 1 \leqq \mu - 2$ nebst $\left\{\begin{matrix}+\\p_t\end{matrix}\right\}$ bezw. $\left\{\begin{matrix}-\\p_t\end{matrix}\right\}$ vom Typus II, wie man ebenso wie in den vorherigen Fällen erkennt. Der K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}\}$ ist aber jetzt vom Typus III. Denn es ist ***erstens*** $B_{\overset{\circ}{\nu},n} = 0$ für $0 \leqq n \leqq n_{\overset{\circ}{\nu},\mu} + \mu - 1$ wegen $[2^\beta]$, ***zweitens*** folgt aus Hilfssatz 13 Formel (115) und (116), dass der Koeffizient $B_{\nu, n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}$ von der Gestalt (126) ist, mithin sind die beiden Bedingungen der Definition XI erfüllt.

Hat man anstelle von $[2^\beta]$ die schärfere Abschätzung

$$l''_{\overset{\circ}{\nu}} \geqq l'_{\overset{\circ}{\nu}} + \mu + 1 = n_{\overset{\circ}{\nu},\mu} + \mu + 1,$$

so lässt sich ausserdem noch ebenso wie im Falle $[1^\beta]$ zeigen, dass der K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}\}$ vom Typus IV ist; doch werden wir im folgenden von dieser Tatsache keinen Gebrauch machen.

105. Zum Schluss fassen wir die Ergebnisse der Abschnitte **101**, **102**, **103** und **104** der besseren Übersicht halber in einer Tabelle zusammen:

1. $n_{\overset{\circ}{\nu},\mu} + 1 \leqq l'_{\overset{\circ}{\nu}} \leqq n_{\overset{\circ}{\nu},\mu+1} - 1, \quad \mu \geqq 0$ oder $l'_{\overset{\circ}{\nu}} = \infty$.

$$[1^\alpha] \quad \begin{matrix} 1 \leqq l''_{\overset{\circ}{\nu}} \leqq l'_{\overset{\circ}{\nu}} + \mu, \\ 0 \leqq \tau \leqq \mu; \end{matrix} \qquad \left\{\begin{array}{l} \{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda-1}\} \text{ vom Typus II für } 0 \leqq \lambda - 1 \leqq \tau - 1, \\ \{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\tau}\} \text{ vom Typus I;} \end{array}\right.$$

$$[1^\beta] \quad \begin{matrix} l''_{\overset{\circ}{\nu}} \geqq l'_{\overset{\circ}{\nu}} + \mu + 1 \\ \tau \geqq \mu; \end{matrix} \qquad \left\{\begin{array}{l} \{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda-1}\} \text{ vom Typus II für } 0 \leqq \lambda - 1 \leqq \mu - 1, \\ \{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}\} \text{ vom Typus IV.} \end{array}\right.$$

2. $l_\nu' = n_{\nu,\mu}^\circ, \quad \mu \geqq 1.$

$$[2^\alpha] \quad \begin{array}{ll} 1 \leqq l_\nu'' \leqq n_{\nu,\mu}^\circ + \mu - 1, & \left\{\begin{array}{l}\{\alpha_{\nu,\lambda-1}^\circ\} \text{ vom Typus II für } 0 \leqq \lambda - 1 \leqq \tau - 1, \\ \{\alpha_{\nu,\tau}^\circ\} \text{ vom Typus I;}\end{array}\right. \\ 0 \leqq \tau \leqq \mu - 1; & \end{array}$$

$$[2^\beta] \quad \begin{array}{ll} l_\nu'' \geqq n_{\nu,\mu}^\circ + \mu & \left\{\begin{array}{l}\{\alpha_{\nu,\lambda-1}^\circ\} \text{ vom Typus II für } 0 \leqq \lambda - 1 \leqq \mu - 2, \\ \{\alpha_{\nu,\mu-1}^\circ\} \text{ vom Typus III.}\end{array}\right. \\ \tau \geqq \mu; & \end{array}$$

$$l_\nu'' \geqq n_{\nu,\mu}^\circ + \mu + 1; \qquad \{\alpha_{\nu,\mu}^\circ\} \text{ vom Typus IV.}$$

§ 21. Der Index eines Kurvenverbandes höherer Ordnung vom Typus II.

106. Es sei $\{\alpha_{\nu,\lambda-1}^\circ\}$ ein K. V. der Ordnung $\lambda \geqq 1$, und es sei gleichzeitig

$$n_{\nu,\lambda}^\circ + \lambda < l_\nu' + \mu; \quad n_{\nu,\lambda}^\circ + \lambda \leqq l_\nu'';$$

dann folgt aus der Tabelle am Schluss von § 20, dass der K. V. $\{\alpha_{\nu,\lambda-1}^\circ\}$ vom Typus II ist, d. h., unter $\vartheta = \theta_\nu(\varrho) = \sigma^{p_t}\Omega_\nu(\sigma)$ eine beliebige Kurve des K. V. $\{\alpha_{\nu,\lambda-1}^\circ\}$ verstanden, es genügen die Koeffizienten der Entwicklung

$$[2B]_\nu = 2B(\sigma^q, \sigma^{p_t}\Omega_\nu(\sigma)) = \sigma^{l_t-q-p_t}\sum_{n=0}^{\infty} B_{\nu,n}\sigma^n$$

nach Definition X, § 20, den Gleichungen

$$(131) \qquad \begin{cases} B_{\nu,n} = B_{\nu,n}^\circ = 0 \text{ für } 0 \leqq n \leqq n_{\nu,\lambda}^\circ + \lambda - 1 \\ B_{\nu,n_{\nu,\lambda}^\circ+\lambda} = C - \Psi_{\nu,\lambda}^\circ(\alpha_{\nu,\lambda}^\circ). \end{cases}$$

Hierbei ist nach Formel (113) und (109), § 19, $\alpha_{\nu,\lambda}$ eine reelle Wurzel der Gleichung

$$(132) \qquad \Psi_{\nu,\lambda}^{\prime\circ}(\omega_\lambda) = \frac{q(l_t + n_{\nu,\lambda}^\circ + \lambda)}{p_t^2\, \alpha_{\nu,0}^{\circ 2}\, n_{\nu,\lambda}^\circ!}\left[\Delta_\lambda^{n_{\nu,\lambda}^\circ}\Phi_t\right]_{\nu,\lambda-1}^\circ(\omega_\lambda) = 0;$$

ferner ergibt sich mit Rücksicht auf (110) aus Hilfssatz 12 Formel (111), § 19,

$$(133) \qquad C = B_{\nu,n_{\nu,\lambda}^\circ+\lambda}^\circ.$$

Um nunmehr den Index $i\{\alpha_{\nu,\lambda-1}^\circ\}$ zu berechnen, gehen wir von der Beziehung (61) des § 4

(134) $$i\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda-1}\} = \sum_{\nu} i\{\alpha_{\nu,\lambda}\}$$

aus, wobei die Summation auf der rechten Seite von (134) über alle reellen Wurzeln $\alpha_{\nu,\lambda}$ der Gleichung (132) zu erstrecken sind.

107. Wir untersuchen hier zunächst den Fall:

$$B_{\nu,\, n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda}+\lambda} = B_{\overset{\circ}{\nu},\, n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda}+\lambda} - \Psi_{\overset{\circ}{\nu},\lambda}(\alpha_{\nu,\lambda}) \neq 0.$$

Dann wird offenbar, wenn $\vartheta = \theta_\varkappa(\varrho)$ eine beliebige Kurve des K. V. $\{\alpha_{\nu,\lambda}\}$ ist, wegen (131) und (133)

(135) $$\operatorname{sg}\,[2\,B]_\varkappa = \operatorname{sg}\left(B_{\overset{\circ}{\nu},\, n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda}+\lambda} - \Psi_{\overset{\circ}{\nu},\lambda}(\alpha_{\nu,\lambda})\right);$$

hieraus folgt aber in Verbindung mit Definition V, § 5, dass der K. V. $\{\alpha_{\nu,\lambda}\}$ von erster Art ist.

Da $\Psi'_{\overset{\circ}{\nu},\lambda}(\omega_\lambda)$ für $\omega_\lambda = \alpha_{\nu,\lambda}$ verschwindet, so hat die Funktion

(136) $$B_{\overset{\circ}{\nu},\, n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda}+\lambda} - \Psi_{\overset{\circ}{\nu},\lambda}(\omega_\lambda)$$

für $\omega_\lambda = \alpha_{\nu,\lambda}$ entweder ein Extremum oder einen Wendepunkt, je nachdem die Ordnung $r_{\nu,\lambda}$ der Nullstelle $\alpha_{\nu,\lambda}$ von $\Psi'_{\overset{\circ}{\nu},\lambda}(\omega_\lambda)$ ungerade oder gerade ist. Nach einer Bemerkung aus Abschnitt 99, § 20, ist nun aber auch der K. V. $\{\alpha_{\nu,\lambda}\}$ von gerader oder ungerader Mächtigkeit, je nachdem die Ordnung $r_{\nu,\lambda}$ gerade oder ungerade ist. Mithin ist nach Satz 2, § 5,

$$i\{\alpha_{\nu,\lambda}\} = 0,$$

wenn $\alpha_{\nu,\lambda}$ ein Wendepunkt der Funktion (136),

$$i\{\alpha_{\nu,\lambda}\} = \pm 1,$$

wenn $\alpha_{\nu,\lambda}$ ein Extremum der Funktion (136) ist.

108. Um im Falle $i\{\alpha_{\nu,\lambda}\} = \pm 1$ auch noch das Vorzeichen eindeutig zu bestimmen, ziehe man den Zusatz zu Satz 2, Formel (68), § 5, heran. Danach hat man $\operatorname{sg} A(\sigma^q, \sigma^{p_l}\omega)$ für $\omega = (\alpha_{\nu,\lambda} + \varepsilon)\sigma^\lambda + \sum_{\varkappa=0}^{\lambda-1} \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\varkappa}\sigma^\varkappa$ zu untersuchen. Nun ist aber

$$\operatorname{sg} A(\sigma^q, \sigma^{p_t}\omega)\Big/_{\omega=(\alpha_{\nu,\lambda}+\varepsilon)\sigma^\lambda+\sum\limits_{\varkappa=0}^{\lambda-1}\alpha_{\mathring{\nu},\varkappa}\sigma^\varkappa} = \operatorname{sg}\left[\Delta_\lambda^{n_{\mathring{\nu},\lambda}}\Phi_t\right]_{\mathring{\nu},\lambda-1}(\alpha_{\nu,\lambda}+\varepsilon)$$

$$(137) \qquad = \operatorname{sg}\left(\Psi'_{\mathring{\nu},\lambda}(\alpha_{\nu,\lambda}+\varepsilon)\right) \text{ wegen } (109),\ \S\ 19;$$

denn entwickelt man mit Rücksicht auf Formel (46), § 2, die Funktion $A\left(\sigma^q; \sigma^{p_t}\left((\alpha_{\nu,\lambda}+\varepsilon)\sigma^\lambda + \sum\limits_{\varkappa=0}^{\lambda-1}\alpha_{\mathring{\nu},\varkappa}\sigma^\varkappa\right)\right)$ in eine Potenzreihe nach σ, so bemerkt man, dass nach dem Satz von Enriques Formel (23), § 14,

$$[\Delta_\lambda^n \Phi_t]_{\mathring{\nu},\lambda-1}(\alpha_{\nu,\lambda}+\varepsilon) = [\Delta_{\lambda-1}^n \Phi_t]_{\mathring{\nu}} = 0 \text{ für } n \leqq n_{\mathring{\nu},\lambda} - 1.$$

Nunmehr ergibt sich aus Formel (68), § 5, in Verbindung mit den Gleichungen (135) und (137)

$$(138) \qquad i\{\alpha_{\nu,\lambda}\} = \operatorname{sg}\frac{\Psi'_{\mathring{\nu},\lambda}(\alpha_{\nu,\lambda}+\varepsilon)}{B_{\mathring{\nu},n_{\mathring{\nu},\lambda}+\lambda} - \Psi_{\mathring{\nu},\lambda}(\alpha_{\nu,\lambda})},$$

wofern die Funktion (136) für $\omega_\lambda = \alpha_{\nu,\lambda}$ ein Extremum besitzt. Andererseits ist offenbar $\Psi'_{\mathring{\nu},\lambda}(\alpha_{\nu,\lambda}+\varepsilon) > 0$, wenn die Funktion (136) für $\omega_\lambda = \alpha_{\nu,\lambda}$ ein Maximum, $\Psi'_{\mathring{\nu},\lambda}(\alpha_{\nu,\lambda}+\varepsilon) < 0$ wenn die Funktion (136) für $\omega_\lambda = \alpha_{\nu,\lambda}$ ein Minimum hat.

Und somit erhält man aus (138) den

Satz 9. *Es sei $\{\alpha_{\mathring{\nu},\lambda-1}\}$ ein K. V. der Ordnung $\lambda \geqq 1$ vom Typus II, und es sei $\{\alpha_{\nu,\lambda}\}$ ein in $\{\alpha_{\mathring{\nu},\lambda-1}\}$ enthaltener K. V. derart, dass die Funktion* (136) *für $\omega_\lambda = \alpha_{\nu,\lambda}$ nicht verschwindet.*

Dann ist

$i\{\alpha_{\nu,\lambda}\} = 0$, *wenn die Funktion* (136) *für $\omega_\lambda = \alpha_{\nu,\lambda}$ einen Wendepunkt,*

$i\{\alpha_{\nu,\lambda}\} = +1$, *wenn die Funktion* (136) *für $\omega_\lambda = \alpha_{\nu,\lambda}$ entweder ein positives Maximum oder ein negatives Minimum,*

$i\{\alpha_{\nu,\lambda}\} = -1$, *wenn die Funktion* (136) *für $\omega_\lambda = \alpha_{\nu,\lambda}$ entweder ein negatives Maximum oder ein positives Minimum hat.*

109. Wir suchen jetzt ein Gegenstück zu Satz 5, § 9, zu beweisen, d. h. wir suchen einen Ausdruck für den Index eines K. V. höherer Ordnung vom allgemeinsten Typus II zu bestimmen, welcher der Formel (107), § 9, entspricht.

Es seien

$$\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_N$$

sämtliche reellen Nullstellen der Funktion (136). Ist $\omega_\lambda = \beta_\varkappa$ eine Nullstelle der Ordnung $\geqq 2$, so ist $\beta_\varkappa$ gleichzeitig eine Nullstelle von $\Psi'_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda}(\omega_\lambda)$. Mithin gehört zu diesem $\beta_\varkappa$ ein K. V. $\{\beta_\varkappa\}$ und ein Index $i\{\beta_\varkappa\}$. Ist aber $\beta_\varkappa$ eine Nullstelle erster ordnung der Funktion (136), so existiert offenbar kein K. V. $\{\beta_\varkappa\}$. In diesem Falle setzen wir der bequemeren Formulierung halber entsprechend Formel (98), § 9,

$$i\{\beta_\varkappa\} = 0. \tag{139}$$

Um nun den Beitrag zu berechnen, den die im Intervall $\beta_\varkappa < \omega_\lambda < \beta_{\varkappa+1}$ gelegenen Nullstellen $\alpha_{\nu,\lambda}$ von $\Psi'_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda}(\omega_\lambda)$ zu dem Index $i\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda-1}\}$ $(\lambda \geqq 1)$ mit Rücksicht auf Satz 9 liefern, ziehen wir eine einfache Bemerkung über reelle stetige Funktionen heran.

Es sei $f(x)$ eine reelle stetige Funktion, die im Intervall $x_1 \leqq x \leqq x_2$ definiert sei und dort nur endlich viele (relative) Extrema haben möge. Ausserdem sei $f(x_1) = f(x_2) = 0$, hingegen sei $f(x)$ für innere Punkte des Intervalls von Null verschieden.

Ist jetzt für $x_1 < x < x_2$ die Funktion $f(x) > 0$, so ist die Anzahl der im Innern dieses Intervalls gelegenen Maxima um eins grösser als die Anzahl der dort gelegenen Minima. Ist hingegen für $x_1 < x < x_2$ die Funktion $f(x) < 0$, so ist die Anzahl der dort gelegenen Minima um eins grösser als die Anzahl der Maxima.

Hieraus folgt aber in Verbindung mit Satz 9, dass jedes der $N - 1$ offenen Intervalle $\beta_\varkappa < \omega_\lambda < \beta_{\varkappa+1}$ zum Index $i\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda-1}\}$ den Beitrag $+1$ liefert. Entsprechend zeigt man, dass jedes von den beiden offenen Intervallen

$$-\infty < \omega_\lambda < \beta_1, \quad \beta_N < \omega_\lambda < +\infty$$

zu dem Index $i\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda-1}\}$ den Beitrag 0 liefert.

Fassen wir die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammen, so gelangen wir zur Formulierung von

Satz 10. *Es sei $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda-1}\}$ ein K. V. der Ordnung $\lambda \geqq 1$ vom Typus II und es seien $\beta_\varkappa$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots, N$ sämtliche reellen Wurzeln der Gleichung*

$$B_{\overset{\circ}{\nu}, n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda} + \lambda} - \Psi_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda}(\omega_\lambda) = 0. \tag{140}$$

Dann ist der Index

(141) $$i\{\alpha^{\circ}_{\nu,\lambda-1}\} = N - 1 + \sum_{\varkappa=1}^{N} i\{\beta_\varkappa\}.$$

110. Wir wollen jetzt entsprechend der Definition VII, § 7, einen besonders einfachen Spezialfall des Typus II betrachten:

Definition XIII: *Der K. V.* $\{\alpha^{\circ}_{\nu,\lambda-1}\}$ $(\lambda \geqq 1)$ *vom Typus II heisst vom Normaltypus II, wenn die beiden Funktionen*

$$B_{\nu,n^{\circ}_{\nu,\lambda}+\lambda}^{\circ} - \Psi^{\circ}_{\nu,\lambda}(\omega_\lambda) \quad und \quad \Psi'^{\circ}_{\nu,\lambda}(\omega_\lambda)$$

keine gemeinsamen reellen Wurzeln haben.

Ein K. V. vom Typus II, der diese Bedingung nicht erfüllt, heisst vom allgemeinen Typus II.

Nach dieser Definition sind somit, wenn der K. V. $\{\alpha^{\circ}_{\nu,\lambda-1}\}$ vom Normaltypus II ist, sämtliche reellen Wurzeln $\beta_\varkappa$ der Gleichung (140) von der ersten Ordnung; es ist somit nach Formel (139) $i\{\beta_\varkappa\} = 0$ für alle $\varkappa$.

Mithin ergibt sich aus Formel (141) des Satzes 10 der

Satz 11. *Es sei der K. V.* $\{\alpha^{\circ}_{\nu,\lambda-1}\}$ *der Ordnung* $\lambda \geqq 1$ *vom Normaltypus II. Dann ist* $i\{\alpha^{\circ}_{\nu,\lambda-1}\}$ *gleich der Anzahl N der reellen Nullstellen der in Satz 10 auftretenden Gleichung* (140) *vermindert um 1; d. h. es ist*

$$i\{\alpha^{\circ}_{\nu,\lambda-1}\} = N - 1 \geqq -1.$$

Zusatz zu Satz 11. *Unter den Voraussetzungen von Satz 11 über den K. V.* $\{\alpha^{\circ}_{\nu,\lambda-1}\}$ *ist nach Satz 1, § 5, jeder in* $\{\alpha^{\circ}_{\nu,\lambda-1}\}$ *enthaltene K. V.* $\{\alpha_{\nu,\lambda+\varkappa}\}$ $(\varkappa = 0, 1, 2, \ldots)$ *von erster Art, mithin nach Definition IX, § 20 vom Typus I.*

§ 22. Die Indices von Kurvenverbänden höherer Ordnung vom Typus I und vom Typus IV.

111. Es mögen jetzt die der Kurve $\vartheta = \theta^{\circ}_{\nu}(\varrho)$ in Formel (54), (55), § 17, und Formel (122), (123), § 20, zugeordneten Zahlen l'°_{ν} und l''°_{ν} auf einen der beiden in der Tabelle am Schluss von § 20 mit $[1^a]$ oder $[2^a]$ bezeichneten Fälle führen. Dann ist, in beiden Fällen der K. V. $\{\alpha^{\circ}_{\nu,\tau-1}\}$ vom Typus II und der K. V. $\{\alpha^{\circ}_{\nu,\tau}\}$ vom Typus I, d. h. er ist nach Definition IX, § 20, von erster Art.

Ist $l''_{\mathring{\nu}} = n_{\mathring{\nu},\tau} + \tau$, so ist $B_{\mathring{\nu},n_{\mathring{\nu},\tau}+\tau} \neq 0$, und es lässt sich der Wert von $i\{\alpha_{\mathring{\nu},\tau}\}$ mit Hilfe von Satz 9, § 21, angeben. Ist aber $n_{\mathring{\nu},\tau} + \tau + 1 \leqq l''_{\mathring{\nu}} \leqq n_{\mathring{\nu},\tau+1} + \tau$, so ist $B_{\mathring{\nu},n_{\mathring{\nu},\tau}+\tau} = 0$, und der K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\tau-1}\}$ ist nach Definition XIII, § 21, jedenfalls nicht mehr vom Normaltypus II.

Zur Bestimmung von $i\{\alpha_{\mathring{\nu},\tau}\}$ stützen wir uns jetzt auf Satz 2, § 5, und erinnern an die in Abschnitt 107, § 21, gemachte Bemerkung, dass der K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\tau}\}$ von gerader oder ungerader Mächtigkeit ist, je nachdem die Funktion $B_{\mathring{\nu},n_{\mathring{\nu},\tau}+\tau} - \Psi_{\mathring{\nu},\tau}(\omega_\tau)$ für $\omega_\tau = \alpha_{\mathring{\nu},\tau}$ einen Wendepunkt oder ein Extremum hat.

Da diese Funktion offenbar an den gleichen Stellen Wendepunkte bezw. Extrema hat wie die Funktion $\Psi_{\mathring{\nu},\tau}(\omega_\tau)$, so ergibt sich der

Satz 12. *Es sei der K. V.* $\{\alpha_{\mathring{\nu},\tau-1}\}$ *vom Typus II und der K. V.* $\{\alpha_{\mathring{\nu},\tau}\}$ *vom Typus I.*[1] *Dann ist*

$$i\{\alpha_{\mathring{\nu},\tau}\} = 0,$$

wenn die Funktion $\Psi_{\mathring{\nu},\tau}(\omega_\tau)$ *für* $\omega_\tau = \alpha_{\mathring{\nu},\tau}$ *einen Wendepunkt,*

$$i\{\alpha_{\mathring{\nu},\tau}\} = \pm 1,$$

wenn die gleiche Funktion für $\omega_\tau = \alpha_{\mathring{\nu},\tau}$ *ein Extremum hat.*

112. Nunmehr sei $\vartheta = \theta_{\mathring{\nu}}(\varrho)$ eine Kurve, deren zugeordnete Zahlen $l'_{\mathring{\nu}}$ und $l''_{\mathring{\nu}}$ auf den in der Tabelle § 20 mit $[1^\beta]$ bezeichneten Fall führen mögen, d. h. es sei

$$n_{\mathring{\nu},\mu} + 1 \leqq l'_{\mathring{\nu}} \leqq n_{\mathring{\nu},\mu+1} - 1, \qquad l''_{\mathring{\nu}} \geqq l'_{\mathring{\nu}} + \mu + 1, \qquad \mu \geqq 0.$$

Dann ist der K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}$ $\Big($bezw. im Falle $\mu = 0$, der K. V. $\left\{\begin{smallmatrix}+\\p_t\end{smallmatrix}\right\}$ oder $\left\{\begin{smallmatrix}-\\p_t\end{smallmatrix}\right\}\Big)$ vom Typus II und der K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu}\}$ vom Typus IV.

Man hat somit nach Definition XII, § 20,

$$(142)\qquad \begin{cases} B_{\mathring{\nu},n} = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq n \leqq l'_{\mathring{\nu}} + \mu, \\ B_{\nu,l'_{\mathring{\nu}}+\mu+1} = C_1 + C_2\,\alpha_{\nu,\mu+1}. \end{cases}$$

[1] An die Stelle der engeren Voraussetzung von Satz 9, dass

$$B_{\mathring{\nu},n_{\mathring{\nu},\tau}+\tau} - \Psi_{\mathring{\nu},\tau}(\alpha_{\mathring{\nu},\tau}) = B_{\mathring{\nu},n_{\mathring{\nu},\tau}+\tau} \neq 0$$

sein möge, tritt jetzt die allgemeinere Voraussetzung, der K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\tau}\}$ sei vom Typus I.

Hierbei ist $\alpha_{\nu,\mu+1}$ eine beliebige reelle Wurzel der Gleichung (128), § 20, ferner ist nach Hilfssatz 14 in Verbindung mit Formel (119) und (120), § 19

$$(143)\qquad \begin{cases} C_2 = \dfrac{(l_t + l'_{\overset{\circ}{\nu}})(l_t + l'_{\overset{\circ}{\nu}} - p_t)}{p_t^2\, \alpha^2_{\overset{\circ}{\nu},0}} \dfrac{\left[\varDelta^{l'_{\overset{\circ}{\nu}}}_{\mu'} \varphi_t\right]_{\overset{\circ}{\nu}}}{l'_{\overset{\circ}{\nu}}!} \neq 0 \text{ wegen (54) § 17,} \\ C_1 = B_{\overset{\circ}{\nu},\, l'_{\overset{\circ}{\nu}} + \mu + 1} - C_2\, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu+1}. \end{cases}$$

113. Wir behaupten zunächst, der K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}\}$ sei entweder von erster Art oder im Sinne der Definition VI, § 6, von zweiter Art.

