SUR LES CORRESPONDANCES MULTIVOQUES ENTRE DEUX ENSEMBLES ABSTRAITS.

PAR

W. SIMONSEN

à COPENHAGUE.

1. Le but de cet ouvrage est la démonstration de quelques propriétés générales des correspondances multivoques, qu'il est possible d'établir entre deux ensembles abstraits. Les ensembles considérés sont d'une nature complètement générale; nous ne supposons point qu'ils sont munis de quelque sort de structure, comme c'est le cas pour les espaces envisagés dans la topologie générale, ou pour les groupes abstraits de l'algèbre.

Rappelons d'abord quelques notions et relations fondamentales de la théorie des correspondances multivoques, qui sont indispensables pour les considérations suivantes[1].

Si a et b sont des éléments quelconques, nous pouvons former la paire ordonnée (a, b) de ces éléments; l'égalite $(a, b) = (c, d)$ est, par définition, équivalente aux deux égalités $a = c$ et $b = d$. Si (a, b) est une paire ordonnée, nous définirons la paire inverse comme (b, a).

Soient P et Q deux ensembles arbitraires, non vides. Nous définirons une correspondance multivoque f entre P et Q comme un ensemble des paires ordonnées (a, b) telles que $a \in P$ et $b \in Q$, que tout $a \in P$ est l'élément premier dans une paire au moins, et que tout $b \in Q$ appartient comme deuxième élément à une paire au moins.

---

[1] Pour la démonstration de ces relations, *voir* par exemple W. SIERPIŃSKI: Leçons sur les nombres transfinis (1928), pp. 16—18. Nous écrirons $a \in A$, si a est un élément de l'ensemble A, et $B \leqq A$, si B est un sous-ensemble de A. L'ensemble vide sera désigné par O, et l'ensemble formé d'un seul élément a par $\{a\}$. Nous désignerons par $\sum_\alpha A_\alpha$ ou $A_{\alpha'} + A_{\alpha''} + \cdots$ l'union, par $\prod_\alpha A_\alpha$ ou $A_{\alpha'} A_{\alpha''} \ldots$ l'intersection des ensembles d'un système arbitraire $(A_\alpha) = (A_{\alpha'}, A_{\alpha''}, \ldots)$ d'ensembles, et par $A' - A''$ la différence des ensembles A' et A'' (ne supposant pas que $A'' \leqq A'$).

Si f est une correspondance multivoque entre P et Q, la correspondance inverse f^{-1} entre Q et P est définie comme l'ensemble des paires (b, a) inverses aux paires $(a, b) \in f$. On aura

$$(f^{-1})^{-1} = f. \tag{1.1}$$

Soient f une correspondance entre P et Q, g une correspondance entre Q et R; la correspondance gf entre P et R sera définie par la condition que $(a, c) \in gf$ est équivalent à l'existence d'un élément $b \in Q$, tel que $(a, b) \in f$ et $(b, c) \in g$. Nous avons donc

$$(gf)^{-1} = f^{-1} g^{-1} \tag{1.2}$$

et, si h est une correspondance entre R et S,

$$h(gf) = (hg)f. \tag{1.3}$$

Soit f une correspondance entre P et Q. Si $A \leqq P$, nous désignons par fA l'ensemble des éléments $b \in Q$, pour lesquels il existe un élément $a \in A$ tel que $(a, b) \in f$. Nous avons donc les relations suivantes pour la correspondance f:

$$fO = O, \qquad fP = Q, \tag{1.4}$$

$$fA' \leqq fA'' \quad (A' \leqq A'' \leqq P), \tag{1.5}$$

$$A \leqq f^{-1} fA \quad (A \leqq P), \tag{1.6}$$

$$f \sum_{\alpha} A_{\alpha} = \sum_{\alpha} fA_{\alpha} \quad (A_{\alpha} \leqq P), \tag{1.7}$$

$$f \prod_{\alpha} A_{\alpha} \leqq \prod_{\alpha} fA_{\alpha} \quad (A_{\alpha} \leqq P) \tag{1.8}$$

et

$$f(A' - A'') \geqq fA' - fA'' \quad (A' \leqq P,\ A'' \leqq P) \tag{1.9}$$

et les relations analogues pour la correspondance inverse f^{-1}:

$$f^{-1} O = O, \qquad f^{-1} Q = P, \tag{1.