Die Behauptung lässt sich als eine unmittelbare Folge der Gleichungen (142) einsehen, wenn man noch voraussetzt, dass die lineare Funktion $C_1 + C_2\,\omega_{\mu+1}$ aus Formel (142) für keine reelle Wurzel $\omega_{\mu+1} = \alpha_{\nu,\mu+1}$ der Gleichung (128), § 20, verschwindet; denn dann ist $\mathrm{sg}\,[2\,B]_\nu = \mathrm{sg}\, B_{\nu,\, l'_{\overset{\circ}{\nu}} + \mu + 1} = \mathrm{sg}\,(C_1 + C_2\,\alpha_{\nu,\mu+1})$. Wir wollen aber den Beweis auch für den Fall führen, dass für ein gewisses $\nu = \nu'$ der Ausdruck $C_1 + C_2\,\alpha_{\nu',\mu+1} = 0$ ist.

Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass nach Hilfssatz 14 Formel (119), § 19,

$$(144)\qquad \left[\tilde{B}^{l'_{\overset{\circ}{\nu}} + \mu + 1}_{l'_{\overset{\circ}{\nu}} + \mu + 1}\right]_{\overset{\circ}{\nu},\mu} (\omega_{\mu+1}) = C_1 + C_2\,\omega_{\mu+1}$$

ist, und dass ferner die Grösse (144) als erster von Null verschiedener Koeffizient der Entwicklung der in Formel (98), § 19, eingeführten Funktion[1]

$$(145)\qquad \begin{aligned} &2\,\tilde{B}^{l'_{\overset{\circ}{\nu}} + \mu + 1}\left(\sigma^q, \sigma^{p_t}\left(\omega_{\mu+1}\sigma^{\mu+1} + \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\varkappa}\,\sigma^\varkappa\right)\right) \\ &\qquad = \sigma^{l_t - q - p_t}\left(\left[\tilde{B}^{l'_{\overset{\circ}{\nu}} + \mu + 1}_{l'_{\overset{\circ}{\nu}} + \mu + 1}\right]_{\overset{\circ}{\nu},\mu} (\omega_{\mu+1})\,\sigma^{l'_{\overset{\circ}{\nu}} + \mu + 1} + \cdots\right) \end{aligned}$$

aufgefasst werden kann; denn die zu einem Exponenten $n \leqq l'_{\overset{\circ}{\nu}} + \mu$ gehörigen Koeffizienten dieser Entwicklung hängen nach Hilfssatz 11, § 19, nur von $\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},1}, \ldots, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}$, aber nicht mehr von $\omega_{\mu+1}$ ab und verschwinden wegen der Gleichung (142).

[1] Den Zusammenhang zwischen Formel (98), § 19, und Formel (145) stellt man her, indem man in Formel (98) $\omega_\varkappa = \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\varkappa}$ für $0 \leqq \varkappa \leqq \mu$, $\omega_\varkappa = 0$ für $\varkappa \geqq \mu + 2$ setzt, während $\omega_{\mu+1}$ veränderlich bleibt.

114. Nunmehr suchen wir eine Funktion $\omega_{\mu+1} = \chi_{\mu+1}(\sigma)$ zu bestimmen, die der Gleichung

$$(146) \qquad 2\,\tilde{B}^{l'_{\overset{\circ}{\nu}}+\mu+1}\left(\sigma^q, \sigma^{p_t}\left(\omega_{\mu+1}\sigma^{\mu+1} + \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\varkappa}\,\sigma^\varkappa\right)\right) = 0$$

genügt.

Setzt man

$$\lim_{\sigma\to 0} \chi_{\mu+1}(\sigma) = \overset{\circ}{\omega}_{\mu+1}$$

so folgt aus den Beziehungen (144), (145) und (146), *erstens*, dass $\overset{\circ}{\omega}_{\mu+1}$ durch die Gleichung

$$C_1 + C_2\,\overset{\circ}{\omega}_{\mu+1} = 0, \qquad (C_2 \neq 0 \text{ wegen } (143))$$

eindeutig bestimmt ist, *zweitens*, dass nach Formel (145) in Verbindung mit (143) und (144)

$$\lim_{\substack{\sigma\to 0\\ \omega_{\mu+1}\to\overset{\circ}{\omega}_{\mu+1}}} \frac{\partial}{\partial\,\omega_{\mu+1}} \frac{2\,\tilde{B}^{l'_{\overset{\circ}{\nu}}+\mu+1}}{\sigma^{l_t-q-p_t+l'_{\overset{\circ}{\nu}}+\mu+1}} \to C_2 \neq 0$$

ist. Mithin ist auf Grund des Fundamentalsatzes über implizite Funktionen die Funktion $\omega_{\mu+1} = \chi_{\mu+1}(\sigma)$ durch die Gleichung (146) eindeutig bestimmt, und hat die Eigenschaft, den Streifen $0 < \sigma \leqq \delta$ der $\sigma, \omega_{\mu+1}$-Ebene in zwei Gebiete zu teilen derart, dass der Ausdruck (145), als Funktion von σ und $\omega_{\mu+1}$ betrachtet, in jedem der beiden Teilgebiete von konstantem Vorzeichen ist und nur beim Überschreiten der Kurve $\omega_{\mu+1} = \chi_{\mu+1}(\sigma)$ das Vorzeichen wechselt.

Andererseits ist nach Formel (99), § 19,

$$(147) \qquad [2\,B]_\nu = 2\,\tilde{B}^{l'_{\overset{\circ}{\nu}}+\mu+1}(\sigma^q, \sigma^{p_t}\,\Omega_\nu(\sigma)).$$

Folglich kann die Funktion

$$(148) \qquad \sigma^{p_t}\chi(\sigma) = \sigma^{p_t}\left(\chi_{\mu+1}(\sigma)\,\sigma^{\mu+1} + \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\varkappa}\,\sigma^\varkappa\right)$$

unmöglich gleich einer der Funktionen

$$\vartheta = \theta_\nu(\varrho) = \sigma^{p_t}\,\Omega_\nu(\sigma)$$

des K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}\}$ sein, da dann wegen (146) $2\,B$ und A für $\vartheta = \sigma^{p_t}\chi(\sigma)$ gleichzeitig verschwinden würden, im Widerspruch mit der Voraussetzung, dass die vorgelegte

Fläche für $\varrho = 0$ einen isolierten Nabel hat. Somit kann man die Kurven $\vartheta = \theta_\nu(\varrho) = \sigma^{p_l}\,\Omega_\nu(\sigma)$ des K. V. $\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\mu}\}$ in zwei Klassen einteilen, je nachdem im Bereiche $0 \leqq \sigma \leqq \delta$ die Funktion $\Omega_\nu(\sigma) > \chi(\sigma)$ oder $\Omega_\nu(\sigma) < \chi(\sigma)$ ist.

Es mögen jetzt die Funktionen $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$, wenn ν das Intervall $\nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2$ durchläuft, sämtliche Kurven von *ungeradem* Vielfachheitsgrad s_ν des K. V. $\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\mu}\}$ der Grösse nach geordnet darstellen (vgl. Formel (57), § 4), während die Kurven aus $\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\mu}\}$ von geradem Vielfachheitsgrad mit Rücksicht auf die Definitionsgleichung (59), § 4 fortgelassen sind. (Die Nummerierung der Kurven $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ ist somit hier vorübergehend gegenüber der in § 4 Formel (57) eingeführten Nummerierung abgeändert). Dann existiert eine ganze Zahl ν_0, derart dass $\nu_1 - 1 \leqq \nu_0 \leqq \nu_2$, und dass im Bereich $0 < \sigma \leqq \delta$

$$(149) \qquad \Omega_\nu(\sigma) > \chi(\sigma) \text{ für } \nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_0, \qquad \Omega_\nu(\sigma) < \chi(\sigma) \text{ für } \nu_0 + 1 \leqq \nu \leqq \nu_2.$$

Nunmehr folgt aus der oben bewiesenen Eigenschaft der Funktion $\omega_{\mu+1} = \chi_{\mu+1}(\sigma)$ in Verbindung mit den Beziehungen (146), (147) und (148), dass, wenn ν die ganzen Zahlen des Intervalls $\nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2$ durchläuft, der Ausdruck $[2\,B]_\nu$ höchstens einmal, nämlich beim Übergang von ν_0 zu $\nu_0 + 1$, sein Vorzeichen wechselt. Damit ist bewiesen, dass der K. V. $\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\mu}\}$ vom Typus IV von zweiter Art ist, ausgenommen in den beiden Grenzfällen $\nu_0 = \nu_1 - 1$ und $\nu_0 = \nu_2$. In diesen beiden Fällen ist der K. V. $\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\mu}\}$ sogar von erster Art, denn dann gelten im Falle $\nu_0 = \nu_1 - 1$ für alle $\Omega_\nu(\sigma)$ des K. V. $\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\mu}\}$ die Abschätzungen $\Omega_\nu(\sigma) < \chi(\sigma)$, im Falle $\nu_0 = \nu_2$ die Abschätzungen $\Omega_\nu(\sigma) > \chi(\sigma)$.

115. Nach Satz 4, § 6, ist

$$i\,\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\mu}\} = \pm\ 1,$$

wenn der K. V. $\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\mu}\}$ von ungerader Mächtigkeit ist, d. h. bei ungeradem $r^\circ_{\bar\nu,\mu}$; dann hat nach einer Bemerkung aus Abschnitt 107, § 21, die Funktion $B^\circ_{\bar\nu,\,n^\circ_{\bar\nu,\mu}+\mu} - \Psi^\circ_{\bar\nu,\mu}(\omega_\mu)$, und damit auch die Funktion $\Psi^\circ_{\bar\nu,\mu}(\omega_\mu)$ selbst, für $\omega_\mu = \alpha^\circ_{\bar\nu,\mu}$ ein Extremum.

Andererseits ist

$$i\,\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\mu}\} = +\ 2, \quad \text{oder } = 0, \quad \text{oder } = -\ 2,$$

wenn der K. V. $\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\mu}\}$ von gerader Mächtigkeit, d. h. wenn $r^\circ_{\bar\nu,\mu}$ gerade ist, die Funktion $\Psi^\circ_{\bar\nu,\mu}(\omega_\mu)$ somit für $\omega_\mu = \alpha^\circ_{\bar\nu,\mu}$ einen Wendepunkt hat.

Aus dem Zusatz zu Satz 4, § 6, leiten wir jetzt eine notwendige Bedingung für das Eintreten des ungünstigsten Falles $i\{\alpha^{\circ}_{\bar{\nu},\mu}\} = -2$ ab, indem wir die dort angegebene Bedingung

$$(150) \qquad \operatorname{sg} \left. \frac{\dfrac{\partial^{s_{\nu_1}} A(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_{\nu_1}}}}{2 B(\varrho, \vartheta)} \right/_{\vartheta = \theta_{\nu_1}(\varrho)} = -1$$

in geeigneter Weise umformen.

Da nach unserer Festsetzung $\Omega_{\nu_1}(\sigma)$ unter allen Funktionen $\Omega_\nu(\sigma)$, bei denen $\nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2$, die grösste Funktion ist, so ist offenbar mit Rücksicht auf (143), (144) und (147)

$$(151) \qquad \operatorname{sg} [2 B]_{\nu_1} = \operatorname{sg} C_2 = \operatorname{sg} \left[\Delta^{\nu'_{\bar{\nu}}}_{\mu'} \varphi_t\right]^{\circ}_{\bar{\nu}},$$

ausser im Falle $\nu_0 = \nu_1 - 1$, d. h. im Falle $\Omega_\nu(\sigma) < \chi(\sigma)$ für alle ν des Intervalls $\nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2$; doch dann ist der K. V. $\{\alpha^{\circ}_{\bar{\nu},\mu}\}$ von erster Art und der Fall $i\{\alpha^{\circ}_{\bar{\nu},\mu}\} = -2$ kann nach Satz 2, § 5, gewiss nicht eintreten.

Um $\operatorname{sg} \left. \dfrac{\partial^{s_{\nu_1}} A(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_{\nu_1}}} \right/_{\vartheta = \theta_{\nu_1}(\varrho)}$ zu berechnen, gehen wir von der Formel (67), § 5, aus, und folgern

$$(152) \qquad \operatorname{sg} \left. \frac{\partial^{s_{\nu_1}} A(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_{\nu_1}}} \right/_{\vartheta = \theta_{\nu_1}(\varrho)} = \operatorname{sg} A\left(\varrho;\, (\alpha_{\nu_1, \mu+1} + h)\, \sigma^{p_t + \mu + 1} + \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \alpha^{\circ}_{\bar{\nu},\varkappa}\, \sigma^{p_t + \varkappa}\right),$$

unter h eine positive (beliebig grosse) Zahl verstanden.

Nun ergibt aber die Entwicklung von A nach Formel (46), § 2,

$$(153) \qquad A\left(\varrho;\, (\alpha_{\nu_1, \mu+1} + h)\, \sigma^{p_t + \mu + 1} + \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \alpha^{\circ}_{\bar{\nu},\varkappa}\, \sigma^{p_t + \varkappa}\right)$$
$$= \sigma^{l_t - q} \left(\frac{\left[\Delta^{n^{\circ}_{\bar{\nu},\mu+1}}_{\mu+1} \Phi_t\right]^{\circ}_{\bar{\nu},\mu} (\alpha_{\nu_1,\mu+1} + h)}{n^{\circ}_{\bar{\nu},\mu+1}!}\, \sigma^{n^{\circ}_{\bar{\nu},\mu+1}} + \cdots \right),$$

da nach dem Satz von Enriques, § 14, die Entwicklungskoeffizienten aller Glieder von (153), welche zu einem Exponenten $n \leqq n^{\circ}_{\bar{\nu},\mu+1} - 1$ gehören, nur von $\alpha^{\circ}_{\bar{\nu},0}, \alpha^{\circ}_{\bar{\nu},1}, \ldots, \alpha^{\circ}_{\bar{\nu},\mu}$, aber nicht mehr von $\alpha_{\nu_1,\mu+1} + h$ abhängen (vergl. insbesondere Formel (23), § 14) und somit verschwinden.

Andererseits erhält man aber, indem man die Entwicklung (27), § 14, von $\left[\Delta_{\mu+1}^{n_{\mathring{\nu}},\mu+1}\Phi_t\right]_{\mathring{\nu},\mu}(\omega_{\mu+1})$ berücksichtigt,

$$\operatorname{sg}\left[\Delta_{\mu+1}^{n_{\mathring{\nu}},\mu+1}\Phi_t\right]_{\mathring{\nu},\mu}(\alpha_{\nu_1,\mu+1}+h)=\operatorname{sg}\left[\frac{\partial^{r_{\mathring{\nu},\mu}}}{\partial\,\omega_\mu^{r_{\mathring{\nu},\mu}}}\Delta_\mu^{n_{\mathring{\nu},\mu}}\Phi_t\right]_{\mathring{\nu}}\quad\text{für alle } h>0.$$

Mithin ergibt sich in Verbindung mit (152) und (153)

$$\operatorname{sg}\frac{\partial^{s_{\nu_1}}A(\varrho,\vartheta)}{\partial\vartheta^{s_{\nu_1}}}\Bigg/_{\vartheta=\theta_{\nu_1}(\varrho)}=\operatorname{sg}\left[\frac{\partial^{r_{\mathring{\nu},\mu}}}{\partial\,\omega_\mu^{r_{\mathring{\nu},\mu}}}\Delta_\mu^{n_{\mathring{\nu},\mu}}\Phi_t\right]_{\mathring{\nu}}. \tag{154}$$

116. Setzen wir das Ergebnis aus (151) und (154) in Formel (150) ein, so gelangen wir zur Formulierung von

Satz 13. *Ist der K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu}\}$ vom Typus IV, so ist immer $i\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu}\}\geqq-2$ Damit der äusserste Fall $i\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu}\}=-2$ eintritt, muss der K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu}\}$ von gerader Mächtigkeit sein,* d. h. *$r_{\mathring{\nu},\mu}$ muss gerade sein und somit die Funktion $\Psi_{\mathring{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ an der Stelle $\omega_\mu=\alpha_{\mathring{\nu},\mu}$ einen Wendepunkt haben. Ausserdem muss die notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung*

$$\operatorname{sg}\left[\Delta_{\mu'}^{l'_{\mathring{\nu}}}\varphi_t\right]_{\mathring{\nu}}=-\operatorname{sg}\left[\frac{\partial^{r_{\mathring{\nu},\mu}}}{\partial\,\omega_\mu^{r_{\mathring{\nu},\mu}}}\Delta_\mu^{n_{\mathring{\nu},\mu}}\Phi_t\right]_{\mathring{\nu}} \tag{155}$$

erfüllt sein.

Da wie in Abschnitt **114** gezeigt wurde, der K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu}\}$ vom Typus IV immer erster oder zweiter Art ist, so folgt aus Satz 1, § 5, und Satz 3, § 6, der

Zusatz zu Satz 13. *Ist der K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu}\}$ vom Typus IV, so ist der Index eines jeden in $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu}\}$ enthaltenen K. V. $\{\alpha_{\nu,\mu+\varkappa}\}$*

$$i\{\alpha_{\nu,\mu+\varkappa}\}\geqq-2\qquad(\varkappa=1,2,\ldots).$$

Dass der Grenzfall $i\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu}\}=-2$ wirklich eintreten kann, erkennt der Leser leicht, indem er sich einen K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu}\}$ vom Typus IV für $\mu=0$, $l'_{\mathring{\nu}}=1$, $l''_{\mathring{\nu}}=2$ konstruiert, der nur zwei reelle Kurven enthält und der Bedingung (155) genügt.

§ 23. Der Index eines Kurvenverbandes höherer Ordnung vom Normaltypus III.

117. Die der Kurve $\vartheta = \theta_{\overset{\circ}{\nu}}(\varrho)$ zugeordneten beiden Zahlen $l'_{\overset{\circ}{\nu}}$ und $l''_{\overset{\circ}{\nu}}$ mögen den Bedingungen

$$l'_{\overset{\circ}{\nu}} = n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}, \quad l''_{\overset{\circ}{\nu}} \geqq n_{\overset{\circ}{\nu},\mu} + \mu, \quad \mu \geqq 1$$

genügen. Dann ist der K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}\}$ nach der am Schluss von § 20 in Abschnitt 105 angegebenen Tabelle vom Typus III, d. h., unter $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ eine beliebige Kurve des K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}\}$ verstanden, dass die Koeffizienten der Entwicklung

$$[2\,B]_\nu = \sigma^{l_t - q - p_t} \sum_{n=0}^{\infty} B_{\nu,n}\,\sigma^n$$

nach Definition XI, § 20, durch die Gleichungen

$$(156) \qquad \begin{cases} B_{\nu,n} = B_{\overset{\circ}{\nu},n} = 0 \text{ für } 0 \leqq n \leqq n_{\overset{\circ}{\nu},\mu} + \mu - 1, \\ B_{\nu,\,n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu} = C_1 + C_2\,\alpha_{\nu,\mu} - \Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\alpha_{\nu,\mu}) \end{cases}$$

bestimmt sind. Nach Hilfssatz 13 in Verbindung mit Formel (115) und (116), § 19, ist dann ausserdem $\alpha_{\nu,\mu}$ eine beliebige reelle Wurzel der Gleichung

$$(157) \qquad \Psi'_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu) = 0,$$

ferner ist nach Formel (115), § 19,

$$(158) \qquad \begin{cases} C_2 = \dfrac{(l_t + n_{\overset{\circ}{\nu},\mu})(l_t + n_{\overset{\circ}{\nu},\mu} - p_t)}{p_t^2\,\alpha^2_{\overset{\circ}{\nu},0}} \dfrac{\left[\Delta^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}}_{\mu-1}\varphi_t\right]_{\overset{\circ}{\nu}}}{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}!} \neq 0, \text{ wegen } n_{\overset{\circ}{\nu},\mu} = l'_{\overset{\circ}{\nu}}; \\ C_1 = B_{\overset{\circ}{\nu},\,n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu} - C_2\,\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}. \end{cases}$$

Ebenso wie in § 21 stützen wir uns bei der Bestimmung des Index $i\,\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}\}$ auf die Beziehung (61) des § 4:

$$(159) \qquad i\,\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}\} = \sum_{\nu} i\,\{\alpha_{\nu,\mu}\},$$

wobei die Summation rechter Hand über alle reellen Wurzeln der Gleichung (157) zu erstrecken ist.

118. In diesem Paragraphen beschränken wir uns auf die Untersuchung des Falles

$$B_{\nu,\, n_{\overset{\circ}{\nu},\,\mu}+\mu} = C_1 + C_2\,\alpha_{\nu,\,\mu} - \Psi_{\overset{\circ}{\nu},\,\mu}(\alpha_{\nu,\,\mu}) \neq 0. \tag{160}$$

Man bemerkt ebenso wie in § 21, dass der K. V. $\{\alpha_{\nu,\,\mu}\}$ unter der Voraussetzung (160) von erster Art ist, und dass mit Rücksicht auf Satz 2, § 5,

$$i\,\{\alpha_{\nu,\,\mu}\} = 0, \tag{161}$$

wenn die Funktion $\Psi_{\overset{\circ}{\nu},\,\mu}(\omega_\mu)$ für $\omega_\mu = \alpha_{\nu,\,\mu}$ einen Wendepunkt,

$$i\,\{\alpha_{\nu,\,\mu}\} = \pm 1, \tag{162}$$

wenn die Funktion $\Psi_{\overset{\circ}{\nu},\,\mu}(\omega_\mu)$ für $\omega_\mu = \alpha_{\nu,\,\mu}$ ein Extremum hat.

In diesem letzteren Falle führt eine Untersuchung, die der des Abschnitts 108, § 21, nachgebildet ist, schliesslich zu der Formel (138), § 21, entsprechenden Gleichung:

$$i\,\{\alpha_{\nu,\,\mu}\} = \operatorname{sg} \frac{\Psi'_{\overset{\circ}{\nu},\,\mu}(\alpha_{\nu,\,\mu} + \varepsilon)}{C_1 + C_2\,\alpha_{\nu,\,\mu} - \Psi_{\overset{\circ}{\nu},\,\mu}(\alpha_{\nu,\,\mu})}, \tag{163}$$

welche das Vorzeichen in (162) eindeutig bestimmt.

Um sich von der Beziehung (163) ein anschauliches Bild zu machen, betrachte man in der ω_μ, y-Ebene die beiden Kurven

$$y = C_1 + C_2\,\omega_\mu, \quad y = \Psi_{\overset{\circ}{\nu},\,\mu}(\omega_\mu). \tag{164}$$

Dann überzeugt man sich, indem man die Ergebnisse dieses Abschnitts zusammenfasst, insbesondere in Hinblick auf die Beziehung (161) und (163), unmittelbar von der Richtigkeit von

Satz 14: *Es sei $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\,\mu-1}\}$ ein K. V. der Ordnung $\mu \geqq 1$ vom Typus III und es sei $\{\alpha_{\nu,\,\mu}\}$ ein in $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\,\mu-1}\}$ enthaltener K. V. derart, dass die Veraussetzung* (160) *erfüllt ist.*

Dann ist

$i\,\{\alpha_{\nu,\,\mu}\} = \;\; 0$, *wenn die Funktion $\Psi_{\overset{\circ}{\nu},\,\mu}(\omega_\mu)$ für $\omega_\mu = \alpha_{\nu,\,\mu}$ einen Wendepunkt hat;*

$i\,\{\alpha_{\nu,\,\mu}\} = +1$, *wenn für $\omega_\mu = \alpha_{\nu,\,\mu}$ die Kurve $y = \Psi_{\overset{\circ}{\nu},\,\mu}(\omega_\mu)$ entweder ein oberhalb der Geraden $y = C_1 + C_2\,\omega_\mu$ gelegenes Maximum, oder ein unterhalb dieser Geraden gelegenes Minimum,*

$i\{\alpha_{\nu,\mu}\} = -1$, *wenn für* $\omega_\mu = \alpha_{\nu,\mu}$ *die Kurve* $y = \Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ *entweder ein unterhalb der Geraden* $y = C_1 + C_2\,\omega_\mu$ *gelegenes Maximum oder ein oberhalb dieser Geraden gelegenes Minimum besitzt.*

119. Entsprechend der Definition XIII des § 21 formulieren wir jetzt

Definition XIV: *Der K. V.* $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}\}$ *vom Typus III heisst vom Normaltypus III, wenn die Funktion* $C_1 + C_2\,\omega_\mu - \Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ *für alle reellen Wurzeln* $\omega_\mu = \alpha_{\nu,\mu}$ *der Gleichung* $\Psi'_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu) = 0$ *von Null verschieden ist.*

Ein K. V. vom Typus III, der diese Bedingung nicht erfüllt, heisst vom allgemeinen Typus III.

Ist jetzt der K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}\}$ vom Normaltypus III, so folgt aus (159), (161) und (163)

$$i\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}\} = \sum_{\alpha_{\nu,\mu}}{}' \operatorname{sg} \frac{\Psi'_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\alpha_{\nu,\mu} + \varepsilon)}{C_1 + C_2\,\alpha_{\nu,\mu} - \Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\alpha_{\nu,\mu})}; \tag{165}$$

dabei ist die Summation rechter Hand über alle diejenigen Stellen $\omega_\mu = \alpha_{\nu,\mu}$ zu erstrecken, für welche die Funktion $\Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ ein Extremum hat, d. h. für welche die Gleichung $\Psi'_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu) = 0$ Nullstellen ungerader Ordnung besitzt.

120. Um jetzt für den Fall des Normaltypus III eine Abschätzung des Index $i\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}\}$ zu bestimmen, schicken wir eine einfache Betrachtung voraus.

Die beiden in Formel (164) angegebenen Kurven mögen sich in den zu den reellen Abscissen

$$\omega_\mu = \beta_\varkappa \ (\varkappa = 1, 2, \ldots, N), \quad \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_N$$

gehörigen Punkten schneiden oder berühren. Dann sind nach Definition XIV sämtliche reellen Wurzeln $\alpha_{\nu,\mu}$ der Gleichung (157) von jedem der N Werte $\beta_\varkappa$ verschieden.

Ist jetzt im offenen Intervall $\beta_\varkappa < \omega_\mu < \beta_{\varkappa+1}$

$$\Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu) > C_1 + C_2\,\omega_\mu,$$

so ist entweder die Anzahl der Maxima von $\Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ in diesem Intervall um eins grösser als die Anzahl der Minima, oder aber die beiden Anzahlen der Maxima und Minima sind einander gleich; ist hingegen im offenen Intervall $\beta_\varkappa < \omega_\mu < \beta_{\varkappa+1}$

$$\Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu) < C_1 + C_2\,\omega_\mu,$$

so ist entweder die Anzahl der Minima von $\Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ in diesem Intervall um eins grösser als die Anzahl der Maxima, oder aber die beiden Anzahlen der Maxima und Minima sind einander gleich.

Folglich ist aber nach Satz 14

$$(166) \qquad \sum_{\beta_\varkappa < \alpha_{\nu,\mu} < \beta_{\varkappa+1}} i\,\{\alpha_{\nu,\mu}\} = 0 \text{ oder } 1,$$

wobei die Summe über alle reellen Wurzeln $\alpha_{\nu,\mu}$ der Gleichung (157) des Intervalls $\beta_\varkappa < \omega_\mu < \beta_{\varkappa+1}$ zu erstrecken ist.

Zum Schluss betrachte man noch $\Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ in den beiden Intervallen $\beta_N < \omega_\mu < +\infty$ und $-\infty < \omega_\mu < \beta_1$. Wie man leicht einsieht, gilt dann der Satz:

Ist für $\beta_N < \omega_\mu < +\infty$

$$\Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu) > C_1 + C_2\,\omega_\mu,$$

so sind entweder die beiden Anzahlen der Maxima und Minima von $\Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ im angegebenen Intervall einander gleich, oder aber es ist die Anzahl der Minima um eins grösser als die Anzahl der Maxima. Der letztere Fall kann aber nur eintreten, wenn die notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung

$$(167) \qquad \operatorname{sg} C_2 = -\operatorname{sg} \Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\infty) = -\operatorname{sg}\left[\frac{\partial^{r_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}}}{\partial\,\omega_{\mu-1}^{r_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}}}\,\Delta_{\mu-1}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}}\,\Phi_t\right]_{\overset{\circ}{\nu}}$$

(vgl. Formel (22), (27), § 14, und (109), § 19) erfüllt ist.

Ist hingegen für $\beta_N < \omega_\mu < +\infty$

$$\Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu) < C_1 + C_2\,\omega_\mu,$$

so sind entweder die beiden Anzahlen der Maxima und Minima von $\Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ im angegebenen Intervall einander gleich, oder aber es ist die Anzahl der Maxima um eins grösser als die Anzahl der Minima, doch kann auch hier wieder dieser letztere Fall höchstens dann eintreten, wenn die Bedingung (167) erfüllt ist.

Mithin führt der Satz 14 auf die Beziehung

$$(168) \qquad \sum_{\alpha_{\nu,\mu} > \beta_N} i\,\{\alpha_{\nu,\mu}\} = 0 \text{ oder } = -1,$$

wobei die Summe den Wert -1 nur annehmen kann, wenn die notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung (168) erfüllt ist.

Durch eine entsprechende für das Intervall $-\infty < \omega_\mu < \beta_1$ ausgeführte Überlegung erhalten wir ebenso

$$\sum_{\alpha_{\nu,\mu}<\beta_1} i\{\alpha_{\nu,\mu}\} = 0 \text{ oder } = -1, \tag{169}$$

wobei der Fall $\sum\limits_{\alpha_{\nu,\mu}<\beta_1} = -1$ nur eintreten kann, wenn die notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung

$$\operatorname{sg} C_2 = \operatorname{sg} \Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(-\infty) = (-1)^{r_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}+1} \operatorname{sg}\left[\frac{\partial^{r_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}}}{\partial\,\omega_{\mu-1}^{r_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}}} \Delta_{\mu-1}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}} \Phi_t\right]_{\overset{\circ}{\nu}} \tag{170}$$

erfüllt ist. Offenbar lassen sich die beiden Bedingungen (167) und (170) nur für gerades $r_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}$ (aber nicht für ungerades $r_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}$) gleichzeitig erfüllen.

121. Setzt man nunmehr für C_2 seinen Wert aus Gleichung (158) in die beiden Beziehungen (167) und (170) ein, so führen in Verbindung mit Formel (159) die drei Beziehungen (166), (168) und (169) zu dem

Satz 15: *Es sei der K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}\}$ vom Normaltypus III. Dann ist immer*

$$i\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}\} \geqq -2,$$

und zwar kann der äusserste Fall $i\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}\} = -2$ höchstens dann eintreten, wenn **erstens** *der K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}\}$ von gerader Mächtigkeit ist und wenn* **zweitens**

$$\operatorname{sg}\left[\Delta_{\mu-1}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}} \varphi_t\right]_{\overset{\circ}{\nu}} = -\operatorname{sg}\left[\frac{\partial^{r_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}}}{\partial\,\omega_{\mu-1}^{r_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}}} \Delta_{\mu-1}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}} \Phi_t\right]_{\overset{\circ}{\nu}}.$$

Zusatz zu Satz 15: *Der Inhalt von Satz 15 lässt andererseits auch die Auffassung zu, dass er eine Abschätzung für den durch Formel (165) bestimmten Ausdruck liefert.* Hierbei wird von $\Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ nur benutzt, dass es eine reelle stetig differentiierbare Funktion von ω_μ mit endlich vielen Maxima und Minima ist und sich für Werte von ω_μ von grossem absoluten Betrage wie ein Polynom verhält, dessen Glied höchsten Grades bis auf einen positiven Zahlenfaktor

$$= \left[\frac{\partial^{r_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}}}{\partial \omega_{\mu-1}^{r_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}}} \Delta_{\mu-1}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}} \Phi_t \right]_{\overset{\circ}{\nu}} \omega_\mu^{r_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}+1}$$

ist.

§ 24. Der Index eines Kurvenverbandes höherer Ordnung vom allgemeinen Typus III.

122. Es sei der K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}\}$ zwar vom Typus III, aber nicht mehr vom Normaltypus III; d. h. es gelten zwar noch die Beziehungen (156), (157) und (158) des § 23, aber die Gleichung $\Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu) = 0$ möge mindestens eine reelle Wurzel $\omega_\mu = \mathring{\alpha}_\mu$ haben, derart dass gleichzeitig

$$C_1 + C_2\,\alpha_\mu - \Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\mathring{\alpha}_\mu) = 0 \tag{171}$$

ist.

Wir wollen jetzt zeigen, dass auch unter diesen allgemeineren Voraussetzungen für den K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}\}$ die Aussagen des Satzes 15 ihre Gültigkeit in vollem Umfange behalten. Zunächst suchen wir aber mit der in den Abschnitten 113 und 114 des § 22 entwickelten Methode zu beweisen, dass der K. V. $\{\mathring{\alpha}_u\}$ immer von erster Art oder zweiter Art ist.

Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass nach Hilfssatz 13 Formel (115), § 19,

$$\left[\tilde{B}_{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}\right]_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}(\omega_\mu) = C_1 + C_2\,\omega_\mu - \Psi_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu) \tag{172}$$

ist, und dass diese Grösse als erster von Null verschiedener Koeffizient der Entwicklung der in Formel (98), § 19, eingeführten Funktion[1]

$$\begin{aligned} &2\,\tilde{B}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}\left(\sigma^q,\ \sigma^{p_t}\left(\omega_\mu\sigma^\mu + \sum_{\varkappa=0}^{\mu-1}\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\varkappa}\,\sigma^\varkappa\right)\right) \\ &\qquad = \sigma^{l_t-q-p_t}\left(\left[\tilde{B}_{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}\right]_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}(\omega_\mu)\,\sigma^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}} + \cdots\right) \end{aligned} \tag{173}$$

aufgefasst werden kann; denn die zu einem Exponenten $n \leqq n_{\overset{\circ}{\nu},\mu} + \mu - 1$ gehörigen Koeffizienten dieser Entwicklung hängen nach Hilfssatz 11, § 19, nur von $\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},1}, \ldots, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu-1}$ aber nicht mehr von ω_μ ab und verschwinden nach Gleichung (156), § 23.

---

[1] vgl. Fussnote S. 277, § 22.

Nunmehr suchen wir mit Rücksicht auf die Beziehungen (171), (172) und (173) eine Funktion $\omega_\mu = \chi_\mu(\sigma)$ zu bestimmen, die der Gleichung

$$(174) \qquad 2\,\tilde{B}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}\left(\sigma^q,\ \sigma^{p_t}\left(\omega_\mu\,\sigma^\mu + \sum_{\varkappa=0}^{\mu-1} \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\varkappa}\,\sigma^\varkappa\right)\right) = 0$$

und der Nebenbedingung

$$(175) \qquad \lim_{\sigma\to 0} \omega_\mu \to \overset{\circ}{\alpha}_\mu$$

genügt.

Andererseits folgt aber aus den Beziehungen (172) und (173)

$$\lim_{\substack{\sigma\to 0\\ \omega_\mu\to\overset{\circ}{\alpha}_\mu}} \frac{\partial}{\partial\,\omega_\mu}\,\frac{2\,\tilde{B}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}}{\sigma^{l_t-q-p_t+n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}} \to C_2 - \Psi'_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\overset{\circ}{\alpha}_\mu) = C_2 \neq 0$$

wegen (158), § 23, und weil nach Voraussetzung $\overset{\circ}{\alpha}_\mu$ eine Wurzel der Gleichung $\Psi'_{\overset{\circ}{\nu},\mu}(\omega_\mu) = 0$ ist. Mithin ist auf Grund des Fundamentalsatzes über implizite Funktionen, die Funktion $\omega_\mu = \chi_\mu(\sigma)$ durch die Gleichungen (174) und (175) eindeutig bestimmt und hat die Eigenschaft, das Rechteck $0 < \sigma \leqq \delta$, $\overset{\circ}{\alpha}_\mu - \varepsilon \leqq \omega_\mu \leqq \overset{\circ}{\alpha}_\mu + \varepsilon$ der σ; ω_μ-Ebene, wenn $\varepsilon > 0$ hinreichend klein gewählt wird, in zwei Gebiete zu teilen, derart dass der Ausdruck (173), als Funktion von σ und ω_μ betrachtet, in jedem der beiden Teilgebiete von konstantem Vorzeichen ist und nur beim Überschreiten der Kurve $\omega_\mu = \chi_\mu(\sigma)$ sein Vorzeichen wechselt.

Ferner ist nach Formel (99), § 19,

$$(176) \qquad [2\,B]_\nu = 2\,\tilde{B}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\mu}+\mu}(\sigma^q,\ \sigma^{p_t}\,\Omega_\nu(\sigma)).$$

Folglich kann die Funktion

$$(177) \qquad \sigma^{p_t}\,\chi(\sigma) = \sigma^{p_t}\left(\chi_\mu(\sigma)\,\sigma^\mu + \sum_{\varkappa=0}^{\mu-1} \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\varkappa}\,\sigma^\varkappa\right)$$

unmöglich gleich einer der Kurven $\vartheta = \theta_\nu(\varrho) = \sigma^{p_t}\,\Omega_\nu(\sigma)$ des K. V. $\{\alpha_\mu\}$ sein, da dann wegen (174) und (176) $2\,B$ und A für $\vartheta = o^{p_t}\chi(\sigma)$ gleichzeitig verschwinden würden, im Widerspruch mit der Voraussetzung, dass die vorgelegte Fläche für $\varrho = 0$ einen isolierten Nabel hat.

Es mögen jetzt ebenso wie in Abschnitt 114, § 22, die Funktionen $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ für $\nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2$ sämtliche Kurven von ungeradem Vielfachheitsgrad s_ν des K. V.

$\{\mathring{\alpha}_\mu\}$ der Grösse nach geordnet darstellen (vgl. Formel (57), § 4), während die Kurven des K. V. $\{\mathring{\alpha}_\mu\}$ von geradem Vielfachheitsgrad mit Rücksicht auf die Definitionsgleichung (59), § 4, fortgelassen sind. (Die Numerierung der Kurven $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ ist somit auch hier ebenso wie in Abschnitt 114, § 22, vorübergehend gegenüber der von Formel (57), § 4, abgeändert). Dann existiert ein Index ν_0, derart dass $\nu_1 - 1 \leqq \nu_0 \leqq \nu_2$ und dass für $0 < \sigma \leqq \delta$

$$(178) \qquad \Omega_\nu(\sigma) > \chi(\sigma) \text{ für } \nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_0, \; \Omega_\nu(\sigma) < \chi(\sigma) \text{ für } \nu_0 + 1 \leqq \nu \leqq \nu_2.$$

Nunmehr folgt aus der oben bewiesenen Eigenschaft der Funktion $\omega_\mu = \chi_\mu(\sigma)$ in Verbindung mit den Beziehungen (174), (176) und (177), dass, wenn ν die ganzen Zahlen des Intervalls $\nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2$ durchläuft, der Ausdruck $[2\,B]_\nu$ höchstens einmal, nämlich beim Übergang von ν_0 zu $\nu_0 + 1$, sein Vorzeichen wechselt. Damit ist bewiesen, dass der K. V. $\{\mathring{\alpha}_\mu\}$ unter der Voraussetzung (171) von zweiter Art ist, ausgenommen in den beiden Grenzfällen $\nu_0 = \nu_1 - 1$ und $\nu_0 = \nu_2$. In diesen beiden Fällen ist der K. V. $\{\mathring{\alpha}_\mu\}$ sogar von erster Art, da dann entweder $\Omega_\nu(\sigma) < \chi(\sigma)$ für alle $\nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2$, oder aber $\Omega_\nu(\sigma) > \chi(\sigma)$ für alle $\nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2$ ist.

123. Mit Rücksicht auf die Voraussetzung (171) haben die beiden in Formel (164), § 23, angegebenen Kurven einen Schnittpunkt mit der Abscisse $\omega_\mu = \mathring{\alpha}_\mu$. Man wähle nunmehr das Intervall $\mathring{\alpha}_\mu - \varepsilon < \omega_\mu < \alpha_\mu + \varepsilon$ klein genug, dass in ihm die beiden Kurven der Formel (164) sich einzig für $\omega_\mu = \mathring{\alpha}_\mu$ schneiden mögen und dort ausser $\mathring{\alpha}_\mu$ auch keine weitere Wurzel der Gleichung $\Psi'_{\mathring{\nu},\mu}(\omega_\mu) = 0$ enthalten ist. Ferner bestimme man eine Folge von $\nu_2 - \nu_1 + 1$ Zahlen $\hat{\alpha}_{\nu,\mu}\,(\nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2)$ derart, dass

$$\mathring{\alpha}_\mu + \varepsilon > \hat{\alpha}_{\nu_1,\mu} > \cdots > \hat{\alpha}_{\nu_0,\mu} > \mathring{\alpha}_\mu > \hat{\alpha}_{\nu_0+1,\mu} > \cdots > \hat{\alpha}_{\nu_2,\mu} > \mathring{\alpha}_\mu - \varepsilon;$$

endlich ändere man die Kurve $y = \Psi_{\mathring{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ derart ab, dass die neue Kurve, die wir mit $y = \hat{\Psi}_{\mathring{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ bezeichnen wollen, im Intervall $\mathring{\alpha}_\mu + \varepsilon > \omega_\mu > \mathring{\alpha}_\mu - \varepsilon$

erstens überall stetige Tangenten hat, insbesondere auch in den Nahtpunkten für $\omega_\mu = \mathring{\alpha}_\mu + \varepsilon$ und $\omega_\mu = \mathring{\alpha}_\mu - \varepsilon$,

zweitens mit der Geraden $y = C_1 + C_2\,\omega_\mu$ nur einen einzigen Schnittpunkt für $\omega_\mu = \mathring{\alpha}_\mu$ hat,

drittens für alle $\omega_\mu = \hat{\alpha}_{\nu,\mu}\,(\nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2)$ und nur an diesen Punkten Extrema hat, während für $\omega_\mu \geqq \mathring{\alpha}_\mu + \varepsilon$ und $\omega_\mu \leqq \mathring{\alpha}_\mu - \varepsilon$ die Funktion $\hat{\Psi}_{\mathring{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ mit $\Psi_{\mathring{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ übereinstimmen möge.

Setzt man jetzt

$$\hat{\imath}\{\mathring{\alpha}_\mu\} = \sum_{\nu=\nu_1}^{\nu_2} \operatorname{sg} \frac{\hat{\Psi}_{\mathring{\nu},\mu}(\alpha_{\nu,\mu} + \varepsilon')}{C_1 + C_2\,\hat{\alpha}_{\nu,\mu} - \hat{\Psi}_{\mathring{\nu},\mu}(\hat{\alpha}_{\nu,\mu})}, \tag{179}$$

wobei $\varepsilon' > 0$ so klein gewählt ist, dass

$$\hat{\alpha}_{\nu,\mu} + \varepsilon' < \hat{\alpha}_{\nu-1,\mu},$$

so behaupten wir, es ist

$$\hat{\imath}\{\alpha_\mu\} = i\{\mathring{\alpha}_\mu\}. \tag{180}$$

124. Zum Beweise von (180) gehen wir von der Definitionsgleichung (59) des § 4 aus

$$i\{\mathring{\alpha}_\mu\} = \sum_{\nu=\nu_1}^{\nu_2} \operatorname{sg} \frac{\dfrac{\partial^{s_\nu} A(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_\nu}}}{2\,B(\varrho, \vartheta)} \Bigg/_{\vartheta=\theta_\nu(\varrho)}.^{1} \tag{181}$$

Dann folgt einerseits aus den Beziehungen (172), (173), (174) und (176)

$$\operatorname{sg}[2\,B]_\nu = \operatorname{sg}\left[2\,\tilde{B}^{n_{\mathring{\nu},\mu}+\mu}\right]_\nu = \begin{cases} \operatorname{sg}\,(C_1 + C_2(\mathring{\alpha}_\mu + \varepsilon) - \Psi_{\mathring{\nu},\mu}(\mathring{\alpha}_\mu + \varepsilon)) & \text{für } \nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_0 \\ \operatorname{sg}\,(C_1 + C_2(\mathring{\alpha}_\mu - \varepsilon) - \Psi_{\mathring{\nu},\mu}(\mathring{\alpha}_\mu - \varepsilon)) & \text{für } \nu_0 + 1 \leqq \nu \leqq \nu_2, \end{cases}$$

und weiter mit Rücksicht auf die Eigenschaften 1. und 2. der Kurve $y = \hat{\Psi}_{\mathring{\nu},\mu}(\omega_\mu)$

$$\operatorname{sg}[2\,B]_\nu = \operatorname{sg}\,(C_1 + C_2\,\hat{\alpha}_{\nu,\mu} - \hat{\Psi}_{\mathring{\nu},\mu}(\hat{\alpha}_{\nu,\mu})) \quad \text{für alle } \nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2. \tag{182}$$

Andererseits ist

$$\operatorname{sg} \frac{\partial^{s_{\nu_1}} A(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_{\nu_1}}} \Bigg/_{\vartheta=\theta_{\nu_1}(\varrho)} = \operatorname{sg} A(\sigma^q, \sigma^{p_t}(\varepsilon\,\sigma^u + \Omega_{\nu_1}(\sigma)));$$

und hieraus ergibt sich, wenn man $A(\sigma^q, \sigma^{p_t}(\varepsilon\,\sigma^u + \Omega_{\nu_1}(\sigma)))$ in eine Potenzreihe nach σ entwickelt, nach dem Satz von Enriques, § 14, in Verbindung mit Formel (46), § 2, und Formel (109), § 19, (vgl. den entsprechenden Schluss in Formel (153), § 22)

---

[1] Man beachte, dass nach der in Abschnitt 123 vorgenommenen Numerierung die Kurven $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ für $\nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2$ sämtlich von ungeradem Vielfachheitsgrad s_ν sind.

$$(183)\qquad \operatorname{sg} \frac{\partial^{s_{\nu_1}} A(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_{\nu_1}}}\Bigg/_{\vartheta=\theta_{\nu_1}(\varrho)} = \operatorname{sg} \left[\varDelta_\mu^{n_{\mathring{\nu},\mu}} \Phi_t\right]_{\mathring{\nu},\mu-1} (\mathring{\alpha}_\mu + \varepsilon) = \operatorname{sg} \Psi'_{\mathring{\nu},\mu}(\mathring{\alpha}_\mu + \varepsilon).$$

Ausserdem gelten infolge der alternierenden Grundeigenschaft (60), § 4, der Definitionsgleichung (59), § 4, für die Glieder der Summe (181) die Beziehungen

$$(184)\qquad \operatorname{sg} \frac{\partial^{s_\nu} A(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_\nu}}\Bigg/_{\vartheta=\theta_\nu(\varrho)} = -\operatorname{sg} \frac{\partial^{s_{\nu+1}} A(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_{\nu+1}}}\Bigg/_{\vartheta=\theta_{\nu+1}(\varrho)} \text{ für } \nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2 - 1.$$

Aus den Eigenschaften 1. und 3. der Kurve $y = \hat{\Psi}_{\mathring{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ folgt nun aber unmittelbar

$$(185)\qquad \begin{cases} \operatorname{sg} \hat{\Psi}'_{\mathring{\nu},\mu}(\alpha_{\nu_1,\mu} + \varepsilon') = \operatorname{sg} \Psi'_{\mathring{\nu},\mu}(\mathring{\alpha}_\mu + \varepsilon), \\ \operatorname{sg} \hat{\Psi}'_{\mathring{\nu},\mu}(\hat{\alpha}_{\nu,\mu} + \varepsilon') = -\operatorname{sg} \hat{\Psi}'_{\mathring{\nu},\mu}(\hat{\alpha}_{\nu+1,\mu} + \varepsilon'); \end{cases}$$

und somit schliesst man aus (183), (184) und (185)

$$(186)\qquad \operatorname{sg} \frac{\partial^{s_\nu} A(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^{s_\nu}}\Bigg/_{\vartheta=\theta_\nu(\varrho)} = \operatorname{sg} \hat{\Psi}_{\mathring{\nu},\mu}(\hat{\alpha}_{\nu,\mu} + \varepsilon').$$

Mit den Beziehungen (182) und (186) ist aber die Behauptung (180) mit Rücksicht auf (179) und (181) bewiesen.

125. Es seien jetzt $\mathring{\alpha}_\mu^{(\varkappa)}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, \varkappa_0)$ alle gemeinsamen reellen Wurzeln der beiden Gleichungen

$$(187)\qquad \Psi'_{\mathring{\nu},\mu}(\omega_\mu) = 0,\ \ C_1 + C_2\,\omega_\mu - \Psi_{\mathring{\nu},\mu}(\omega_\mu) = 0.$$

und es werde ε so klein gewählt, dass in den $\varkappa_0$ Intervallen

$$(188)\qquad \mathring{\alpha}_\mu^{(\varkappa)} - \varepsilon < \omega_\mu < \mathring{\alpha}_\mu^{(\varkappa)} + \varepsilon \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \varkappa_0)$$

ausser der Stelle $\omega_\mu = \mathring{\alpha}_\mu^{(\varkappa)}$ keine weitere Wurzel von einer der beiden Gleichungen (187) gelegen sind.

Nunmehr konstruiere man eine Funktion $\hat{\Psi}_{\mathring{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ mit stetiger Tangente derart, dass ausserhalb der Intervalle (188)

$$(189)\qquad \hat{\Psi}_{\mathring{\nu},\mu}(\omega_\mu) = \Psi_{\mathring{\nu},\mu}(\omega_\mu),$$

während im Innern der Intervalle (188) $\hat{\Psi}_{\mathring{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ nach den Angaben aus Abschnitt 123 bestimmt werde.

Die Stellen ω_μ, an denen die Funktion $\hat{\Psi}_{\mathring{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ einen Extremalwert annimmt und die wir einheitlich mit $\hat{\alpha}_{\nu,\mu}$ bezeichnen wollen, setzen sich somit zusammen

erstens aus den Stellen $\omega_\mu = \alpha_{\nu,\mu}$, an denen die Kurve $y = \Psi_{\mathring{\nu},\mu}$ ein Extremum hat, ohne die Gerade $y = C_1 + C_2\,\omega_\mu$ zu schneiden,

zweitens aus den Stellen, welche durch die Konstruktion der Funktion $\hat{\Psi}_{\mathring{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ im Innern der Intervalle (188) hinzukommen.

Aus den Gleichungen (159) und (163), § 23, (179) und (180), § 24, ergibt sich schliesslich die Relation

$$i\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\} = \sum_{\hat{\alpha}_{\nu,\mu}} \operatorname{sg} \frac{\hat{\Psi}_{\mathring{\nu},\mu}(\hat{\alpha}_{\nu,\mu} + \varepsilon')}{C_1 + C_2\,\hat{\alpha}_{\nu,\mu} - \hat{\Psi}_{\mathring{\nu},\mu}(\hat{\alpha}_{\nu,\mu})}, \tag{190}$$

wobei die Summation rechter Hand über sämtliche Stellen $\omega_\mu = \hat{\alpha}_{\nu,\mu}$ zu erstrecken ist, an welchen $\hat{\Psi}_{\mathring{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ ein Extremum hat.

126. Da nach Gleichung (189) sich die Funktion $\hat{\Psi}_{\mathring{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ für Werte ω_μ von hinreichend grossem absoluten Betrage wie das Polynom $\Psi_{\mathring{\nu},\mu}(\omega_\mu)$ verhält, so führt die Formel (190) nach dem Zusatz zu Satz 15 am Schluss von § 23 auf den

Satz 15ᵃ: *Es sei der K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}$ vom allgemeinen Typus III. Dann ist immer*

$$i\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\} \geqq -2;$$

und zwar kann der äusserste Fall $i\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\} = -2$ höchstens dann eintreten, wenn ***erstens*** *der K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}$ von gerader Mächtigkeit ist, und wenn* ***zweitens***

$$\operatorname{sg}\left[\Delta_\mu^{n_{\mathring{\nu},\mu}}\varphi_t\right]_{\mathring{\nu}} = -\operatorname{sg}\left[\frac{\partial^{r_{\mathring{\nu},\mu-1}}}{\partial\,\omega_{\mu-1}^{r_{\mathring{\nu},\mu-1}}}\,\Delta_{\mu-1}^{n_{\mathring{\nu},\mu-1}}\,\Phi_t\right]_{\mathring{\nu}}$$

Da wie in Abschnitt 122 gezeigt wurde, alle im K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu-1}\}$ vom allgemeinen Typus III enthaltenen K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu}\}$ entweder von erster oder zweiter Art sind, so folgt aus Satz 1, § 5, und Satz 3, § 6 der

Zusatz zu Satz 15[a]: *Ist der K. V.* $\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\mu-1}\}$ *vom allgemeinen Typus III, so ist der Index eines jeden in* $\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\mu-1}\}$ *enthaltenen K. V.* $\{\alpha_{\nu,\mu+\varkappa}\}$

$$i\{\alpha_{\nu,\mu+\varkappa}\} \geqq -2 \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots).$$

KAPITEL V.

Beweis des Hauptsatzes.

§ 25. Vorbereitende Bemerkungen über Kurvenverbände der Ordnung $\geqq 1$ vom allgemeinen Typus II.

127. In § 17 Formel (55) haben wir der zur Kurve $\vartheta = \theta^\circ_{\bar\nu}(\varrho)$ gehörigen Zahl $l'^\circ_{\bar\nu}$ einen Index μ durch die Beziehung

$$n^\circ_{\bar\nu,\mu} \leqq l'^\circ_{\bar\nu} \leqq n^\circ_{\bar\nu,\mu+1} - 1 \tag{191}$$

zugeordnet. Für das folgende ist es vorteilhaft, diese Definition des Index μ abzuändern, indem man (191) durch die Beziehung

$$n^\circ_{\bar\nu,\mu} + 1 \leqq l'^\circ_{\bar\nu} \leqq n^\circ_{\bar\nu,\mu+1}, \quad \mu \geqq 0 \tag{192}$$

ersetzt.

Es ergibt sich gegenüber dem bisherigen ein Unterschied in der Beziehung nur beim Auftreten von K. V. des Typus III, indem in diesem Falle bisher $l'^\circ_{\bar\nu} = n^\circ_{\bar\nu,\mu}$ gesetzt wurde, jetzt aber $l'^\circ_{\bar\nu} = n^\circ_{\bar\nu,\mu+1}$ zu setzen ist.

Ausser μ werden der Zahl $l'^\circ_{\bar\nu}$ noch zwei weitere Indices μ' und μ'' zugeordnet, welche durch die beiden Beziehungen (vgl. Formel (78) und (86), § 18)

$$n^\circ_{\bar\nu,\mu'} + \mu' \leqq l'^\circ_{\bar\nu} \leqq n^\circ_{\bar\nu,\mu'+1} + \mu', \quad \mu' \geqq 0, \tag{193}$$

$$n^\circ_{\bar\nu,\mu''} + 2\mu'' + 2p_t \leqq l'^\circ_{\bar\nu} \leqq n^\circ_{\bar\nu,\mu''+1} + 2\mu'' + 1 + 2p_t, \quad \mu'' \geqq 0 \tag{194}$$

definiert seien.

128. Dies vorausgeschickt, lassen sich nunmehr die Aussagen von Satz 13, § 22, Satz 15, § 23, Satz 15[a], § 24, und von den ihnen angehängten Zusätze zusammenfassen in

Satz 16: *Es seien* $l'_{\mathring{\nu}}$ *und* $l''_{\mathring{\nu}}$ *die beiden der Kurve* $\vartheta = \theta_{\mathring{\nu}}(\varrho)$ *durch die Formeln* (54), § 17, *und* (122), § 20, *zugeordneten Zahlen, und es sei*

$$l''_{\mathring{\nu}} \geqq l'_{\mathring{\nu}} + \mu + 1, \tag{195}$$

unter μ *den in Formel* (192) *definierten Index verstanden.*

Dann ist immer

$$i\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu}\} \geqq -2. \tag{196}$$

Ferner ist

$$i\{\alpha_{\nu,\mu+\varkappa}\} \geqq -2$$

für jeden in $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu}\}$ *enthaltenen K. V.* $\{\alpha_{\nu,\mu+\varkappa}\}$.

Damit der äusserste Fall $i\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu}\} = -2$ *eintritt, müssen die beiden notwendigen* (aber nicht hinreichenden) *Bedingungen erfüllt sein:*

erstens: *der K. V.* $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mu}\}$ *ist von gerader Mächtigkeit,*
zweitens: *es ist*

$$\operatorname{sg}\left(\alpha_{\mathring{\nu},0}\left(v_{l'_{\mathring{\nu}}-L_t} - \frac{c_{l'_{\mathring{\nu}}-2p_t}}{q^2}\,\frac{\left[\Delta_{\mu''}^{l'_{\mathring{\nu}}-2p_t}\,\varphi_t^{-1}\right]_{\mathring{\nu}}}{(l'_{\mathring{\nu}}-2p_t)!}\right)\right) = \operatorname{sg}\left[\frac{\partial^{r_{\mathring{\nu},\mu}}}{\partial\,\omega_\mu^{r_{\mathring{\nu},\mu}}}\,\Delta_\mu^{n_{\mathring{\nu},\mu}}\,\Phi_t\right]_{\mathring{\nu}}.$$

Hierbei ist μ'' gleich der in Formel (194) definierten Grösse. Ferner ist (vgl. Formel (102), § 19) zu setzen:

$$\left\{\begin{array}{ll} v_{l'_{\mathring{\nu}}-L_t} = 0 & \text{für } l'_{\mathring{\nu}} - L_t < 0 \\ \Delta_{\mu''}^{l'_{\mathring{\nu}}-2p_t}\,\varphi_t^{-1} = 0 & \text{für } l'_{\mathring{\nu}} - 2p_t < 0. \end{array}\right. \tag{197}$$

Beweis: Aus Formel (99) und (104), § 19, ergibt sich in Verbindung mit Formel (36), § 15, Hilfssatz 9, § 18, und Formel (194)

$$B_{\mathring{\nu},l'_{\mathring{\nu}}} = \left[\tilde{B}_{l'_{\mathring{\nu}}}^{l'_{\mathring{\nu}}}\right]_{\mathring{\nu},\mu'} = v_{l'_{\mathring{\nu}}-L_t} + \frac{l_t + l'_{\mathring{\nu}}}{p_t\,\alpha_{\mathring{\nu},0}}\,\frac{\left[\Delta_{\mu'}^{l'_{\mathring{\nu}}}\,\varphi_t\right]_{\mathring{\nu}}}{l'_{\mathring{\nu}}!} - \frac{c_{l'_{\mathring{\nu}}-2p_t}}{q^2}\,\frac{\left[\Delta_{\mu''}^{l'_{\mathring{\nu}}-2p_t}\,\varphi_t^{-1}\right]_{\mathring{\nu}}}{(l'_{\mathring{\nu}}-2p_t)!}. \tag{198}$$

Hierbei bezeichnet μ' den in Formel (193) definierten Index, und man hat offenbar $\mu'' \leqq \mu' \leqq \mu$. Aus der Voraussetzung (195) folgt aber andererseits $B_{\mathring{\nu},\, l'_{\mathring{\nu}}} = 0$, mithin ist nach Formel (198)

$$(199) \qquad \operatorname{sg}\left(\alpha_{\mathring{\nu},\,0}\left(v_{l'_{\mathring{\nu}}-L_t} - \frac{c_{l'_{\mathring{\nu}}-2p_t}}{q^2}\,\frac{\left[\Delta_{\mu''}^{l'_{\mathring{\nu}}-2p_t}\,\varphi_t^{-1}\right]_{\mathring{\nu}}}{(l'_{\mathring{\nu}}-2p_t)!}\right)\right) = -\operatorname{sg}\left[\Delta_{\mu'}^{l'_{\mathring{\nu}}}\,\varphi_t\right]_{\mathring{\nu}}.$$

Ist jetzt

$$n_{\mathring{\nu},\,\mu} + 1 \leqq l'_{\mathring{\nu}} \leqq n_{\mathring{\nu},\,\mu+1} - 1,$$

so ist nach der Tabelle am Schluss von § 20 der K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\,\mu}\}$ vom Typus IV, und Satz 16 folgt aus Satz 13, § 22, in Verbindung mit Formel (199). Ist aber $l'_{\mathring{\nu}} = n_{\mathring{\nu},\,\mu+1}$, so ist der K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\,\mu}\}$ vom allgemeinen Typus III, und Satz 16 folgt aus Satz 15[a], § 24, in Verbindung mit Formel (199). Somit ist Satz 16 vollständig bewiesen.

129. Als nächstes Ziel unserer Betrachtung suchen wir eine Abschätzung für den Index solcher K. V. abzuleiten, die zwar vom Typus II, aber nicht mehr vom Normaltypus sind. So werden wir schliesslich zu der Beziehung

$$(200) \qquad i\{\alpha_{\nu,\,\lambda-1}\} \geqq -2$$

geführt werden, wobei unter $\{\alpha_{\nu,\,\lambda-1}\}$ ein beliebiger K. V. der Ordnung $\lambda \geqq 1$ vom allgemeinen Typus II zu verstehen ist.

Der Beweis der Abschätzung (200), der im § 27 durchgeführt wird, stützt sich auf eine Reihe von Hilfssätzen, die uns zunächst beschäftigen werden.

Hilfssatz 15: *Es sei der K. V. $\{\alpha_{\nu,\,\lambda-1}\}$ der Ordnung $\lambda \geqq 1$ vom allgemeinen Typus II, und es gelte für jeden K. V. $\{\alpha_{\nu,\lambda}\}$ der im K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\,\lambda-1}\}$ enthalten ist, die Abschätzung*

$$(201) \qquad i\{\alpha_{\nu,\,\lambda}\} \geqq -1.$$

Dann ist auch

$$(202) \qquad i\{\alpha_{\mathring{\nu},\,\lambda-1}\} \geqq -1.$$

Beweis: Da die Voraussetzungen des Satzes 10, § 21, erfüllt sind, ist nach Formel (141), § 22,

$$i\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda-1}\} = N - 1 + \sum_{\varkappa=1}^{N} i\{\beta_\varkappa\},$$

wobei N, $\beta_\varkappa$ und $i\{\beta_\varkappa\}$ (vgl. die Ausführungen aus Abschnitt 109., § 21, insbesondere Formel (139), § 21) die gleiche Bedeutung wie in Satz 10 haben. Da aber auch für die K. V. $\{\beta_\varkappa\}$, die ja in $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda-1}\}$ enthalten sind, die Voraussetzung (201) gilt, so ergibt sich

$$i\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda-1}\} \geqq N - 1 - N,$$

und damit ist die Behauptung (202) bewiesen.

130. **Hilfssatz 16:** *Es sei der K. V.* $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda-1}\}$ *der Ordnung* $\lambda \geqq 1$ *vom allgemeinen Typus II, und es gelte für jeden K. V.* $\{\alpha_{\nu,\lambda}\}$, *der im K. V.* $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda-1}\}$ *enthalten ist, die Abschätzung*

$$i\{\alpha_{\nu,\lambda}\} \geqq -2. \tag{203}$$

Es seien jetzt

$$\beta'_1 < \beta'_2 < \cdots < \beta'_U$$

sämtliche reellen Wurzeln **ungerader** *Ordnung der Gleichung*

$$B_{\overset{\circ}{\nu},\, n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda}+\lambda} - \Psi_{\overset{\circ}{\nu},\lambda}(\omega_\lambda) = 0. \tag{204}$$

Nunmehr mögen **nirgends** *zwei aufeinanderfolgende Wurzeln* $\beta'_\varkappa$, $\beta'_{\varkappa+1}$ *existieren derart, dass* **erstens** *beide von der Ordnung* $\geqq 3$ *sind, und dass* **zweitens** *gleichzeitig*

$$i\{\beta'_\varkappa\} = -2, \qquad i\{\beta'_{\varkappa+1}\} = -2.$$

Dann ist auch

$$i\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda-1}\} \geqq -2, \tag{205}$$

und zwar kann unter diesen Voraussetzungen der Fall $i\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda-1}\} = -2$ *höchstens dann eintreten, wenn*

erstens *die Anzahl* U *der Wurzeln* $\beta'_\varkappa$ *ungerade ist,*

zweitens *die Wurzeln* $\beta'_\varkappa$ *für* **ungerades** $\varkappa$ *sämtlich von der Ordnung* $\geqq 3$ *und die Indices*

$$i\{\beta'_\varkappa\} = -2$$

sind für jedes ungerade $\varkappa$.

Insbesondere ist somit

$$i\{\beta'_1\} = i\{\beta'_U\} = -2. \tag{206}$$

Beweis: Neben den Wurzeln ungerader Ordnung der Gleichung (204) haben wir auch die reellen Wurzeln gerader Ordnung von (204) zu betrachten, die wir mit $\beta''_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, G$) bezeichnen wollen.

Jetzt folgt aus Satz 10, § 21, indem man berücksichtigt, dass $N = G + U$ ist,

$$i\{\alpha^\circ_{\nu,\lambda-1}\} = U + G - 1 + \sum_{\varkappa=1}^{U} i\{\beta'_\varkappa\} + \sum_{\varkappa=1}^{G} i\{\beta''_\varkappa\}. \tag{207}$$

Andererseits sind offenbar alle K. V. $\{\beta'_\varkappa\}$ von gerader Mächtigkeit, alle $\{\beta''_\varkappa\}$ von ungerader Mächtigkeit; mithin ergibt sich aus der Voraussetzung (203)

$$i\{\beta'_\varkappa\} \geqq -2, \qquad i\{\beta''_\varkappa\} \geqq -1.$$

Substituiert man ferner diese Abschätzung für $i\{\beta''_\varkappa\}$ in Formel (207), so erhält man zunächst

$$i\{\alpha^\circ_{\nu,\lambda-1}\} \geqq U - 1 + \sum_{\varkappa=1}^{U} i\{\beta'_\varkappa\}. \tag{208}$$

Nun lassen sich aber die Voraussetzungen, die über zwei aufeinanderfolgende Wurzeln ungerader Ordnung $\beta'_\varkappa$ und $\beta'_{\varkappa+1}$ von (204) in Hilfssatz 16 gemacht sind, auch folgendermassen formulieren; es mögen jedes Mal aus $i\{\beta'_\varkappa\} = -2$ die Abschätzung $i\{\beta'_{\varkappa+1}\} \geqq 0$ folgen. Denn da $\{\beta'_{\varkappa+1}\}$ von gerader Mächtigkeit ist, folgt aus $i\{\beta'_{\varkappa+1}\} > -2$ genauer $i\{\beta'_{\varkappa+1}\} \geqq 0$.

Mithin ergibt sich

$$\sum_{\varkappa=1}^{U} i\{\beta'_\varkappa\} \geqq \begin{cases} -U \text{ für gerades } U, \\ -U-1 \text{ für ungerades } U; \end{cases}$$

und hieraus folgt in Verbindung mit der Abschätzung (208)

$$i\{\alpha^\circ_{\nu,\lambda-1}\} \geqq \begin{cases} -1 \text{ für gerades } U, \\ -2 \text{ für ungerades } U. \end{cases}$$

Endlich zeigt eine leichte Überlegung, dass der äusserste Fall

$$(209) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{U} i\,\{\beta'_\varkappa\} = -U - 1$$

höchstens dann eintreten kann, wenn die beiden am Ende von Hilfssatz 16 angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

Nach der Beziehung (208) kann nun aber andererseits der Index $i\,\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\,\lambda-1}\}$ seinen Minimalwert -2 nur dann annehmen, wenn gleichzeitig die Gleichung (209) besteht. Damit ist der Hilfssatz 16 vollständig bewiesen.

§ 26. Beweis eines Hilfssatzes.

131. Wir gehen nunmehr von einem K. V. $\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\lambda_0}\}$ $(\lambda_0 \geqq 0)$ aus, dessen Index $i\,\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\lambda_0}\} \leqq -2$ sei. Es sei ferner $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ eine beliebige Kurve des K. V. $\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\lambda_0}\}$ und die dieser Kurve zugeordnete Zahl l'_ν genüge zunächst der Bedingung

$$n^\circ_{\bar\nu,\lambda_0} + 1 \leqq l'_\nu \leqq n^\circ_{\bar\nu,\,\lambda_0+1},$$

d. h. es sei nach Formel (192), § 25, $\lambda_0 = \mu$. Dann ist nach Hilfssatz 7, § 18, in Verbindung mit den Definitionsgleichungen (54), § 17, die Zahl l'_ν bereits durch die $\lambda_0 + 1$ Konstanten $\alpha^\circ_{\bar\nu,0}, \alpha^\circ_{\bar\nu,1}, \ldots, \alpha^\circ_{\bar\nu,\lambda_0}$ eindeutig bestimmt; sie bleibt somit für jede beliebige Kurve des K. V. $\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\lambda_0}\}$ die gleiche. Wir können daher $l'_\nu = l'^\circ_{\bar\nu}$ setzen.

Aus $i\,\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\lambda_0}\} \leqq -2$ folgt ferner $l''^\circ_{\bar\nu} \geqq l'^\circ_{\bar\nu} + \lambda_0 + 1$, da anderenfalls der K. V. $\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\lambda_0}\}$ vom Typus I wäre (vgl. die Tabelle am Schluss von § 20). Mithin erhält man aus Formel (196), Satz 16, § 25, für den Index $i\,\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\lambda_0}\}$ seinen genauen Wert

$$i\,\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\lambda_0}\} = -2.$$

Ist hingegen $l'^\circ_{\bar\nu} > n^\circ_{\bar\nu,\,\lambda_0+1}$, d. h. hat man

$$(210) \qquad [\varDelta^n_{\lambda'}\,\varphi_t]^\circ_{\bar\nu} = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq n \leqq n^\circ_{\bar\nu,\,\lambda_0+1},$$

wobei die Ausdrücke (210) nach Hilfssatz 7, § 18. wieder nur höchstens von den $\alpha^\circ_{\bar\nu,0}, \alpha^\circ_{\bar\nu,1}, \ldots, \alpha^\circ_{\bar\nu,\lambda_0}$ abhängen, so muss damit $i\,\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\lambda_0}\} \leqq -2$ wird, der K. V. $\{\alpha^\circ_{\bar\nu,\lambda_0}\}$ vom allgemeinen Typus II sein. Dann ergibt sich aber aus Hilfssatz 15, § 25, die Existenz einer *endlichen* Folge von K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda}\}$ $(\lambda \geqq \lambda_0)$ derart, dass jeder K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda}\}$ in dem vorhergehenden K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda-1}\}$ der Folge enthalten ist, und dass

$$i\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda}\} \leqq -2. \tag{211}$$

Diese Folge von K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda}\}$, die zunächst gleichfalls alle vom allgemeinen Typus II sind, lässt sich solange fortsetzen, bis man schliesslich auf einen K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}\}$ geführt wird, der entweder vom Typus III oder vom Typus IV ist. Dann ist $l'_{\overset{\circ}{\nu}}$ durch die Reihe der Koeffizienten $\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},1}, \ldots, \alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}$ bereits bestimmt und es ist offenbar

$$n_{\overset{\circ}{\nu},\mu} + 1 \leqq l'_{\overset{\circ}{\nu}} \leqq n_{\overset{\circ}{\nu},\mu+1},$$

ferner ist wieder, da die Beziehung (211) für $\lambda_0 \leqq \lambda \leqq \mu$ gelten soll, die Zahl $l''_{\overset{\circ}{\nu}} \geqq l'_{\overset{\circ}{\nu}} + \mu + 1$, sodass aus Formel (196), Satz 16, § 25 in Verbindung mit (211) $i\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mu}\} = -2$ folgt.

Auf solche Folgen ineinander geschachtelter K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda}\}$, deren Index $i\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda}\} \leqq -2$ ist, bezieht sich der Hilfssatz dieses Paragraphen, welcher gleichzeitig als erster Schritt zum Beweise der behaupteten Abschätzung (200), § 25, anzusehen ist.

132. **Hilfssatz 17:** *Es seien $l'_{\overset{\circ}{\nu}}$ und $l''_{\overset{\circ}{\nu}}$ die beiden einer Kurve $\vartheta = \theta_{\overset{\circ}{\nu}}(\varrho)$ zugeordneten Zahlen, und es werden drei zu $l'_{\overset{\circ}{\nu}}$ gehörigen Indices $\mathring{\mu}, \mathring{\mu}', \mathring{\mu}''$ durch die Abschätzungen* (192), (193) *und* (194), § 25, *bestimmt. Ausserdem werde*

$$i\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda}\} \leqq -2 \quad \text{für} \quad \mathring{\mu}'' \leqq \lambda \leqq \mathring{\mu} \tag{212}$$

vorausgesetzt.

Dann gilt

$$i\{\alpha_{\nu,\lambda}\} \geqq -2 \qquad (\lambda \geqq \mathring{\mu}'') \tag{213}$$

für jeden K. V. $\{\alpha_{\nu,\lambda}\}$, der im K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mathring{\mu}''}\}$ enthalten ist. Insbesondere ist

$$i\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda}\} = -2 \quad \text{für} \quad \mathring{\mu}'' \leqq \lambda \leqq \mathring{\mu},$$

und ausserdem erfüllt jeder in $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\mathring{\mu}''}\}$ enthaltene K. V. $\{\alpha_{\nu,\lambda}\}$, dessen Index $i\{\alpha_{\nu,\lambda}\} = -2$ ist, die beiden Bedingungen:

erstens: *der K. V.* $\{\alpha_{\nu,\lambda}\}$ *ist von gerader Mächtigkeit,*

zweitens: *es ist*

$$(214)\qquad \operatorname{sg}\left(\alpha_{\mathring{\nu},0}\left(v_{l'_{\mathring{\nu}}-L_t}-\frac{c_{l'_{\mathring{\nu}}-2p_t}}{q^2}\,\frac{\left[\Delta_{\mathring{\mu}''}^{l'_{\mathring{\nu}}-2p_t}\Phi_t^{-1}\right]_{\mathring{\nu}}}{(l'_{\mathring{\nu}}-2p_t)!}\right)\right)=\operatorname{sg}\left[\frac{\partial^{r_{\nu,\lambda}}}{\partial\omega_\lambda^{r_{\nu,\lambda}}}\Delta_\lambda^{n_{\nu,\lambda}}\Phi_t\right]_{\nu}.$$

Zusatz zu Hifssatz 17: *Ist* $\mathring{\mu}''=0$, *so gilt die Beziehung* (214) *auch für* $\lambda=0$, *und man kann*

$$(215)\qquad \operatorname{sg}\left[\frac{\partial^{r_{\mathring{\nu},0}}}{\partial\omega_0^{r_{\mathring{\nu},0}}}\Delta_0^0\Phi_t\right]_{\mathring{\nu}}=-\operatorname{sg}\alpha_{\mathring{\nu},0}\,f_{t,0}^{(r_{\mathring{\nu},0}+1)}(\alpha_{\mathring{\nu},0})$$

setzen.

Und in der Tat folgt zunächst aus der Definitionsgleichung (6), § 13, in Verbindung mit Formel (44), § 2,

$$(216)\qquad \left[\frac{\partial^{r_{\mathring{\nu},0}}}{\partial\omega_0^{r_{\mathring{\nu},0}}}\Delta_0^0\Phi_t\right]_{\mathring{\nu}}=F_{t,0}^{(r_{\mathring{\nu},0})}(\alpha_{\mathring{\nu},0}).$$

Da aber ausserdem wegen (212) $l'_{\mathring{\nu}}\geqq 1$ und somit auch $f_{t,0}(\alpha_{\mathring{\nu},0})=0$ ist, so folgt (215) aus (216), wenn man ausser der Tatsache $F_{t,0}^{(\varkappa)}(\alpha_{\mathring{\nu},0})=0$ für $0\leqq\varkappa\leqq$ $\leqq r_{\mathring{\nu},0}-1$ noch die Identitäten (41) und (42) aus § 2 berücksichtigt.

Hat man ausser $\mathring{\mu}''=0$ *auch* $l'_{\mathring{\nu}}=2p_t$, *so wird aus* (214) (vgl. Formel (28), § 15)

$$(217)\qquad \operatorname{sg}\left(v_{2p_t-L_t}-\frac{c_0}{q^2}f_{t,0}^{-1}(\alpha_{\mathring{\nu},0})\right)=-\operatorname{sg}f_{t,0}^{(r_{\mathring{\nu},0}+1)}(\alpha_{\mathring{\nu},0}).$$

133. **Beweis:** Aus der Voraussetzung $i\{\alpha_{\mathring{\nu},\mathring{\mu}}\}\leqq-2$ folgt unmittelbar

$$(218)\qquad l''_{\mathring{\nu}}\geqq l'_{\mathring{\nu}}+\mathring{\mu}+1,$$

da anderenfalls der K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mathring{\mu}}\}$ vom Typus I wäre.

Wir betrachten jetzt alle Kurven $\vartheta=\theta_\nu(\varrho)$ des K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\mathring{\mu}''}\}$. Jeder dieser Kurven sind zwei Zahlen l'_ν und l''_ν zugeordnet, ferner seien μ_ν, μ'_ν bezw. τ_ν die zu den Zahlen l'_ν und l''_ν gehörigen Indices, die durch die Formeln (192), (193), § 25, bezw. (123), § 20, definiert sind.

Ist jetzt

$$l''_\nu \leqq l'_\nu + \mu'_\nu, \tag{219}$$

so wird $\tau_\nu \leqq \mu_\nu$, ferner ist aus der Tabelle am Schluss des § 20 zu ersehen, dass der K. V. $\{\alpha_{\nu,\tau_\nu}\}$ vom Typus I ist. Um so mehr sind nach Satz 1, § 5 auch alle in $\{\alpha_{\nu,\tau_\nu}\}$ enthaltenen K. V. $\{\alpha_{\nu,\lambda}\}$ von erster Art. Mithin erhält man nach Satz 2, § 5 für den Fall (219), sogar

$$i\{\alpha_{\nu,\lambda}\} \geqq -1 \quad \text{für } \lambda \geqq \tau_\nu.$$

Die Bedingung (219) ist gewiss erfüllt, wenn $l'_\nu \neq l'_{\mathring{\nu}}$. Denn ist $l'_\nu < l'_{\mathring{\nu}}$, so ergibt sich aus Formel (198), § 25

$$\begin{aligned} B_{\nu,l'_\nu} &= v_{l'_\nu - L_t} - \frac{c_{l'_\nu - 2p_t}}{q^2} \frac{\left[\Delta_{\mathring{\mu}''}^{l'_\nu - 2p_t} \varphi_t^{-1}\right]_{\mathring{\nu}}}{(l'_\nu - 2p_t)!} + \frac{l_t + l'_\nu}{p_t \alpha_{\mathring{\nu},0}} \frac{\left[\Delta_{\mu'_\nu}^{l'_\nu} \varphi_t\right]_\nu}{l'_\nu!} \\ &= \frac{l_t + l'_\nu}{p_t \alpha_{\mathring{\nu},0}} \frac{\left[\Delta_{\mu'_\nu}^{l'_\nu} \varphi_t\right]_\nu}{l'_\nu!} \neq 0, \end{aligned} \tag{220}$$

da wegen $l'_\nu < l'_{\mathring{\nu}} < l''_{\mathring{\nu}}$ (vgl. Formel (218)) nach Formel (103), § 19,

$$B_{\mathring{\nu},l'_\nu} = v_{l'_\nu - L_t} - \frac{c_{l'_\nu - 2p_t}}{q^2} \frac{\left[\Delta_{\mathring{\mu}''}^{l'_\nu - 2p_t} \varphi_t^{-1}\right]_{\mathring{\nu}}}{(l'_\nu - 2p_t)!} = 0$$

ist. Aus (220) folgt aber $l''_\nu = l'_\nu$, und damit ist im Falle $l'_\nu < l'_{\mathring{\nu}}$ die Beziehung (219) bewiesen.

Ist aber $l'_\nu > l'_{\mathring{\nu}}$, so hat man nach Formel (103), § 19,

$$B_{\nu,l'_{\mathring{\nu}}} = v_{l'_{\mathring{\nu}} - L_t} - \frac{c_{l'_{\mathring{\nu}} - 2p_t}}{q^2} \frac{\left[\Delta_{\mathring{\mu}''}^{l'_{\mathring{\nu}} - 2p_t} \varphi_t^{-1}\right]_{\mathring{\nu}}}{(l'_{\mathring{\nu}} - 2p_t)!}.$$

Andererseits ist aber wegen $l''_{\mathring{\nu}} > l'_{\mathring{\nu}}$ nach Formel (198), § 25,

$$B_{\mathring{\nu},l'_{\mathring{\nu}}} = B_{\nu,l'_{\mathring{\nu}}} + \frac{l_t + l'_{\mathring{\nu}}}{p_t \alpha_{\mathring{\nu},0}} \frac{\left[\Delta_{\mathring{\mu}'}^{l'_{\mathring{\nu}}} \varphi_t\right]_{\mathring{\nu}}}{l'_{\mathring{\nu}}!} = 0,$$

mithin $B_{\nu, l'^{\circ}_{\nu}} \neq 0$ wegen $\left[\Delta_{\mathring{\mu}'}^{l'^{\circ}_{\nu}} \varphi_t\right]_{\mathring{\nu}} \neq 0$, d. h. aber, es ist $l''_\nu = l'^{\circ}_{\nu} < l'_\nu$, und somit gilt auch im Fall $l'_\nu > l'^{\circ}_{\nu}$ die Beziehung (219).

Es sei somit nunmehr

$$l'_\nu = l'^{\circ}_{\nu}, \quad l''_\nu \geqq l'_\nu + \mu_\nu + 1.$$

Dann folgen die Behauptungen unseres Hilfssatzes 17 für den K. V. $\{\alpha_{\nu, \mu_\nu}\}$ und für jeden in $\{\alpha_{\nu, \mu_\nu}\}$ enthaltenen K. V. $\{\alpha_{\nu, \mu_\nu + \varkappa}\}$ $(\varkappa \geqq 1)$ aus Satz 16, § 25.

134. Dies vorausgeschickt, stützen wir uns nunmehr beim Beweise von Hilfssatz 17 auf das Verfahren der vollständigen Induktion, d. h. wir gehen von der Annahme aus, dass, unter λ_0 eine feste Zahl verstanden derart, dass

$$\mathring{\mu}'' + 1 \leqq \lambda_0 \leqq \mathring{\mu}, \tag{221}$$

die Behauptungen von Hilfssatz 17 für alle in dem K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu}, \lambda_0 - 1}\}$ enthaltenen K. V. $\{\alpha_{\nu, \lambda}\}$ $(\lambda_0 \leqq \lambda \leqq \mu_\nu)$ bereits als richtig erkannt sind, und suchen nunmehr diese Behauptungen für den K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu}, \lambda_0 - 1}\}$ selbst zu beweisen. Diese Annahme wird dadurch ermöglicht, dass nach den Darlegungen des Abschnitts 133 der Hilfssatz 17 für die K. V. $\{\alpha_{\nu, \mu_\nu}\}$ bereits bewiesen ist, wenn der Index ν zu einer beliebigen im K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu}, \lambda_0 - 1}\}$ enthaltenen Kurve $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ gehört.

Nach der Tabelle am Schluss von § 20 ist mit Rücksicht auf Formel (212) und (221) der K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu}, \lambda_0 - 1}\}$ vom allgemeinen Typus II. Um zunächst

$$i\{\alpha_{\mathring{\nu}, \lambda_0 - 1}\} = -2 \tag{222}$$

zu beweisen, haben wir nach Hilfssatz 16, § 25 nur zu zeigen, dass nicht zwei aufeinander folgende reelle Wurzeln ungerader Ordnung $\omega_{\lambda_0} = \beta'_\varkappa$, $\omega_{\lambda_0} = \beta'_{\varkappa+1}$ der Gleichung

$$B_{\mathring{\nu}, n_{\mathring{\nu}, \lambda_0} + \lambda_0} - \Psi_{\mathring{\nu}, \lambda_0}(\omega_{\lambda_0}) = 0 \tag{223}$$

existieren derart dass *erstens* die Ordnungszahl dieser beiden Wurzeln $\geqq 3$ ist, und dass *zweitens* gleichzeitig

$$i\{\beta'_\varkappa\} = -2, \quad i\{\beta'_{\varkappa+1}\} = -2.$$

Denn aus der Behauptung (205) des Hilfssatzes 16 folgt die Gleichung (222) unmittelbar mit Rücksicht auf die Voraussetzung (212).

Demzufolge setzen wir jetzt voraus, es seien $\beta'_\varkappa$ und $\beta'_{\varkappa+1}$ zwei unmittelbar aufeinanderfolgende reelle Wurzeln ungerader Ordnung $\geqq 3$ der Gleichung (223), sodass nach den Ausführungen des Abschnitts 109, § 21, zu diesen beiden Wurzeln K. V. $\{\beta'_\varkappa\}$ und $\{\beta'_{\varkappa+1}\}$ der Ordnung $\lambda_0 + 1$ von gerader Mächtigkeit gehören, und es sei ausserdem

$$(224) \qquad i\{\beta'_\varkappa\} = -2;$$

dann behaupten wir, es ist

$$(225) \qquad i\{\beta'_{\varkappa+1}\} \geqq 0.$$

Offenbar sind $\beta'_\varkappa$ und $\beta'_{\varkappa+1}$ die Koeffizienten der Potenz σ^{λ_0} zweier Potenzreihen $\Omega_{\nu'}(\sigma)$ und $\Omega_{\nu''}(\sigma)$ derart, dass die beiden Kurven

$$\vartheta = \theta_{\nu'}(\varrho) = \sigma^{p_t}\,\Omega_{\nu'}(\sigma), \quad \vartheta = \theta_{\nu''}(\varrho) = \sigma^{p_t}\,\Omega_{\nu''}(\sigma)$$

beide im K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\,\lambda-1}\}$ enthalten sind; wir können daher, indem wir unsere bisherige Bezeichnungsweise wieder aufnehmen

$$(226) \qquad \beta'_\varkappa = \alpha_{\nu',\,\lambda_0}, \quad \beta'_{\varkappa+1} = \alpha_{\nu'',\,\lambda_0}$$

setzen. Ausserdem haben wir zufolge unserer Annahme die Behauptungen des Hilfssatzes 17 für die beiden K. V. $\{\beta'_\varkappa\} = \{\alpha_{\nu',\,\lambda_0}\}$ und $\{\beta'_{\varkappa+1}\} = \{\alpha_{\nu'',\,\lambda_0}\}$ als bereits bewiesen anzusehen. Mithin folgt aus der Voraussetzung (224) mit Rücksicht auf (214) und (226)

$$(227) \qquad \operatorname{sg}\left(\alpha_{\mathring{\nu},\,0}\left(v_{l'_{\mathring{\nu}}-L_t} - \frac{c_{l'_{\mathring{\nu}}-2p_t}}{q^2}\,\frac{\left[\varDelta_{\mathring{\mu}''}^{l'_{\mathring{\nu}}-2p_t}\,\varphi_t^{-1}\right]_{\mathring{\nu}}}{(l'_{\mathring{\nu}}-2p_t)!}\right)\right) = \operatorname{sg}\left[\frac{\partial^{r_{\nu',\,\lambda_0}}}{\partial\,\omega_{\lambda_0}^{r_{\nu',\,\lambda_0}}}\,\varDelta_{\lambda_0}^{n_{\nu',\,\lambda_0}}\,\varPhi_t\right]_{\nu'},$$

wobei wegen Formel (53), § 17,

$$(228) \qquad n_{\nu',\,\lambda_0} = n_{\mathring{\nu},\,\lambda_0}$$

ist.

Da nun aber nach Voraussetzung $\omega_{\lambda_0} = \alpha_{\nu',\,\lambda_0}$ und $\omega_{\lambda_0} = \alpha_{\nu'',\,\lambda_0}$ zwei unmittelbar aufeinander folgende Nullstellen ungerader Ordnung von (223) sind, und nach Formel (109), § 19, und Formel (228)

$$\operatorname{sg}\,\varPsi'_{\mathring{\nu},\,\lambda_0}(\omega_{\lambda_0}) = \operatorname{sg}\,[\varDelta_{\lambda_0}^{n',\,\lambda_0}\,\varPhi_t]_{\nu',\,\lambda_0-1}(\omega_{\lambda_0})$$

ist, so hat man

$$\operatorname{sg} \Psi'_{\mathring{\nu},\,\lambda_0}(\alpha_{\nu',\,\lambda_0} + \varepsilon) = \operatorname{sg}\left[\frac{\partial^{r_{\nu',\,\lambda_0}}}{\partial\,\omega_{\lambda_0}^{r_{\nu',\,\lambda_0}}}\,\varDelta_{\lambda_0}^{n_{\nu',\,\lambda_0}}\,\varPhi_t\right]_{\nu'}$$

$$= -\operatorname{sg} \Psi'_{\mathring{\nu},\,\lambda_0}(\alpha_{\nu'',\,\lambda_0} + \varepsilon) = -\operatorname{sg}\left[\frac{\partial^{r_{\nu'',\,\lambda_0}}}{\partial\,\omega_{\lambda_0}^{r_{\nu'',\,\lambda_0}}}\,\varDelta_{\lambda_0}^{n_{\nu'',\,\lambda_0}}\,\varPhi_t\right]_{\nu''},$$

und das ergibt in Verbindung mit Formel (227)

$$\operatorname{sg}\left(\alpha_{\mathring{\nu},\,0}\left(v_{l'_{\mathring{\nu}}-L_t} - \frac{c_{l'_{\mathring{\nu}}-2p_t}}{q^2}\,\frac{\left[\varDelta_{\mathring{\mu}''}^{l'_{\mathring{\nu}}-2p_t}\,\varphi_t^{-1}\right]_{\mathring{\nu}}}{(l'_{\mathring{\nu}} - 2\,p_t)!}\right)\right) = -\operatorname{sg}\left[\frac{\partial^{r_{\nu'',\,\lambda_0}}}{\partial\,\omega_{\lambda_0}^{r_{\nu'',\,\lambda_0}}}\,\varDelta_{\lambda_0}^{n_{\nu'',\,\lambda_0}}\,\varPhi_t\right]_{\nu''}.$$

Es ist somit für den K. V. $\{\alpha_{\nu'',\,\lambda_0}\}$ die Bedingung (214) nicht erfüllt, und daher muss $i\{\alpha_{\nu'',\,\lambda_0}\} \geqq -1$ sein. Da der K. V. $\{\alpha_{\nu'',\,\lambda_0}\} = \{\beta'_{\varkappa+1}\}$ aber nach Voraussetzung von gerader Mächtigkeit ist, ist damit sogar die Abschätzung (225) bewiesen, aus der, wie wir oben gezeigt haben, die Behauptung (222) unmittelbar folgt.

135. Es bleibt uns nur noch übrig zu beweisen, dass aus (222) die Beziehung (214) für $\lambda = \lambda_0 - 1$ folgt. Zu diesem Zwecke betrachten wir, wie in Hilfssatz 16, § 25, die Folge aller reellen Nullstellen ungerader Ordnung $\omega_{\lambda_0} = \beta'_\varkappa\ (\varkappa = 1, 2, \ldots, U)$ der Gleichung (223) und schliessen aus Hilfssatz 16, § 25, insbesondere Formel (206), dass erstens U ungerade ist, dass zweitens β'_U eine Wurzel der Gleichung (223) von der Ordnung $\geqq 3$ ist, mit einem zugehörigen Index

$$i\{\beta'_U\} = -2.$$

Sei $\vartheta = \theta_{\hat{\nu}}(\varrho)$ eine Kurve des K. V. $\{\beta'_U\}$ der Ordnung $\lambda_0 + 1$, dann ist β'_U gleich dem Koeffizienten des Gliedes mit σ^{λ_0} in der Potenzreihe $\Omega_{\hat{\nu}}(\sigma)$, und indem wir zu unserer bisherigen Bezeichnungsweise zurückkehren, setzen wir

$$\beta'_U = \alpha_{\hat{\nu},\,\lambda_0}.$$

Da nun aber nach unserer Annahme unser Hilfssatz 17 für den K. V. $\{\beta'_U\} = \{\alpha_{\hat{\nu},\,\lambda_0}\}$ als bereits bewiesen anzusehen ist, so folgt aus (214)

$$\operatorname{sg}\left(\alpha_{\mathring{\nu},\,0}\left(v_{l'_{\mathring{\nu}}-L_t} - \frac{c_{l'_{\mathring{\nu}}-2p_t}}{q^2}\,\frac{\left[\varDelta_{\mathring{\mu}''}^{l'_{\mathring{\nu}}-2p_t}\,\varphi_t^{-1}\right]_{\mathring{\nu}}}{(l'_{\mathring{\nu}} - 2\,p_t)!}\right)\right) = \operatorname{sg}\left[\frac{\partial^{r_{\hat{\nu},\,\lambda_0}}}{\partial\,\omega_{\lambda_0}^{r_{\hat{\nu},\,\lambda_0}}}\,\varDelta_{\lambda_0}^{n_{\hat{\nu},\,\lambda_0}}\,\varPhi_t\right]_{\hat{\nu}}. \tag{229}$$

Nun ist aber mit Rücksicht darauf, dass $\omega_{\lambda_0} = \alpha_{\hat{\nu},\lambda_0}$ die grösste Wurzel ungerader Ordnung der Gleichung (223) ist,

$$(230) \qquad \operatorname{sg}\left[\frac{\partial^{r_{\hat{\nu},\lambda_0}}}{\partial \omega_{\lambda_0}^{r_{\hat{\nu},\lambda_0}}} \varDelta_{\lambda_0}^{n_{\hat{\nu},\lambda_0}} \Phi_t\right]_{\hat{\nu}} = \operatorname{sg} \Psi_{\mathring{\nu},\lambda_0}(\infty).$$

Andererseits ergibt sich aus Formel (109), § 19, in Verbindung mit Formel (27), § 14,

$$(231) \qquad \operatorname{sg} \Psi_{\mathring{\nu},\lambda_0}(\infty) = \operatorname{sg} \lim_{\omega_{\lambda_0}\to\infty} \left[\varDelta_{\lambda_0}^{n_{\mathring{\nu},\lambda_0}} \Phi_t\right]_{\mathring{\nu},\lambda_0-1}(\omega_{\lambda_0})$$

$$= \operatorname{sg}\left[\frac{\partial^{r_{\mathring{\nu},\lambda_0-1}}}{\partial \omega_{\lambda_0-1}^{r_{\mathring{\nu},\lambda_0-1}}} \varDelta_{\lambda_0-1}^{n_{\mathring{\nu},\lambda_0-1}} \Phi_t\right]_{\mathring{\nu}}.$$

Mithin folgt aus (229), (230) und (231)

$$\operatorname{sg}\left(\alpha_{\mathring{\nu},0}\left(v_{l'_{\mathring{\nu}}-L_t} - \frac{c_{l'_{\mathring{\nu}}-2p_t}}{q^2}\,\frac{\left[\varDelta_{\mathring{\mu}''}^{l'_{\mathring{\nu}}-2p_t} \varphi_t^{-1}\right]_{\mathring{\nu}}}{(l'_{\mathring{\nu}}-2p_t)!}\right)\right) = \operatorname{sg}\left[\frac{\partial^{r_{\mathring{\nu},\lambda_0-1}}}{\partial \omega_{\lambda_0-1}^{r_{\mathring{\nu},\lambda_0-1}}} \varDelta_{\lambda_0-1}^{n_{\mathring{\nu},\lambda_0-1}} \Phi_t\right]_{\mathring{\nu}},$$

d. h. dass die behauptete Beziehung (214) auch für den K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\lambda_0-1}\}$ besteht. Damit ist Hilfssatz 17 vollständig bewiesen.

136. Da im Hilfssatz 17 $\mathring{\mu}'' \geqq 0$ vorausgesetzt wurde, so ist mit Rücksicht auf die Beziehung (194), § 25 der Hilfssatz 17 nur anwendbar, wenn $l'_{\mathring{\nu}} \geqq 2p_t$ ist. Wir formulieren jetzt die Abänderungen, die Hilfssatz 17 erfährt, wenn $1 \leqq l'_{\mathring{\nu}} \leqq 2p_t - 1$ ist.

Hilfssatz 18: *Es sei $l'_{\mathring{\nu}}$ die einer Kurve $\vartheta = \theta_{\mathring{\nu}}(\varrho)$ zugeordnete Zahl, und es sei* $1 \leqq l'_{\mathring{\nu}} \leqq 2p_t - 1$.

Ausserdem werde

$$i\{\alpha_{\mathring{\nu},\lambda}\} \leqq -2 \quad \text{für } 0 \leqq \lambda \leqq \mathring{\mu}$$

vorausgesetzt, unter $\mathring{\mu}$ den durch Formel (192), § 25, *definierten Index verstanden.*

Dann ist

$$i\{\alpha_{\nu,\lambda}\} \geqq -2$$

für jeden K. V. $\{\alpha_{\nu,\lambda}\}$ $(\lambda \geqq 0)$, *der im K. V.* $\{\alpha_{\mathring{\nu},0}\}$ *enthalten ist, insbesondere ist*

$$i\{\alpha_{\mathring{\nu},\lambda}\} = -2 \quad \text{für } 0 \leqq \lambda \leqq \mathring{\mu},$$

und ausserdem erfüllt jeder in $\{\alpha_{\mathring{\nu},0}\}$ *enthaltene K. V.* $\{\alpha_{\nu,\lambda}\}$ *dessen Index* $i\{\alpha_{\nu,\lambda}\} = -2$ *ist, die beiden Bedingungen*

erstens: *der K. V.* $\{\alpha_{\nu,\lambda}\}$ *ist von gerader Mächtigkeit*

zweitens: *es ist* $l'_{\mathring{\nu}} - L_t = 0$, *und ausserdem ist*

$$\text{(232)} \qquad \operatorname{sg} \alpha_{\mathring{\nu},0} v_0 = \operatorname{sg} \left[\frac{\partial^{r_{\nu,\lambda}}}{\partial \omega_\lambda^{r_{\nu,\lambda}}} \Delta_\lambda^{n_{\nu,\lambda}} \Phi_t \right]_\nu \qquad (0 \leqq \lambda \leqq \mathring{\mu}).$$

Für $\lambda = 0$ nimmt nach Formel (215) die Bedingung (232) die einfachere Form

$$\text{(233)} \qquad \operatorname{sg} v_0 = -\operatorname{sg} f_{t,0}^{(r_{\mathring{\nu},0}+1)}(\alpha_{\mathring{\nu},0})$$

an.

Wir verzichten hier auf die ausführliche Darstellung des Beweises von Hilfssatz 18, da er sich von dem oben angegebenen Beweise des Hilfssatzes 17 nur dadurch unterscheidet, dass in allen Formeln das Glied mit $\Delta_{\mathring{\mu}''}^{l'_{\mathring{\nu}}-2p_t} \varphi_t^{-1}$ wegen $l'_{\mathring{\nu}} - 2p_t < 0$ fortzulassen ist (vgl. Formel (197), § 25).

Die Behauptung $l'_{\mathring{\nu}} - L_t = 0$ folgt daraus, dass mit Rücksicht auf $l''_{\mathring{\nu}} \geqq l'_{\mathring{\nu}} + 1$ nach Formel (103), § 19, Formel (198), § 25

$$B_{\mathring{\nu},n} = v_{n-L_t} = 0 \quad \text{für } 0 \leqq n \leqq l'_{\mathring{\nu}} - 1,$$

$$B_{\mathring{\nu},l'_{\mathring{\nu}}} = v_{l'_{\mathring{\nu}}-L_t} + \frac{l_t + l'_{\mathring{\nu}}}{p_t \alpha_{\mathring{\nu},0}} \frac{\left[\Delta_{\mathring{\mu}'}^{l'_{\mathring{\nu}}} \varphi_t\right]_{\mathring{\nu}}}{l'_{\mathring{\nu}}!} = 0,$$

mithin $v_{l'_{\mathring{\nu}}-L_t} \neq 0$ ist.

§ 27. Der Index eines Kurvenverbandes der Ordnung $\geqq 1$ vom allgemeinen Typus II.

137. Es sei $\{\alpha_{\mathring{\nu},\lambda-1}\}$ $(\lambda \geqq 1)$ ein K. V. vom allgemeinen Typus II und $\{\alpha_{\mathring{\nu},\lambda}\}$ ein in $\{\alpha_{\mathring{\nu},\lambda-1}\}$ enthaltener K. V. derart, dass

$$\text{(234)} \qquad i\{\alpha_{\mathring{\nu},\lambda}\} = -2.$$

Dann ist (vgl. die Tabelle am Schluss von § 20), wenn $\vartheta = \theta_{\mathring{\nu}}(\varrho)$ eine Kurve des K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\lambda}\}$ bezeichnet,

$$l'_{\overset{\circ}{\nu}} \geqq n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda} + 1, \quad l''_{\overset{\circ}{\nu}} \geqq n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda} + \lambda + 1, \tag{235}$$

und hieraus folgt weiter mit Rücksicht auf Definition X, § 20, Formel (110), (111) und (113), § 19,

$$\begin{cases} B_{\overset{\circ}{\nu}, n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda}+\lambda} = 0, \\ \left[\tilde{B}^{n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda}+\lambda}_{n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda}+\lambda}\right]_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda-1}(\omega_\lambda) = -\Psi_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda}(\omega_\lambda), \\ B_{\nu, n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda}+\lambda} = -\Psi_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda}(\alpha_{\nu, \lambda}), \end{cases} \tag{236}$$

unter $\alpha_{\nu, \lambda}$ eine beliebige reelle Nullstelle des Polynoms $\Psi'_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda}(\omega_\lambda)$ verstanden. Ausserdem ist wegen (234) $\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda}$ selbst eine Nullstelle gerader Ordnung von $\Psi'_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda}(\omega_\lambda)$ und wegen (236) eine Nullstelle ungerader Ordnung $\geqq 3$ von $\Psi_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda}(\omega_\lambda)$.

Dies vorausgeschickt, formulieren wir den

Satz 17, Teil I: *Ist* $\{\alpha_{\nu, \lambda-1}\}$ *ein beliebiger K. V. der Ordnung* $\lambda \geqq 1$, *so ist*

$$i\{\alpha_{\nu, \lambda-1}\} \geqq -2. \tag{237}$$

Zusammen mit dieser Behauptung beweisen wir

Satz 17, Teil II: *Es sei* $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda-1}\}$ $(\lambda \geqq 1)$ *ein K. V. vom allgemeinen Typus II,* $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda}\}$ *ein in* $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda-1}\}$ *enthaltener K. V. mit dem Index*

$$i\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda}\} = -2.$$

Ferner sei $\alpha_{\nu', \lambda} > \alpha_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda}$ *eine Wurzel ungerader Ordnung der Gleichung*

$$\Psi_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda}(\omega_\lambda) = 0 \tag{238}$$

derart, dass im Intervall

$$\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda} < \omega < \alpha_{\nu', \lambda} \tag{239}$$

keine weitere Wurzel ungerader Ordnung der Gleichung (238) *gelegen ist.*

Dann ist entweder $\alpha_{\nu', \lambda}$ *eine Wurzel erster Ordnung von* (238), *oder aber man hat, wenn die Wurzel* $\alpha_{\nu', \lambda}$ *von der Ordnung* $\geqq 3$ *ist,*

$$i\{\alpha_{\nu', \lambda}\} \geqq 0.$$

138. **Vorbemerkungen zum Beweise:** Für K. V. vom Typus I, III, IV und vom Normaltypus II und für solche K. V., welche in derartigen K. V. enthalten sind, ist die Behauptung von Satz 17, Teil I, bereits in Kapitel IV bewiesen worden. Es genügt somit, wenn wir uns bei den folgenden Untersuchungen auf K. V. der Ordnung $\geqq 1$ vom allgemeinen Typus II beschränken.

Wie beim Beweise des Hilfssatzes 17 (vgl. Abschnitt 134, § 26) stützen wir uns auch hier auf das Verfahren der vollständigen Induktion, d. h. wir gehen von der Annahme aus, dass, unter λ_0 eine feste Zahl $\geqq 1$ verstanden, die Behauptung (237) von Satz 17, Teil I, für alle K. V. $\{\alpha_{\nu,\lambda}\}$ $(\lambda \geqq \lambda_0)$ bereits als richtig erkannt ist. Diese Annahme wird dadurch ermöglicht, dass sich nach Hilfssatz 17, Formel (213), § 26, zu jeder festen Kurve $\vartheta = \theta_\nu(\varrho)$ eine hinreichend grosse Zahl μ_ν'' bestimmen lässt derart, dass

$$i\{\alpha_{\nu,\lambda}\} \geqq -2 \qquad (\lambda \geqq \mu_\nu'').$$

Genügt nun der Index aller in einem K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\lambda_0-1}\}$ vom allgemeinen Typus II enthaltenen K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\lambda_0}\}$ der schärferen Beziehung

$$i\{\alpha_{\nu,\lambda_0}\} \geqq -1,$$

so folgt die Behauptung (237) von Satz 17, Teil I, für $\lambda = \lambda_0$, $\nu = \mathring{\nu}$

$$i\{\alpha_{\mathring{\nu},\lambda_0-1}\} \geqq -2 \tag{240}$$

unmittelbar aus Hilfssatz 15, § 25.

Wir können uns daher hier auf die Betrachtung des Falls beschränken, dass $\{\alpha_{\mathring{\nu},\lambda_0-1}\}$ einen K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\lambda}\}$ mit dem Index

$$i\{\alpha_{\mathring{\nu},\lambda_0}\} = -2 \tag{241}$$

enthält.

Unter der Voraussetzung (241) und der oben auseinandergesetzten Annahme

$$i\{\alpha_{\nu,\lambda}\} \geqq -2 \text{ für alle } \lambda \geqq \lambda_0 \tag{242}$$

suchen wir nunmehr für den K. V. $\{\alpha_{\mathring{\nu},\lambda_0-1}\}$ zunächst Satz 17. Teil II, d. h.

$$i\{\alpha_{\nu',\lambda_0}\} \geqq 0 \tag{243}$$

zu beweisen. Hieraus folgt dann die Behauptung (240) unmittelbar aus Hilfssatz 16, § 25, da die Voraussetzungen dieses Hilfssatzes mit Rücksicht auf die

Annahme (242) erfüllt sind. Mit dem Beweis der beiden Beziehungen (240) und (243) ist dann aber der Induktionsschluss durchgeführt und beide Teile des Satzes 17 vollständig bewiesen.

139. Beweis der Behauptung (243): Unter der Voraussetzung (241) sei $\vartheta = \theta_{\overset{\circ}{\nu}}(\varrho)$ eine Kurve des K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}\}$, die nach den Vorschriften des Abschnitts 131, § 26, konstruiert sei; $l'_{\overset{\circ}{\nu}}$ und $l''_{\overset{\circ}{\nu}}$ seien die dieser Kurve zugeordneten beiden Zahlen, sie genügen den Abschätzungen (235). Ausserdem setze man zur Abkürzung

$$N_{\lambda_0} = n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0} + 2\lambda_0 + 2p_t. \tag{244}$$

Nunmehr hat man drei Fälle zu unterscheiden:

$$\text{1. } \textit{Fall } l'_{\overset{\circ}{\nu}} < N_{\lambda_0}, \quad \text{2. } \textit{Fall } l'_{\overset{\circ}{\nu}} > N_{\lambda_0}, \quad \text{3. } \textit{Fall } l'_{\overset{\circ}{\nu}} = N_{\lambda_0}. \tag{245}$$

Im 1. Fall ist der in Hilfssatz 17, § 26, eingeführte Index $\overset{\circ}{\mu}{}'' \leqq \lambda_0 - 1$ (vergl. auch Formel (194), § 25). Mithin ist dieser Fall bereits im Hilfssatz 17 behandelt worden, und die Behauptung (243) stimmt, da (241) und die Gleichung (224), § 26, wegen (226), § 26, miteinander identisch sind, mit den in Abschnitt 134, § 26, bewiesenen Behauptungen überein.

140. Bevor wir in unserem Gedankengang fortfahren und die Fälle 2 und 3 angreifen, suchen wir einen Ausdruck zu bestimmen, der die beiden Grössen

$$\left[\varDelta_{\lambda_0}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0} \varphi_t^{-1}\right]_{\overset{\circ}{\nu}} \text{ und } \left[\varDelta_{\lambda_0}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0} \varphi_t^{-1}\right]_{\nu'}$$

miteinander verknüpft. Zu diesem Zwecke gehen wir von der Integralformel

$$\frac{\left[\varDelta_{\lambda_0}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0} \varphi_t^{-1}\right]_{\nu'}}{(n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0)!} = \frac{\left[\varDelta_{\lambda_0}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0} \varphi_t^{-1}\right]_{\nu_0}}{(n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0)!} + \\ + \int\limits_{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}}^{\alpha_{\nu',\lambda_0}} \frac{\left[\dfrac{\partial}{\partial\omega_{\lambda_0}} \varDelta_{\lambda_0}^{n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0} \varphi_t^{-1}\right]_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0-1}(\omega_{\lambda_0})}{(n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0)!}\, d\omega_{\lambda_0} \tag{246}$$

aus. Nun ist aber nach Formel (7), § 13, einerseits

$$(247)\qquad \frac{\partial}{\partial\omega_{\lambda_0}}\frac{\varDelta_{\lambda_0}^{n_{\nu,\lambda_0}^\circ+2\lambda_0}\varphi_t^{-1}}{(n_{\nu,\lambda_0}^\circ+2\lambda_0)!}=\frac{\varDelta_{\lambda_0}^{n_{\nu,\lambda_0}^\circ+\lambda_0}\dfrac{\partial\varphi_t^{-1}}{\partial\omega_0}}{(n_{\nu,\lambda_0}^\circ+\lambda_0)!}=\frac{\varDelta_{\lambda_0}^{n_{\nu,\lambda_0}^\circ+\lambda_0}\varphi_t}{(n_{\nu,\lambda_0}^\circ+\lambda_0)!}.$$

Andererseits folgt, da im 2. und 3. Fall nach Formel (244) und (245) $l'_{\overset{\circ}{\nu}}\geqq$ $\geqq N_{\lambda_0}>n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}+\lambda_0$ und somit

$$[\varDelta_{\lambda_0}^n\varphi_t]_{\overset{\circ}{\nu}}=0 \text{ für } 0\leqq n\leqq n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}+\lambda_0$$

ist, aus Hilfssatz 10 Formel (90), § 18, in Verbindung mit Formel (109), § 19,

$$(248)\qquad \frac{\left[\varDelta_{\lambda_0}^{n_{\nu,\lambda_0}^\circ+\lambda_0}\varphi_t\right]_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0-1}(\omega_{\lambda_0})}{(n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}+\lambda_0)!}=-\frac{q}{p_t\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}}\int\limits_{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}}^{\omega_{\lambda_0}}\frac{\left[\varDelta_{\lambda_0}^{n_{\nu,\lambda_0}^\circ}\Phi_t\right]_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0-1}(\omega_{\lambda_0})}{n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}!}\,d\,\omega_{\lambda_0}$$

$$=-\frac{p_t\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}}{l_t+n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}+\lambda_0}\Psi_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}(\omega_{\lambda_0}).$$

Mithin ergibt sich aus (246), (247) und (248)

$$(249)\qquad \frac{\left[\varDelta_{\lambda_0}^{n_{\nu,\lambda_0}^\circ+2\lambda_0}\varphi_t^{-1}\right]_{\nu'}}{(n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0)!}=\frac{\left[\varDelta_{\lambda_0}^{n_{\nu,\lambda_0}^\circ+2\lambda_0}\varphi_t^{-1}\right]_{\overset{\circ}{\nu}}}{(n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0)!}-\frac{p_t\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}}{l_t+n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}+\lambda_0}\int\limits_{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}}^{\alpha_{\nu',\lambda_0}}\Psi_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}(\omega_{\lambda_0})\,d\,\omega_{\lambda_0}.$$

141. Es sei jetzt zweitens $N_{\lambda_0}<l'_{\overset{\circ}{\nu}}$, dann ist mit Rücksicht auf Formel (218), § 26, und Formel (244)

$$(250)\qquad \lambda_0\leqq\overset{\circ}{\mu}{}'\leqq\overset{\circ}{\mu},\quad l''_{\overset{\circ}{\nu}}\geqq l'_{\overset{\circ}{\nu}}+\lambda_0+1>N_{\lambda_0}+1.$$

Somit ist in Verbindung mit Formel (103), § 19, und Hilfssatz 9, § 18,

$$(251)\qquad B_{\overset{\circ}{\nu},N_{\lambda_0}}=v_{N_{\lambda_0}-L_t}-\frac{c_{n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}+2\lambda}}{q^2}\frac{\left[\varDelta_{\lambda_0}^{n_{\nu,\lambda_0}^\circ+2\lambda_0}\varphi_t^{-1}\right]_{\overset{\circ}{\nu}}}{(n_{\overset{\circ}{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0)!}=0.$$

Wir suchen jetzt den Beweis der Behauptung (243) indirekt zu führen, d. h. wir gehen von der Annahme aus, es sei

$$(252)\qquad i\{\alpha_{\nu',\lambda_0}\}=-2.$$

Dann führen die Vorschriften des Abschnitts 131, § 26, zur Konstruktion einer Kurve $\vartheta = \theta_{\nu'}(\varrho)$ des K. V. $\{\alpha_{\nu',\lambda_0}\}$ derart, dass die beiden dieser Kurve zugeordneten Zahlen $l'_{\nu'}$ und $l''_{\nu'}$ den Beziehungen

$$l'_{\nu'} \geqq n_{\mathring{\nu},\lambda_0} + 1, \quad l''_{\nu'} \geqq l'_{\nu'} + \lambda_0 + 1 \tag{253}$$

genügen.

Nunmehr behaupten wir, es ist

$$l'_{\nu'} = N_{\lambda_0}. \tag{254}$$

Und in der Tat: angenommen es wäre $l'_{\nu'} < N_{\lambda_0}$, d. h. wegen (244) $l'_{\nu'} - 2p_t \leqq \leqq n_{\mathring{\nu},\lambda_0} + 2\lambda_0 - 1$, so würde aus Formel (198), § 25, in Verbindung mit Hilfssatz 9, § 18,

$$\begin{aligned} B_{\nu',l'_{\nu'}} &= v_{l'_{\nu'}-L_t} - \frac{c_{l'_{\nu'}-2p_t}}{q^2}\frac{\left[\Delta_{\lambda_0-1}^{l'_{\nu'}-2p_t}\varphi_t^{-1}\right]_{\mathring{\nu}}}{(l'_{\nu'}-2p_t)!} + \frac{l_t+l'_{\nu'}}{p_t\alpha_{\mathring{\nu},0}}\frac{\left[\Delta_{\mu'_{\nu'}}^{l'_{\nu'}}\varphi_t\right]_{\nu'}}{l'_{\nu'}!} \\ &= \frac{l_t+l'_{\nu'}}{p_t\alpha_{\mathring{\nu},0}}\frac{\left[\Delta_{\mu'_{\nu'}}^{l'_{\nu'}}\varphi_t\right]_{\nu'}}{l'_{\nu'}!} \neq 0 \end{aligned} \tag{255}$$

folgen, da wegen $l'_{\nu'} < N_{\lambda_0} < l'_{\mathring{\nu}} < l''_{\mathring{\nu}}$ (vergl. Formel (250))

$$B_{\mathring{\nu},l'_{\nu'}} = v_{l'_{\nu'}-L_t} - \frac{c_{l'_{\nu'}-2p_t}}{q^2}\frac{\left[\Delta_{\lambda_0-1}^{l'_{\nu'}-2p_t}\varphi_t^{-1}\right]_{\mathring{\nu}}}{(l'_{\nu'}-2p_t)!} = 0.$$

$B_{\nu',l_{\nu'}} \neq 0$ würde aber $l''_{\nu'} \leqq l'_{\nu'}$ bedeuten im Widerspruch zur Beziehung (253).

Andererseits würde sich aus $l'_{\nu'} > N_{\lambda_0}$ in Verbindung mit den Formeln (103), § 19, (249) und (251)

$$\begin{aligned} B_{\nu',N_{\lambda_0}} &= v_{N_{\lambda_0}-L_t} - \frac{c_{n_{\mathring{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0}}{q^2}\frac{\left[\Delta_{\lambda_0}^{n_{\mathring{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0}\varphi_t^{-1}\right]_{\nu'}}{(n_{\mathring{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0)!} \\ &= -\frac{c_{n_{\mathring{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0}}{q^2}\frac{p_t\alpha_{\mathring{\nu},0}}{l_t+n_{\mathring{\nu},\lambda_0}+\lambda_0}\int\limits_{\alpha_{\mathring{\nu},\lambda_0}}^{\alpha_{\nu',\lambda_0}}\Psi_{\mathring{\nu},\lambda_0}(\omega_{\lambda_0})\,d\,\omega_{\lambda_0} \end{aligned} \tag{256}$$

ergeben. Da aber nach den Voraussetzungen über die beiden Wurzeln $\alpha_{\mathring{\nu},\lambda_0}$ und α_{ν',λ_0} der Gleichung (238) die Funktion $\Psi_{\mathring{\nu},\lambda_0}(\omega_{\lambda_0})$ im Intervall (239) das Vorzeichen nicht wechseln kann, so würde aus (256) $B_{\nu',N_{\lambda_0}} \neq 0$, d. h. $l''_{\nu'} \leqq N_{\lambda_0} < l''_{\nu'}$

folgen, im Widerspruch mit der Beziehung (253). Damit ist die Behauptung (254) bewiesen.

Wegen (244) und (254) wird aber für den K. V. $\{\alpha_{\nu', \lambda_0}\}$ der zu $l'_{\nu'}$ gehörige und in Formel (194), § 25, definierte Index $\mu''_{\nu'} = \lambda_0$, und es lässt sich daher auf $\{\alpha_{\nu', \lambda_0}\}$ mit Rücksicht auf die Annahme (252) der Hilfssatz 17, § 26, anwenden, aus dem (vgl. Formel (214))

$$(257)\quad \mathrm{sg}\left(\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, 0}\left(v_{N_{\lambda_0}-L_t} - \frac{c_{n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0}+2\lambda_0}}{q^2}\frac{\left[\Delta_{\lambda_0}^{n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0}+2\lambda_0}\varphi_t^{-1}\right]_{\nu'}}{(n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0}+2\lambda_0)!}\right)\right) = \mathrm{sg}\left[\frac{\partial^{r_{\nu', \lambda_0}}}{\partial\,\omega_{\lambda_0}^{r_{\nu', \lambda_0}}}\Delta_{\lambda_0}^{n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0}}\Phi_t\right]_{\nu'}$$

folgt.

Andererseits ergibt sich aber aus (249) und (251)

$$v_{N_{\lambda_0}-L_t} - \frac{c_{n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0}+2\lambda_0}}{q^2}\frac{\left[\Delta_{\lambda_0}^{n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0}+2\lambda_0}\varphi_t^{-1}\right]_{\nu'}}{(n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0}+2\lambda_0)!} = \frac{c_{n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0}+2\lambda_0}}{q^2}\frac{p_t\,\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, 0}}{l_t + n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0} + \lambda_0}\int_{\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0}}^{\alpha_{\nu', \lambda_0}}\Psi_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0}(\omega_{\lambda_0})\,d\,\omega_{\lambda_0},$$

mithin

$$(258)\quad \mathrm{sg}\left(\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0}\left(v_{N_{\lambda_0}-L_t} - \frac{c_{n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0}+2\lambda_0}}{q^2}\frac{\left[\Delta_{\lambda_0}^{n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0}+2\lambda_0}\varphi_t^{-1}\right]_{\nu'}}{(n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0}+2\lambda_0)!}\right)\right) = \mathrm{sg}\,\Psi_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0}(\omega_{\lambda_0}),$$

wobei ω_{λ_0} eine beliebige Stelle des Intervalls (239) ist, an der das Polynom $\Psi_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0}(\omega_{\lambda_0})$ nicht verschwindet.

Nun ist aber offenbar nach Formel (109), § 19, für jedes solches ω_{λ_0}

$$(259)\quad \mathrm{sg}\left[\frac{\partial^{r_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0}}}{\partial\,\omega_{\lambda_0}^{r_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0}}}\Delta_{\lambda_0}^{n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0}}\Phi_t\right]_{\overset{\circ}{\nu}} = \mathrm{sg}\,\Psi_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0}(\omega_{\lambda_0}) = -\,\mathrm{sg}\left[\frac{\partial^{r_{\nu', \lambda_0}}}{\partial\,\omega_{\lambda_0}^{r_{\nu', \lambda_0}}}\Delta_{\lambda_0}^{n_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0}}\Phi_t\right]_{\nu'},$$

und somit zeigt diese Beziehung, dass die beiden Relationen (257) und (258) miteinander in Wiederspruch stehen. Damit ist die Annahme (252) widerlegt, und die Behauptung (243) für den 2. Fall $l'_{\overset{\circ}{\nu}} > N_{\lambda_0}$ bewiesen.

142. Im 3. Fall $l'_{\overset{\circ}{\nu}} = N_{\lambda_0}$ wird wegen (244) der in Formel (194), § 25, definierte Index $\overset{\circ}{\mu}'' = \lambda_0$. Daher lässt sich mit Rücksicht auf die Voraussetzung (241) der Hilfssatz 17, § 26, auf den K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, \lambda_0}\}$ anwenden und es ergibt sich in Verbindung mit Formel (259)

$$\operatorname{sg}\left(\alpha_{\mathring{\nu},0}\left(v_{N_{\lambda_0}-L_t}-\frac{c_{n_{\mathring{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0}}{q^2}\frac{\left[\varDelta_{\lambda_0}^{n_{\mathring{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0}\varphi_t^{-1}\right]_{\mathring{\nu}}}{(n_{\mathring{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0)!}\right)\right)=\operatorname{sg}\left[\frac{\partial^{r_{\mathring{\nu},\lambda_0}}}{\partial\,\omega_{\lambda_0}^{r_{\mathring{\nu},\lambda_0}}}\varDelta_{\lambda}^{n_{\mathring{\nu},\lambda_0}}\varPhi_t\right]_{\mathring{\nu}} \tag{260}$$

$$=\operatorname{sg}\,\varPsi_{\mathring{\nu},\lambda_0}(\omega_{\lambda_0}),$$

unter ω_{λ_0} eine beliebige Stelle des Intervalls (239) verstanden, für die $\varPsi_{\mathring{\nu},\lambda_0}(\omega_{\lambda_0})\neq 0$ ist.

Ferner ergibt sich aus Formel (249)

$$v_{N_{\lambda_0}-L_t}-\frac{c_{n_{\mathring{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0}}{q^2}\frac{\left[\varDelta_{\lambda_0}^{n_{\mathring{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0}\varphi_t^{-1}\right]_{\nu'}}{(n_{\mathring{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0)!}=v_{N_{\lambda_0}-L_t}-\frac{c_{n_{\mathring{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0}}{q^2}\frac{\left[\varDelta_{\lambda_0}^{n_{\mathring{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0}\varphi_t^{-1}\right]_{\mathring{\nu}}}{(n_{\mathring{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0)!} \tag{261}$$

$$+\frac{c_{n_{\mathring{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0}}{q^2}\frac{p_t\,\alpha_{\mathring{\nu},0}}{l_t+n_{\mathring{\nu},\lambda_0}+\lambda_0}\int\limits_{\alpha_{\mathring{\nu},\lambda_0}}^{\alpha_{\nu',\lambda_0}}\varPsi_{\mathring{\nu},\lambda_0}(\omega_{\lambda_0})\,d\,\omega_{\lambda_0}.$$

Zieht man jetzt Formel (260) heran, so bemerkt man, dass der Ausdruck (261) gewiss von Null verschieden ist, ja, dass sogar genauer

$$\operatorname{sg}\left(\alpha_{\mathring{\nu},0}\left(v_{N_{\lambda_0}-L_t}-\frac{c_{n_{\mathring{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0}}{q^2}\frac{\left[\varDelta_{\lambda_0}^{n_{\mathring{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0}\varphi_t^{-1}\right]_{\nu'}}{(n_{\mathring{\nu},\lambda_0}+2\lambda_0)!}\right)\right)=\operatorname{sg}\,\varPsi_{\mathring{\nu},\lambda_0}(\omega_{\lambda_0}) \tag{262}$$

ist, unter ω_{λ_0} eine beliebige Stelle des Intervalls (239) verstanden, für die $\varPsi_{\mathring{\nu},\lambda_0}(\omega_{\lambda_0})\neq 0$ ist.

Nunmehr führen wir den Beweis der Behauptung (243) wie im Abschnitt **141** indirekt und gehen wieder von der Annahme aus, es sei

$$i\,\{\alpha_{\nu',\lambda_0}\}=-2. \tag{263}$$

Unter dieser Annahme führen die Vorschriften des Abschnitts **131**, § 26, zur Konstruktion einer Kurve $\vartheta=\theta_{\nu'}(\varrho)$ des K. V. $\{\alpha_{\nu',\lambda_0}\}$ derart, dass die beiden dieser Kurve zugeordneten Zahlen $l'_{\nu'}$ und $l''_{\nu'}$ den Beziehungen

$$l'_{\nu'}\geqq n_{\mathring{\nu},\lambda_0}+1,\qquad l''_{\nu'}\geqq l'_{\nu'}+\lambda_0+1 \tag{264}$$

genügen.

Ausserdem behaupten wir genauer, es ist wieder

$$l'_{\nu'}=N_{\lambda_0}=l'_{\mathring{\nu}}. \tag{265}$$

Zunächst widerlegt man die Annahme $l'_{\nu'} < N_{\lambda_0}$ ebenso wie in Abschnitt **141** für den Fall $l'^{\circ}_{\nu} < N_{\lambda_0}$, (vgl. Formel (255)).

Andererseits würde aus der Annahme $l'_{\nu'} > N_{\lambda_0}$ in Verbindung mit Formel (103), § 19, Formel (261) und (262)

$$B_{\nu', N_{\lambda_0}} = v_{N_{\lambda_0} - L_t} - \frac{c_{n^{\circ}_{\nu, \lambda_0} + 2\lambda_0}}{q^2} \frac{\left[\Delta_{\lambda_0}^{n^{\circ}_{\nu, \lambda_0} + 2\lambda_0} \varphi_t^{-1}\right]_{\nu'}}{(n^{\circ}_{\nu, \lambda_0} + 2\lambda_0)!} \neq 0$$

folgen, das besagt aber $l''_{\nu'} \leqq N_{\lambda_0} < l'_{\nu'}$ im Widerspruch zu Beziehung (264). Damit ist die Behauptung (265) bewiesen.

Aus (265) folgt nun aber ebenso wie in Abschnitt **141**, dass sich auf den K. V. $\{\alpha_{\nu', \lambda_0}\}$ der Hilfssatz 17, § 26, anwenden lässt, es ergibt sich somit auf Grund der Annahme (263) aus Formel (214), § 26,

$$\operatorname{sg}\left(\alpha^{\circ}_{\nu, 0}\left(v_{N_{\lambda_0} - L_t} - \frac{c_{n^{\circ}_{\nu, \lambda_0} + 2\lambda_0}}{q^2} \frac{\left[\Delta_{\lambda_0}^{n^{\circ}_{\nu, \lambda_0} + 2\lambda_0} \varphi_t^{-1}\right]_{\nu'}}{(n^{\circ}_{\nu, \lambda_0} + 2\lambda_0)!}\right)\right) = \operatorname{sg}\left[\frac{\partial^{r^{\circ}_{\nu, \lambda_0}}}{\partial\, \omega_{\lambda_0}^{r_{\nu_0, \lambda_0}}} \Delta_{\lambda_0}^{n^{\circ}_{\nu, \lambda_0}} \Phi_t\right]_{\nu'}.$$

Diese Beziehung steht aber mit Rücksicht auf (259) im Widerspruch zu der Beziehung (262). Mithin ist die Annahme (263) widerlegt und die Behauptung (243) bewiesen. Nach den in Abschnitt **138** auseinandergesetzten Vorbemerkungen ist damit aber der vollständige Beweis beider Teile des Satzes 17 erbracht.

143. Für die Entwicklungen im folgenden Paragraphen ist von entscheidender Bedeutung, dass sich die Behauptungen des Teils 2 von Satz 17 auch auf K. V. der Ordnung Null vom allgemeinen Typus II übertragen lassen. So werden wir geführt zu

Satz 18: *Es sei* $\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\}$ *ein K. V. der Ordnung Null vom allgemeinen Typus II,* $\{\alpha^{\circ}_{\nu, 0}\}$ *ein in* $\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\}$ *enthaltener K. V. mit dem Index*

(266) $$i\{\alpha^{\circ}_{\nu, 0}\} = -2.$$

Dann ist (vgl. Abschnitt **46**, § 9) $\alpha^{\circ}_{\nu, 0}$ *eine Wurzel ungerader Ordnung* $\geqq 3$ *der Gleichung*

(267) $$f_{t, 0}(\omega) = 0.$$

Es sei ferner $\alpha_{\nu',0} > \alpha_{\nu,0}^{\circ}$ *eine zweite positive Wurzel ungerader Ordnung der Gleichung* (267) *derart, dass im Intervall*

$$\alpha_{\nu,0}^{\circ} < \omega < \alpha_{\nu',0} \tag{268}$$

keine weitere Wurzel ungerader Ordnung von (267) *mehr gelegen ist.*

Dann ist entweder $\alpha_{\nu',0}$ *eine Wurzel erster Ordnung von* (267) *oder aber, man hat, wenn die Wurzel* $\alpha_{\nu',0}$ *von der Ordnung* $\geqq 3$ *ist,*

$$i\{\alpha_{\nu',0}\} \geqq 0. \tag{269}$$

Eine entsprechende Behauptung gilt für einen K. V. $\left\{\frac{-}{p_t}\right\}$ *vom allgemeinen Typus II, wenn* $\alpha_{\nu,0}^{\circ}$ *und* $\alpha_{\nu',0}$ *zwei negative successive Wurzeln ungerader Ordnung von* (267) *sind.*

144. **Beweis:** Es sei $\vartheta = \theta_{\nu}^{\circ}(\varrho)$ die nach den Vorschriften des Abschnitts 131, § 26, konstruierte Kurve des K. V. $\{\alpha_{\nu,0}^{\circ}\}$ und $l_{\nu}'^{\circ}$ und $l_{\nu}''^{\circ}$ die dieser Kurve zugeordneten beiden Zahlen; dann ist offenbar wegen der Voraussetzung (266)

$$l_{\nu}'^{\circ} \geqq 1, \quad l_{\nu}''^{\circ} \geqq l_{\nu}'^{\circ} + 1. \tag{270}$$

Wie beim Beweise von Satz 17 gehen wir von der Annahme aus, es sei im Widerspruch zur Behauptung (269)

$$i\{\alpha_{\nu',0}\} = -2 \tag{271}$$

dann lässt sich eine Kurve $\vartheta = \theta_{\nu'}(\varrho)$ des K. V. $\{\alpha_{\nu',0}\}$ konstruieren derart, dass die ihr zugeordneten Zahlen $l_{\nu'}'$ und $l_{\nu'}''$ gleichfalls den Bedingungen (270) genügen.

145. Nunmehr haben wir, wie in Abschnitt 139 drei Fälle zu unterscheiden:

$$\text{1. Fall } l_{\nu}'^{\circ} < 2p_t \qquad \text{2. Fall } l_{\nu}'^{\circ} > 2p_t \qquad \text{3. Fall } l_{\nu}'^{\circ} = 2p_t. \tag{272}$$

Im ersten Fall sind für den K. V. $\{\alpha_{\nu,0}^{\circ}\}$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 18, § 26, erfüllt, und man hat nach Formel (233), § 26,

$$\operatorname{sg} v_0 = -\operatorname{sg} f_{t,0}^{(r_{\nu,0}^{\circ}+1)}(\alpha_{\nu,0}^{\circ}). \tag{273}$$

Man zeige zunächst, dass

$$l_{\nu'}' = l_{\nu}'^{\circ}$$

ist, denn aus $l_{\nu'}' < l_{\nu}'^{\circ}$ würde $l_{\nu'}'' = l_{\nu'}'$, aus $l_{\nu'}' > l_{\nu}'^{\circ}$ würde $l_{\nu'}'' = l_{\nu}'^{\circ} < l_{\nu'}'$ folgen, im Widerspruch zu den Bedingungen (270).

Mit Rücksicht auf die Annahme (271) lässt sich aber auch auf den K. V. $\{\alpha_{\nu',0}\}$ der Hilfssatz 18 anwenden, und man erhält

$$\text{sg}\, v_0 = - \,\text{sg} f_{t,0}^{(r_{\nu',0}+1)}(\alpha_{\nu',0}). \tag{274}$$

Da aber nach Voraussetzung $\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}$ und $\alpha_{\nu',0}$ zwei unmittelbar aufeinander folgende Wurzeln ungerader Ordnung (der Ordnung $r_{\overset{\circ}{\nu},0}+1$, bezw. der Ordnung $r_{\nu',0}+1$) der Gleichung (267) sind, so ist

$$\text{sg}\, f_{t,0}^{(r_{\overset{\circ}{\nu},0}+1)}(\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}) = \text{sg}\, f_{t,0}(\omega) = - \,\text{sg}\, f_{t,0}^{(r_{\nu',0}+1)}(\alpha_{\nu',0}), \tag{275}$$

unter ω eine Stelle des Intervalls (268) verstanden, für die $f_{t,0}(\omega) \neq 0$ ist. Mithin stehen die beiden Beziehungen (273) und (274) zueinander im Widerspruch, und die Annahme ist widerlegt.

146. Im 2. Falle $l'_{\overset{\circ}{\nu}} > 2p_t$ hat man wegen (103), § 19, (vgl. Formel (28), § 15)

$$B_{\overset{\circ}{\nu},2p_t} = v_{2p_t - L_t} - \frac{c_0}{q^2} f_{t,0}^{-1}(\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}) = 0. \tag{276}$$

Nunmehr ergibt sich aus der Annahme (271) (vgl. die entsprechenden Überlegungen in Abschnitt **141** zum Beweise von Formel (254))

$$l'_{\nu'} = 2p_t. \tag{277}$$

Denn aus $l'_{\nu'} < 2p_t$ würde $l''_{\nu'} = l'_{\nu'}$, aus $l'_{\nu'} > 2p_t$ würde $l''_{\nu'} = 2p_t < l'_{\nu'}$ folgen, wenn man noch berücksichtigt, dass

$$f_{t,0}^{-1}(\alpha_{\nu',0}) - f_{t,0}^{-1}(\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}) = \int_{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}}^{\alpha_{\nu',0}} f_{t,0}(\omega)\, d\omega \neq 0 \tag{278}$$

ist, da nach Voraussetzung $f_{t,0}(\omega)$ im Intervall (268) sein Vorzeichen nicht wechselt. Die Folgerung $l''_{\nu'} \leqq l'_{\nu'}$ steht aber im Widerspruch zu den Bedingungen (270).

Aus (277) folgt aber, dass der zu $l'_{\nu'}$ gehörige, in Formel (194), § 25, definierte Index $\mu''_{\nu'} = 0$ ist und dass sich daher auf $\{\alpha_{\nu',0}\}$ mit Rücksicht auf die Annahme (271) der Hilfssatz 17, § 26, anwenden lässt. Folglich erhält man in Verbindung mit Formel (217), § 26,

$$\text{sg}\left(v_{2p_t - L_t} - \frac{c_0}{q^2} f_{t,0}^{-1}(\alpha_{\nu',0})\right) = - \,\text{sg}\, f_{t,0}^{(r_{\nu',0}+1)}(\alpha_{\nu',0}). \tag{279}$$

Andererseits ergibt sich aber aus (276) und (278)

$$v_{2p_t-L_t}-\frac{c_0}{q^2}f_{t,0}^{-1}(\alpha_{\nu',0}) = -\frac{c_0}{q^2}\int\limits_{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}}^{\alpha_{\nu',0}} f_{t,0}(\omega)\,d\omega$$

und somit wegen (275)

$$\operatorname{sg}\left(v_{2p_t-L_t}-\frac{c_0}{q^2}f_{t,0}^{-1}(\alpha_{\nu',0})\right) = -\operatorname{sg} f_{t,0}(\omega) = \operatorname{sg} f_{t,0}^{(r_{\nu',0}+1)}(\alpha_{\nu',0}),$$

im Widerspruch zu (279). Damit ist die Annahme (271) auch für den 2. Fall $l'_{\overset{\circ}{\nu}} > 2p_t$ widerlegt.

147. Im 3. Fall $l'_{\overset{\circ}{\nu}} = 2p_t$ lässt sich wegen $\overset{\circ}{\mu}''=0$ der Hilfssatz 17, § 26, auf den K. V. $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}\}$ anwenden, und man erhält nach Formel (217), § 26,

$$(280)\qquad \operatorname{sg}\left(v_{2p_t-L_t}-\frac{c_0}{q^2}f_{t,0}^{-1}(\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0})\right) = -\operatorname{sg} f_{t,0}^{(r_{\overset{\circ}{\nu},0}+1)}(\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}) = -\operatorname{sg} f_{t,0}(\omega),$$

unter ω eine beliebige Stelle des Intervalls (268) verstanden, für die $f_{t,0}(\omega) \neq 0$ ist.

Andererseits folgt aus (278)

$$(281)\qquad v_{2p_t-L_t}-\frac{c_0}{q^2}f_{t,0}^{-1}(\alpha_{\nu',0}) = v_{2p_t-L_t}-\frac{c_0}{q^2}f_{t,0}^{-1}(\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}) - \frac{c_0}{q^2}\int\limits_{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}}^{\alpha_{\nu',0}} f_{t,0}(\omega)\,d\omega \neq 0,$$

wie man mit Rücksicht auf die Beziehung (280) unmittelbar einsieht, aus der sich dann weiter

$$(282)\qquad \operatorname{sg}\left(v_{2p_t-L_t}-\frac{c_0}{q^2}f_{t,0}^{-1}(\alpha_{\nu',0})\right) = -\operatorname{sg} f_{t,0}(\omega)$$

ergibt, wobei ω die gleiche Bedeutung wie in Formel (280) hat.

Nunmehr folgert man aus der Annahme (271) (vgl. die entsprechende Schlussweise zum Beweis von Formel (265) in Abschnitt 142)

$$(283)\qquad l'_{\nu'} = 2p_t = l'_{\overset{\circ}{\nu}};$$

denn aus $l'_{\nu'} < 2p_t$ würde $l''_{\nu'} = l'_{\nu'}$, aus $l'_{\nu'} > 2p_t$ wegen (281) würde $l''_{\nu'} = 2p_t < l'_{\nu'}$ folgen im Widerspruch zu (270).

Endlich schliesst man aus (271) und (283), dass sich auf den K. V. $\{\alpha_{\nu',0}\}$ der Hilfssatz 17, § 26, anwenden lässt, und man erhält aus Formel (217), § 26

$$\operatorname{sg}\left(v_{2p_t - L_t} - \frac{c_0}{q^2} f_{t,0}^{-1}(\alpha_{\nu',0})\right) = -\operatorname{sg} f_{t,0}^{(r_{\nu',0}+1)}(\alpha_{\nu',0}).$$

Diese Beziehung steht aber wegen (275) im Widerspruch zu (282). Damit ist die Annahme (271) in allen drei Fällen (272) widerlegt und der Satz 18 vollständig bewiesen.

§ 28. Die Kurvenverbände der Ordnung Null vom allgemeinen Typus II und ihre Indices.

148. Die Abschätzung der Indices von K. V. der Ordnung Null vom allgemeinen Typus II, die wir in diesem Paragraphen vornehmen wollen und die uns dann unmittelbar zum Beweis der Behauptung $i(0) \geqq -1$ des in der Einleitung Formel (18) aufgestellten Zieles unserer Untersuchungen führen wird, stützt sich auf einen Hilfssatz, welcher für K. V. der Ordnung Null dasselbe leistet, wie Hilfssatz 16, § 25, für die K. V. der Ordnung $\geqq 1$. Bei der Formulierung dieses Hilfssatzes berücksichtigen wir, dass wir durch Satz 17, Teil I, § 27, und Satz 18, § 27, bereits wissen:

erstens: *dass alle in einem K. V. der Ordnung Null vom allgemeinen Typus II enthaltenen K. V.* $\{\alpha_{\nu,0}\}$ *einen Index*

$$i\{\alpha_{\nu,0}\} \geqq -2 \tag{284}$$

haben,

zweitens: *dass nicht gleichzeitig*

$$i\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}\} = -2, \qquad i\{\alpha_{\nu',0}\} = -2$$

sein können, wenn $\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}$ *und* $\alpha_{\nu',0}$ *zwei unmittelbar benachbarte positive* (bezw. negative) *Wurzeln ungerader Ordnung der Gleichung*

$$f_{t,0}(\omega) = 0$$

sind.

Auf diese beiden wichtigen Eigenschaften eines K. V. der Ordnung Null vom allgemeinen Typus II ist bereits in Abschnitt 66, § 12, hingewiesen worden.

Hilfssatz 19: *Es sei* $\left\{\begin{smallmatrix}+\\ p_t\end{smallmatrix}\right\}$ *ein K. V. der Ordnung Null vom allgemeinen Typus II. Dann ist immer*

$$(285)\qquad i\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\} \geqq -1.$$

Es seien

$$\beta'_1 > \beta'_2 > \cdots > \beta'_{\overset{+}{U}}$$

sämtliche positiven Wurzeln **ungerader** *Ordnung der Gleichung*

$$(286)\qquad f_{t,0}(\omega) = 0.$$

Dann kann der äusserste Fall

$$i\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\} = -1$$

nur eintreten, wenn

erstens *die Anzahl* $\overset{+}{U}$ *der positiven Wurzeln* $\beta'_\varkappa$ *ungerade ist,*

zweitens *die Wurzeln* $\beta'_\varkappa$ *für ungerades* $\varkappa$ *sämtlich von der Ordnung* $\geqq 3$ *und die zugehörigen Indices* $i\{\beta'_\varkappa\} = -2$ *für jedes ungerade* $\varkappa$ *sind. Insbesondere ist somit*

$$(287)\qquad i\{\beta'_1\} = i\left\{\beta'_{\overset{+}{U}}\right\} = -2.$$

Entsprechende Behauptungen ergeben sich für den Index eines K. V. $\left\{\begin{smallmatrix}-\\ p_t\end{smallmatrix}\right\}$, *wenn man anstelle der positiven* $\beta'_\varkappa$ *die sämtlichen negativen Wurzeln ungerader Ordnung von* (286)

$$0 > \bar{\beta}'_1 > \bar{\beta}'_2 > \cdots > \bar{\beta}'_{\bar{U}}$$

betrachtet.

Beweis: Es seien die $\beta''_\varkappa$ $\left(\varkappa = 1, 2, \ldots, \overset{+}{G}\right)$ sämtliche positiven Wurzeln ***gerader*** Ordnung der Gleichung (286); dann gehört zu jedem $\beta''_\varkappa$ ein K. V. $\{\beta''_\varkappa\}$ von ungerader Mächtigkeit, da auf Grund der Identität (41), § 2, jedes $\beta''_\varkappa$ gleichzeitig eine Nullstelle ungerader Ordnung des Polynoms $F_{t,0}(\omega)$ ist. Mithin ergibt sich aus Formel (284)

$$(288)\qquad i\{\beta''_\varkappa\} \geqq -1 \qquad \left(\varkappa = 1, 2, \ldots, \overset{+}{G}\right).$$

Mit Rücksicht darauf, dass die Gesamtzahl aller positiven Wurzeln der Gleichung (286) gleich $\overset{+}{U} + \overset{+}{G}$ ist, folgt aus Satz 5, § 9, (vgl. insbesondere Formel (107), § 9)

$$i\left\{\begin{matrix}+\\p_t\end{matrix}\right\} = \overset{+}{U} + \overset{+}{G} + \sum_{\varkappa=1}^{\overset{+}{U}} i\{\beta'_\varkappa\} + \sum_{\varkappa=1}^{\overset{+}{G}} i\{\beta''_\varkappa\}. \tag{289}$$

Andererseits hat man auf Grund von Formel (288)

$$\sum_{\varkappa=1}^{\overset{+}{G}} i\{\beta''_\varkappa\} \geqq -\overset{+}{G} \tag{290}$$

und ferner in Verbindung mit Satz 18, § 27,

$$\sum_{\varkappa=1}^{\overset{+}{U}} i\{\beta'_\varkappa\} \geqq \begin{cases} -\overset{+}{U} & \text{für gerades } \overset{+}{U} \\ -\overset{+}{U} - 1 & \text{für ungerades } \overset{+}{U}. \end{cases} \tag{291}$$

Hierbei kann der äusserste Fall

$$\sum_{\varkappa=1}^{\overset{+}{U}} i\{\beta'_\varkappa\} = -\overset{+}{U} - 1 \tag{292}$$

offenbar nur eintreten, wenn $\overset{+}{U}$ ungerade ist und $i\{\beta'_\varkappa\} = -2$ für jedes ungerade $\varkappa$.

Substituiert man die Abschätzungen (290) und (291) in die Gleichung (289), so folgt die Behauptung (285). Die übrigen Behauptungen unseres Hilfssatzes über den Fall $i\left\{\begin{matrix}+\\p_t\end{matrix}\right\} = -1$ folgen unmittelbar aus den Bemerkungen, die wir über den Fall (292) gemacht haben.

Für einen K. V. $\left\{\begin{matrix}-\\p_t\end{matrix}\right\}$ vom allgemeinen Typus II lässt sich die Untersuchung in gleicher Weise durchführen. Damit ist der Hilfssatz 19 vollständig bewiesen.

149. Die K. V. der Ordnung Null vom Typus II sind nach Abschnitt 35, § 7, bezw. Formel (96) und (97), § 19, durch die Bedingung $L_t \geqq 1$ definiert. Wir teilen nunmehr diese K. V. mit $L_t \geqq 1$ noch weiter in zwei Klassen ein, und rechnen einen K. V. der Ordnung Null zur

1. Klasse, wenn $1 \leqq L_t \leqq 2p_t$, d. h. nach Formel (96), § 19,

$$l_t - p_t - q + 1 \leqq L \leqq l_t + p_t - q$$

2. Klasse, wenn $L_t \geqq 2p_t + 1$, d. h.

$$L \geqq l_t + p_t - q + 1.$$

Enthält die Menge der K. V. nullter Ordnung, die zu einer vorgelegten Differentialgleichung (5) (siehe die Einleitung!) gehören, K. V. der beiden Klassen, so ist der Index t eines K. V. der 1. Klasse *immer* kleiner als der Index t eines K. V. der 2. Klasse. Denn aus Formel (150), § 12, folgt leicht

$$(l_{t-1} + p_{t-1}) - (l_t + p_t) = (p_{t-1} - p_t)(k_{t-1} + 1) > 0,$$

da nach der Beziehung (30), § 1, $p_{t-1} > p_t$ ist.

Es lässt sich mithin immer eine Konstante t_1 bestimmen derart, dass, unter t_0 die in Formel (151), § 12, definierte Konstante verstanden,

$$(293) \qquad \begin{cases} 1 \leqq L_t \leqq 2\,p_t & \text{für } t_0 + 1 \leqq t \leqq t_1, \\ \quad L_t \geqq 2\,p_t + 1 & \text{für } t_1 + 1 \leqq t \leqq T \text{ wird.} \end{cases}$$

Gehören zu einem vorgelegten Problem nur K. V. der 2. Klasse, so werde $t_1 = t_0$ gesetzt; sind hingegen die K. V., die zu der vorgelegten Differentialgleichung gehören, sämtlich von der 1. Klasse, so sei $t_1 = T$.

150. Wir behaupten zunächst

Satz 19: *Für ein gegebenes festes t sei*

$$(294) \qquad 1 \leqq L_t \leqq 2\,p_t, \text{ d. h. } t_0 + 1 \leqq t \leqq t_1.$$

Damit

$$i\begin{Bmatrix} + \\ p_t \end{Bmatrix} = -1,$$

muss die Bedingung

$$(295) \qquad \operatorname{sg} v_0 = \operatorname{sg} w_{m_{t-1},\,k_{t-1}} = -\operatorname{sg} w_{m_t,\,k_t}$$

notwendig erfüllt sein.

Andererseits ist

$$(296) \qquad i\begin{Bmatrix} + \\ p_t \end{Bmatrix} \geqq 0, \text{ wenn } \operatorname{sg} w_{m_{t-1},\,k_{t-1}} = \operatorname{sg} w_{m_t,\,k_t},$$

$$(297) \qquad i\begin{Bmatrix} + \\ p_t \end{Bmatrix} \geqq +1, \text{ wenn } \operatorname{sg} v_0 = -\operatorname{sg} w_{m_{t-1},\,k_{t-1}} = \operatorname{sg} w_{m_t,\,k_t}.$$

Damit

$$i\begin{Bmatrix} - \\ p_t \end{Bmatrix} = -1,$$

muss die Bedingung

$$(298) \qquad \operatorname{sg} v_0 = (-1)^{k_{t-1}-1} \operatorname{sg} w_{m_{t-1},\,k_{t-1}} = -(-1)^{k_t-1} \operatorname{sg} w_{m_t,\,k_t}$$

notwendig erfüllt sein.

Es ist endlich

(299) $$i\left\{\overset{-}{p_t}\right\} \geqq 0, \text{ wenn } (-1)^{k_{t-1}-1} \operatorname{sg} w_{m_{t-1}, k_{t-1}} = (-1)^{k_t-1} \operatorname{sg} w_{m_t, k_t},$$

(300) $$i\left\{\overset{-}{p_t}\right\} \geqq +1, \text{ wenn } \operatorname{sg} v_0 = -(-1)^{k_{t-1}-1} \operatorname{sg} w_{m_{t-1}, k_{t-1}} = (-1)^{k_t-1} \operatorname{sg} w_{m_t, k_t}.$$

Hierbei ergibt sich die Bedeutung der w_{m_t, k_t} u. s. w. aus den Formeln (35) und (37), § 1, (40), § 2.

151. **Beweis:** Es sei $\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, 0}$ die kleinste positive Wurzel ungerader Ordnung der Gleichung

(301) $$f_{t,0}(\omega) = 0,$$

und $\bar{\alpha}_{\bar{\nu}, 0}$ die grösste negative Wurzel ungerader Ordnung der Gleichung (301) (negative Wurzel ungerader Ordnung von kleinstem absoluten Betrage).

Aus Hilfssatz 19 folgt nunmehr, dass

(302) $$i\left\{\overset{+}{p_t}\right\} \geqq -1, \quad i\left\{\overset{-}{p_t}\right\} \geqq -1$$

ist und weiter, wenn wir noch

$$i\left\{\overset{+}{p_t}\right\} = -1, \quad i\left\{\overset{-}{p_t}\right\} = -1$$

voraussetzen, dass

erstens die Anzahlen $\overset{+}{U}$ bezw. $\overset{-}{U}$ der positiven bezw. negativen Nullstellen von $f_{t,0}(\omega)$ beide ungerade sind,

zweitens aus Formel (287)

(303) $$i\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, 0}\} = -2, \quad i\{\bar{\alpha}_{\bar{\nu}, 0}\} = -2,$$

womit zugleich gesagt ist, dass $\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, 0}$ bezw. $\bar{\alpha}_{\bar{\nu}, 0}$ auch gleichzeitig Nullstellen von $F_{t,0}(\omega)$ sind. Auf Grund der Beziehung (303) lassen sich nun aber nach einem in Abschnitt 131, § 26, angegebenen Verfahren zwei Kurven $\vartheta = \theta_{\overset{\circ}{\nu}}(\varrho)$ und $\vartheta = \theta_{\bar{\nu}}(\varrho)$ konstruieren, die in $\{\alpha_{\overset{\circ}{\nu}, 0}\}$ bezw. $\{\bar{\alpha}_{\bar{\nu}, 0}\}$ enthalten sind und gewisse l. c. angegebenen Eigenschaften besitzen. Insbesondere genügen die ihnen zugeordneten Zahlen $l'_{\overset{\circ}{\nu}}$, $l''_{\overset{\circ}{\nu}}$ bezw. $l'_{\bar{\nu}}$, $l''_{\bar{\nu}}$ den Bedingungen

(304) $$l'_{\overset{\circ}{\nu}} \geqq 1, \; l''_{\overset{\circ}{\nu}} \geqq l'_{\overset{\circ}{\nu}} + 1, \text{ bezw. } l'_{\nu} \geqq 1, \; l''_{\bar{\nu}} \geqq l'_{\bar{\nu}} + 1.$$

Ausserdem folgt daraus, dass $\overset{+}{U}$ ungerade, bezw. $\overset{-}{U}$ ungerade ist,

$$\operatorname{sg} f_{t,0}(\varepsilon) = -\operatorname{sg} f_{t,0}(\infty), \text{ bezw. } \operatorname{sg} f_{t,0}(-\varepsilon) = -\operatorname{sg} f_{t,0}(-\infty)$$

oder aber, wenn man die Beziehungen (37), § 1, und (40), § 2, heranzieht,

$$\operatorname{sg} w_{m_{t-1}, k_{t-1}} = -\operatorname{sg} w_{m_t, k_t}, \tag{305}$$

$$\text{bezw. } (-1)^{k_{t-1}} \operatorname{sg} w_{m_{t-1}, k_{t-1}} = -(-1)^{k_t} \operatorname{sg} w_{m_t, k_t}. \tag{306}$$

Andererseits ergibt sich aus Formel (35), § 1, dass die Gleichungen (305), bezw. (306) gleichzeitig die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür liefern, dass die Anzahlen der positiven bezw. negativen Nullstellen ungerader Ordnung von $F_{t,0}(\omega)$ ungerade sind; damit sind dann aber auch die Mächtigkeiten der K. V. $\left\{\begin{smallmatrix}+\\p_t\end{smallmatrix}\right\}$ bezw. $\left\{\begin{smallmatrix}-\\p_t\end{smallmatrix}\right\}$ ungerade, während, wenn

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{sg} w_{m_{t-1}, k_{t-1}} = \operatorname{sg} w_{m_t, k_t} \\ &\text{bezw. } (-1)^{k_{t-1}} \operatorname{sg} w_{m_{t-1}, k_{t-1}} = (-1)^{k_t} \operatorname{sg} w_{m_t, k_t} \end{aligned}\right. \tag{307}$$

ist, die K. V. $\left\{\begin{smallmatrix}+\\p_t\end{smallmatrix}\right\}$ bezw. $\left\{\begin{smallmatrix}-\\p_t\end{smallmatrix}\right\}$ von gerader Mächtigkeit sind. Hieraus folgen aber bereits in Verbindung mit den Beziehungen (302) die Behauptungen (286) und (299) unseres Satzes.

Wir erwähnen endlich noch die weiteren für das folgende wichtigen Beziehungen. Es ist

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{sg} f_{t,0}^{(r_{\overset{\circ}{\nu},0}+1)}(\alpha_{\overset{\circ}{\nu},0}) = -\operatorname{sg} f_{t,0}(\varepsilon) = -\operatorname{sg} w_{m_{t-1}, k_{t-1}}, \\ &\operatorname{sg} f_{t,0}^{(r_{\bar{\nu},0}+1)}(\bar{\alpha}_{\bar{\nu},0}) = \operatorname{sg} f_{t,0}(-\varepsilon) = -(-1)^{k_{t-1}-1} \operatorname{sg} w_{m_{t-1}, k_{t-1}}. \end{aligned}\right. \tag{308}$$

152. Es werde jetzt, anstelle von (294), spezieller

$$1 \leqq L_t \leqq 2p_t - 1 \tag{309}$$

vorausgesetzt. Dann folgt aus den Beziehungen (303):

$$l'_{\overset{\circ}{\nu}} = L_t, \quad l'_{\bar{\nu}} = L_t,$$

da man anderenfalls $l''_{\overset{\circ}{\nu}} \leqq l'_{\overset{\circ}{\nu}}$ bezw. $l''_{\bar{\nu}} \leqq l'_{\bar{\nu}}$ erhalten würde, im Widerspruch zu (304).

Weiter ergibt sich aus Hilfssatz 18 Formel (233), § 26, mit Rücksicht auf Formel (308)

$$\operatorname{sg} v_0 = -\operatorname{sg} f_{t,0}^{(r_{\mathring{\nu},0}+1)}(\alpha_{\mathring{\nu},0}) = \operatorname{sg} w_{m_{t-1},k_{t-1}},$$

$$\operatorname{sg} v_0 = -\operatorname{sg} f_{t,0}^{(r_{\bar{\nu},0}+1)}(\bar{\alpha}_{\nu,0}) = (-1)^{k_{t-1}-1} \operatorname{sg} w_{m_{t-1},k_{t-1}},$$

und damit sind, wenn man noch die Beziehungen (302), (305) und (306) heranzieht, die Behauptungen (295), (297), (298) und (300) unseres Satzes für den Fall (309) bewiesen.

153. Es bleibt noch übrig, den Fall

(310) $$L_t = 2p_t$$

zu untersuchen. Aus (303) in Verbindung mit (310) folgt

$$l'_{\mathring{\nu}} \geqq 2p_t, \quad l'_{\bar{\nu}} \geqq 2p_t,$$

da man anderenfalls wieder $l''_{\mathring{\nu}} \leqq l'_{\mathring{\nu}}$ bezw. $l''_{\bar{\nu}} \leqq l'_{\bar{\nu}}$ erhalten würde, im Widerspruch zu (304).

Ist jetzt $l'_{\mathring{\nu}} > 2p_t$, bezw. $l'_{\bar{\nu}} > 2p_t$, so folgt aus (304) auch $l''_{\mathring{\nu}} > 2p_t$, bezw. $l''_{\bar{\nu}} > 2p_t$, und somit wegen (310) und wegen Formel (103), § 19,

$$B_{\mathring{\nu},2p_t} = v_0 - \frac{c_0}{q^2}\int_0^{\alpha_{\mathring{\nu},0}} f_{t,0}(\omega)\,d\omega = 0,$$

$$B_{\bar{\nu},2p_t} = v_0 - \frac{c_0}{q^2}\int_0^{\bar{\alpha}_{\nu,0}} f_{t,0}(\omega)\,d\omega = 0.$$

Endlich ergibt sich hieraus in Verbindung mit (308)

(311) $$\begin{cases} \operatorname{sg} v_0 = \operatorname{sg} f_{t,0}(+\varepsilon) = \operatorname{sg} w_{m_{t-1},k_{t-1}}, \\ \operatorname{sg} v_0 = -\operatorname{sg} f_{t,0}(-\varepsilon) = (-1)^{k_{t-1}-1} w_{m_{t-1},k_{t-1}}. \end{cases}$$

Ist aber $l'_{\mathring{\nu}} = 2p_t$ bezw. $l'_{\bar{\nu}} = 2p_t$, so lässt sich der Zusatz zu Hilfssatz 17, § 26, für $\mathring{\mu}'' = 0$ anwenden, und es ergibt sich aus Formel (217), § 26, in Verbindung mit Formel (308)

$$\mathrm{sg}\left(v_0 - \frac{c_0}{q^2}\int\limits_0^{\alpha^\circ_{\nu,0}} f_{t,0}(\omega)\,d\,\omega\right) = -\,\mathrm{sg}\, f_{t,0}^{(r^\circ_\nu+1)}(\alpha^\circ_{\nu,0}) = \mathrm{sg}\, f_{t,0}(\varepsilon),$$

folglich

$$(312)\qquad \mathrm{sg}\, v_0 = \mathrm{sg} f_{t,0}(\varepsilon) = \mathrm{sg}\, w_{m_{t-1},\,k_{t-1}};$$

bezw.

$$\mathrm{sg}\left(v_0 - \frac{c_0}{q^2}\int\limits_0^{\bar{\alpha}_{\bar{\nu},0}} f_{t,0}(\omega)\,d\,\omega\right) = -\,\mathrm{sg}\, f_{t,0}^{(r_{\bar{\nu}},0+1)}(\bar{\alpha}_{\bar{\nu},0}) = -\,\mathrm{sg}\, f_{t,0}(-\varepsilon),$$

folglich

$$(313)\qquad \mathrm{sg}\, v_0 = -\,\mathrm{sg} f_{t,0}(-\varepsilon) = (-1)^{k_{t-1}-1}\,\mathrm{sg}\, w_{m_{t-1},\,k_{t-1}}.$$

Aus (311), (312) und (313) folgen aber in Verbindung mit den Beziehungen (302), (305) und (306) die Behauptungen (295), (297), (298) und (300) unseres Satzes auch für den Fall (310), und damit ist Satz 19 vollständig bewiesen.

154. Wir leiten jetzt einen Satz über die Summe der Indices aller derjenigen K. V. ab, welche zur 1. Klasse gehören.

Satz 20: *Sind* t_0 *und* t_1 *die beiden in Formel* (293) *definierten Zahlen, so ist immer*

$$(314)\qquad \sum_{t=t_0+1}^{t_1} i\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix} \geqq -1,\quad \sum_{t=t_0+1}^{t_1} i\begin{Bmatrix}-\\p_t\end{Bmatrix} \geqq -1.$$

Ausserdem können die Indexsummen ihre Minimalwerte

$$\sum_{t=t_0+1}^{t_1} i\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix} = -1,\ \text{bezw.}\ \sum_{t=t_0+1}^{t_1} i\begin{Bmatrix}-\\p_t\end{Bmatrix} = -1$$

nur annehmen, wenn

$$(315)\qquad \mathrm{sg}\, v_0 = \mathrm{sg}\, w_{m_{t_0},\,k_{t_0}} = -\,\mathrm{sg}\, w_{m_{t_1},\,k_{t_1}},$$

$$(316)\qquad \text{bezw. } \mathrm{sg}\, v_0 = (-1)^{k_{t_0}-1}\,\mathrm{sg}\, w_{m_{t_0},\,k_{t_0}} = -(-1)^{k_{t_1}-1}\,\mathrm{sg}\, w_{m_{t_1},\,k_{t_1}}$$

ist.

155. **Beweis:** Es sei der K. V. $\left\{\begin{smallmatrix}+\\ p_{\mathring{t}}\end{smallmatrix}\right\}$ $(t_0 + 1 \leqq \mathring{t} \leqq t_1)$, bezw. $\left\{\begin{smallmatrix}-\\ p_{\mathring{t}}\end{smallmatrix}\right\}$ von ungerader Mächtigkeit, und ausserdem sei

$$i\left\{\begin{matrix}+\\ p_{\mathring{t}}\end{matrix}\right\} = -1, \text{ bezw. } i\left\{\begin{matrix}-\\ p_{\mathring{t}}\end{matrix}\right\} = -1. \tag{317}$$

Ferner sei $\mathring{t} < \mathring{t}' \leqq t_1$ derart, dass für $\mathring{t} + 1 \leqq t \leqq \mathring{t}' - 1$ alle K. V. $\left\{\begin{smallmatrix}+\\ p_t\end{smallmatrix}\right\}$ bezw. $\left\{\begin{smallmatrix}-\\ p_t\end{smallmatrix}\right\}$ von gerader Mächtigkeit sind, während $\left\{\begin{smallmatrix}+\\ p_{\mathring{t}'}\end{smallmatrix}\right\}$ bezw. $\left\{\begin{smallmatrix}-\\ p_{\mathring{t}'}\end{smallmatrix}\right\}$ selbst wieder von ungerader Mächtigkeit ist. Dann behaupten wir zunächst:

$$i\left\{\begin{matrix}+\\ p_{\mathring{t}'}\end{matrix}\right\} \geqq +1, \text{ bezw. } i\left\{\begin{matrix}-\\ p_{\mathring{t}'}\end{matrix}\right\} \geqq +1. \tag{318}$$

Und in der Tat folgt aus der Voraussetzung (317) nach Satz 19, Formel (295) und (298)

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{sg} v_0 &= \operatorname{sg} w_{m_{\mathring{t}-1}, k_{\mathring{t}-1}} = -\operatorname{sg} w_{m_{\mathring{t}}, k_{\mathring{t}}}, \\ \text{bezw. } \operatorname{sg} v_0 &= (-1)^{k_{\mathring{t}-1}-1} \operatorname{sg} w_{m_{\mathring{t}-1}, k_{\mathring{t}-1}} = -(-1)^{k_{\mathring{t}}-1} \operatorname{sg} w_{m_{\mathring{t}}, k_{\mathring{t}}}. \end{aligned}\right. \tag{319}$$

Andererseits ist auf Grund der Beziehungen (307)

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{sg} w_{m_{\mathring{t}}, k_{\mathring{t}}} &= \operatorname{sg} w_{m_{\mathring{t}'-1}, k_{\mathring{t}'-1}}, \\ \text{bezw. } (-1)^{k_{\mathring{t}}-1} \operatorname{sg} w_{m_{\mathring{t}}, k_{\mathring{t}}} &= (-1)^{k_{\mathring{t}'-1}-1} \operatorname{sg} w_{m_{\mathring{t}'-1}, k_{\mathring{t}'-1}}, \end{aligned}\right. \tag{320}$$

da ja $\mathring{t}'$ derart gewählt worden ist, dass alle K. V. $\left\{\begin{smallmatrix}+\\ p_t\end{smallmatrix}\right\}$ bezw. $\left\{\begin{smallmatrix}-\\ p_t\end{smallmatrix}\right\}$ für $\mathring{t} + 1 \leqq$ $\leqq t \leqq \mathring{t}' - 1$ von gerader Mächtigkeit sind.

Nunmehr ergibt sich aber, da $\left\{\begin{smallmatrix}+\\ p_{\mathring{t}'}\end{smallmatrix}\right\}$ bezw. $\left\{\begin{smallmatrix}-\\ p_{\mathring{t}'}\end{smallmatrix}\right\}$ selbst von ungerader Mächtigkeit sind, aus (319) und (320) in Verbindung mit den Beziehungen (305) und (306)

$$\operatorname{sg} v_0 = -\operatorname{sg} w_{m_{\mathring{t}'-1}, k_{\mathring{t}'-1}} = \operatorname{sg} w_{m_{\mathring{t}'}, k_{\mathring{t}'}},$$

$$\text{bezw. } \operatorname{sg} v_0 = -(-1)^{k_{\mathring{t}'-1}-1} \operatorname{sg} w_{m_{\mathring{t}'-1}, k_{\mathring{t}'-1}} = (-1)^{k_{\mathring{t}'}-1} \operatorname{sg} w_{m_{\mathring{t}'}, k_{\mathring{t}'}},$$

und hieraus folgt die Behauptung (318) mit Rücksicht auf Satz 19, Formel (297) und (300).

156. Aus der eben bewiesenen Tatsache ergeben sich aber nach einer leichten Überlegung, die wir dem Leser überlassen, *erstens* die behaupteten Abschätzungen (314); *zweitens* folgt, dass die Beziehung

$$\sum_{t=t_0+1}^{t_1} i\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix} = -1 \tag{321}$$

nur bestehen kann, wenn

$$i\begin{Bmatrix}+\\p_{t'}\end{Bmatrix} = i\begin{Bmatrix}+\\p_{t''}\end{Bmatrix} = -1 \qquad (t_0 + 1 \leqq t' \leqq t'' \leqq t_1). \tag{322}$$

Hierbei seien $\begin{Bmatrix}+\\p_{t'}\end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix}+\\p_{t''}\end{Bmatrix}$ K. V. von ungerader Mächtigkeit, während die K. V. $\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix}$ für $t_0 + 1 \leqq t \leqq t' - 1$ und für $t'' + 1 \leqq t \leqq t_1$ sämtlich von gerader Mächtigkeit sind, d. h. kurz: t' ist die kleinste und t'' die grösste aller Zahlen t, zu denen K. V. $\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix}$ ungerader Mächtigkeit der 1. Klasse gehören.

Somit folgt aus (307)

$$\operatorname{sg} w_{m_{t_0}, k_{t_0}} = \operatorname{sg} w_{m_{t'-1}, k_{t'-1}}, \quad \operatorname{sg} w_{m_{t''}, k_{t''}} = \operatorname{sg} w_{m_{t_1}, k_{t_1}}. \tag{323}$$

Andererseits ergibt sich aus (322) in Verbindung mit Satz 19, Formel (295)

$$\operatorname{sg} v_0 = \operatorname{sg} w_{m_{t'-1}, k_{t'-1}},$$

$$\operatorname{sg} v_0 = -\operatorname{sg} w_{m_{t''}, k_{t''}},$$

mithin mit Rücksicht auf (323)

$$\operatorname{sg} v_0 = \operatorname{sg} w_{m_{t_0}, k_{t_0}} = -\operatorname{sg} w_{m_{t_1}, k_{t_1}}.$$

Damit ist die Beziehung (315) unter der Voraussetzung (321) bewiesen. Ebenso folgert man die Beziehung (316) aus der Voraussetzung

$$\sum_{t=t_0+1}^{t_1} i\begin{Bmatrix}-\\p_t\end{Bmatrix} = -1.$$

Was zu beweisen war.

157. Wir wenden uns nun den K. V. der 2. Klasse zu und behaupten

Satz 21: *Für ein gegebenes festes t sei*

$$L_t \geqq 2p + 1, \text{ d. h. } t_1 + 1 \leqq t \leqq T. \tag{324}$$

Dann ist

$$i\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix} \geqq 0, \quad i\begin{Bmatrix}-\\p_t\end{Bmatrix} \geqq 0.$$

Beweis: Wir suchen den Beweis indirekt zu führen, und gehen somit von der Annahme aus, es sei

$$i\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix} = -1, \tag{325}$$

da $i\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix} \geqq -1$ bereits in Hilfssatz 19 bewiesen wurde.

Wie beim Beweise von Satz 19 sei $\alpha_{\mathring{\nu},0}$ die kleinste positive Wurzel ungerader Ordnung der Gleichung

$$f_{t,0}(\omega) = 0.$$

Dann folgt aus der Annahme (325) auf Grund von Hilfssatz 19, dass $\alpha_{\mathring{\nu},0}$ gleichzeitig eine Nullstelle gerader Ordnung des Polynoms $F_{t,0}(\omega)$ ist, und dass

$$i\{\alpha_{\mathring{\nu},0}\} = -2 \tag{326}$$

ist. Ausserdem sei $\vartheta = \theta_{\mathring{\nu}}(\varrho)$ eine Kurve aus $\{\alpha_{\mathring{\nu},0}\}$, welche nach dem in Abschnitt 131, § 26, beschriebenen Verfahren konstruiert ist derart, dass die ihr zugeordneten Zahlen $l'_{\mathring{\nu}}$ und $l''_{\mathring{\nu}}$ den Bedingungen

$$l'_{\mathring{\nu}} \geqq 1, \; l''_{\mathring{\nu}} \geqq l'_{\mathring{\nu}} + 1 \tag{327}$$

genügen.

Es ist nun aber sogar $l'_{\mathring{\nu}} = 2p_t$; denn aus der Annahme $l'_{\mathring{\nu}} < 2p_t$, würde man leicht in Verbindung mit der Voraussetzung (324) $l''_{\mathring{\nu}} = l'_{\mathring{\nu}}$ folgern, im Widerspruch zu (327).

Andererseits würde sich aus der Annahme $l''_{\mathring{\nu}} > l'_{\mathring{\nu}} > 2p_t$ mit Rücksicht auf die Voraussetzung (324)

$$B_{\mathring{\nu},2p_t} = -\frac{c_0}{q^2}\int_0^{\alpha_{\mathring{\nu},0}} f_{t,0}(\omega)\,d\omega = 0$$

ergeben; das ist indessen unmöglich, da $f_{t,0}(\omega)$ nach den getroffenen Bestimmungen über $\alpha_{\mathring{\nu},0}$ im Intervall $0 < \omega < \alpha_{\mathring{\nu},0}$ sein Vorzeichen nicht wechselt.

Ist nun aber $l_{\nu}^{\circ} = 2\,p_t$, so lässt sich auf Grund der Annahme (326) auf den K. V. $\{\alpha_{\nu,0}^{\circ}\}$ der Hilfssatz 17, § 26, mit $\mathring{\mu}'' = 0$ anwenden, und es folgt aus der Beziehung (217), § 26, wegen (324)

$$\operatorname{sg}\left(-\frac{c_0}{q^2}\int\limits_0^{\alpha_{\nu,0}^{\circ}} f_{t,0}(\omega)\,d\omega\right) = -\operatorname{sg} f_{t,0}^{(r_{\nu,0}^{\circ}+1)}(\alpha_{\nu,0}^{\circ}).$$

Diese Beziehung steht aber mit Formel (308) in Widerspruch, und somit ist die Gleichung (326) und damit auch die Annahme (325) widerlegt, und die Behauptung $i\left\{\begin{matrix}+\\p_t\end{matrix}\right\} \geqq 0$ bewiesen.

In derselben Weise schliesst man, dass auch $i\left\{\begin{matrix}-\\p_t\end{matrix}\right\} \geqq 0$ ist, und so ist Satz 21 in vollem Umfange bewiesen.

158. Nunmehr erfordert es nur noch geringe Mühe, das eigentliche Ziel unserer Untersuchung zu erreichen:

Satz 22: *Es ist*

$$i(0) \geqq -1.$$

Beweis: Wir behandeln zunächst den einfachsten Fall, dass die K. V. der Ordnung Null, die zu der vorgelegten Differentialgleichung (5) (siehe Einleitung) gehören, sämtlich vom Typus II sind. Dann ist $t_0 = 0$, und man hat nach Formel (63), § 4

$$i(0) = i\{p_0\} + \sum_{t=1}^{t_1}\left(i\left\{\begin{matrix}+\\p_t\end{matrix}\right\} + i\left\{\begin{matrix}-\\p_t\end{matrix}\right\}\right) + \sum_{t=t_1+1}^{T}\left(i\left\{\begin{matrix}+\\p_t\end{matrix}\right\} + i\left\{\begin{matrix}-\\p_t\end{matrix}\right\}\right), \tag{328}$$

wenn $A(\varrho, \vartheta)$ für $\vartheta = 0$ verschwindet und somit ein K. V. $\{p_0\}$ existiert. Da wir $\{p_0\}$ als vom Typus II vorausgesetzt haben, so ist nach den Ausführungen aus Abschnitt 39, § 7, der Exponent $k_0 = 1$ (vgl. die Produktdarstellung (29), § 1, für $A(\varrho, \vartheta)$), und es ist weiter nach Formel (108), § 9,

$$i\{p_0\} = +1. \tag{329}$$

Ausserdem ist nach Satz 20

$$\sum_{t=1}^{t_1} i\left\{\begin{matrix}+\\p_t\end{matrix}\right\} \geqq -1,\ \sum_{t=1}^{t_1} i\left\{\begin{matrix}-\\p_t\end{matrix}\right\} \geqq -1, \tag{330}$$

nach Satz 21

$$(331) \qquad \sum_{t=t_1+1}^{T}\left(i\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix}+i\begin{Bmatrix}-\\p_t\end{Bmatrix}\right)\geqq 0.$$

Mithin erhält man, wenn man die Ergebnisse aus (329), (330) und (331) in (328) einsetzt, $i(0)\geqq -1$.

Ist aber $k_0=0$, d. h. ist $\vartheta=0$ keine Lösung der Gleichung $A(\varrho, \vartheta)=0$, so wird, wenn wir wieder voraussetzen, dass die $\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix}-\\p_t\end{Bmatrix}$ sämtlich vom Typus II sind, d. h. dass $t_0=0$ ist,

$$(332) \qquad i(0)=\sum_{t=1}^{t_1}\left(i\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix}+i\begin{Bmatrix}-\\p_t\end{Bmatrix}\right)+\sum_{t=t_1+1}^{T}\left(i\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix}+i\begin{Bmatrix}-\\p_t\end{Bmatrix}\right).$$

Aus $k_{t_0}=k_0=0$ folgt nun aber, dass die beiden Summen

$$\sum_{t=1}^{t_1} i\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix}, \quad \sum_{t=1}^{t_1} i\begin{Bmatrix}-\\p_t\end{Bmatrix}$$

nicht beide gleichzeitig gleich -1 sein können. Denn nach Satz 20, Formel (315) ist

$$\operatorname{sg} v_0 = \operatorname{sg} w_{m_0, k_0}$$

notwendige Bedingung für $\sum_{t=1}^{t_1} i\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix}=-1$; andererseits ist nach Formel (316)

$$\operatorname{sg} v_0 = -\operatorname{sg} w_{m_0, k_0}$$

notwendige Bedingung für $\sum_{t=1}^{t_1} i\begin{Bmatrix}-\\p_t\end{Bmatrix}=-1$.

Mithin ergibt sich

$$\sum_{t=1}^{t_1}\left(i\begin{Bmatrix}+\\p_t\end{Bmatrix}+i\begin{Bmatrix}-\\p_t\end{Bmatrix}\right)\geqq -1,$$

und hieraus folgt in Verbindung mit der Gleichung (332) und der Abschätzung (331) auch für diesen Fall $i(0)\geqq -1$.

159. Es bleibt noch übrig, den Fall zu untersuchen, dass unter den zu der vorgelegten Differentialgleichung gehörigen K. V. der Ordnung Null auch solche vom Typus I oder Typus III existieren. Indem wir von dem in Satz 8, § 12, eingeführten Symbol $i\{t_0\}$ Gebrauch machen, erhält man aus Formel (63), § 4,

$$i(0) = i\{t_0\} + \sum_{t=t_0+1}^{t_1}\left(i\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\} + i\left\{\begin{matrix}-\\ p_t\end{matrix}\right\}\right) + \sum_{t=t_1+1}^{T}\left(i\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\} + i\left\{\begin{matrix}-\\ p_t\end{matrix}\right\}\right)$$

und weiter, mit Rücksicht auf die Abschätzung (331)

$$i(0) \geqq i\{t_0\} + \sum_{t=t_0+1}^{t_1}\left(i\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\} + i\left\{\begin{matrix}-\\ p_t\end{matrix}\right\}\right). \tag{333}$$

Ist jetzt $i\{t_0\} = -1$, so folgt aus Satz 8, § 12, Formel (152)

$$k_{t_0} \text{ ungerade, } \operatorname{sg} v_0 = -\operatorname{sg} w_{m_{t_0}, k_{t_0}},$$

und hieraus ergibt sich nach Satz 20, Formel (315) und (316)

$$\sum_{t=t_0+1}^{t_1} i\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\} \geqq 0, \quad \sum_{t=t_0+1}^{t_1} i\left\{\begin{matrix}-\\ p_t\end{matrix}\right\} \geqq 0,$$

und somit wegen (333) $i(0) \geqq -1$.

Ist andererseits $i\{t_0\} = 0$, so folgt aus Satz 8, § 12, Formel (153)

$$k_{t_0} \text{ gerade.}$$

Dann können aber die Summen

$$\sum_{t=t_0+1}^{t_1} i\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\}, \quad \sum_{t=t_0+1}^{t_1} i\left\{\begin{matrix}-\\ p_t\end{matrix}\right\}$$

nicht beide gleichzeitig gleich -1 sein. Denn nach Satz 20, Formel (315) ist

$$\operatorname{sg} v_0 = \operatorname{sg} w_{m_{t_0}, k_{t_0}}$$

notwendige Bedingung für $\sum_{t=t_0+1}^{t_1} i\left\{\begin{matrix}+\\ p_t\end{matrix}\right\} = -1$; nach Formel (316) ist ferner, da k_{t_0} gerade,

$$\operatorname{sg} v_0 = -\operatorname{sg} w_{m_{t_0}, k_{t_0}}$$

notwendige Bedingung für $\sum_{t=t_0+1}^{t_1} i\left\{\begin{matrix}-\\ p_t\end{matrix}\right\} = -1$. Mithin hat man im Falle $i\{t_0\} = 0$

$$\sum_{t=t_0+1}^{t_1} i\left\{\begin{matrix}+\\p_t\end{matrix}\right\} + i\left\{\begin{matrix}-\\p_t\end{matrix}\right\} \geqq -1,$$

und hieraus folgt unmittelbar in Verbindung mit (333) die Behauptung $i(0) \geqq -1$.

Ist endlich $i\{t_0\} \geqq +1$, so genügen bereits die Abschätzungen (314) aus Satz 20, um in Verbindung mit (333) die Behauptung $i(0) \geqq -1$ zu folgern.

Damit ist die Abschätzung (18) der Einleitung für alle Fälle bewiesen und das Ziel, das wir uns für die vorliegende Untersuchung gesteckt haben, erreicht. Denn wie in den Abschnitten 8 und 9 der Einleitung gezeigt wurde, folgt aus $i(0) \geqq -1$ für den Index i_S eines isolierten Nabels die grundlegende Relation $i_S \geqq 0$ und hieraus wieder, wie wir bereits aus Teil I wissen, die Richtigkeit der Caratheodoryschen Vermutung, so wie wir sie zu Beginn dieser Ausführungen in Abschnitt 1 als Hauptsatz formuliert haben.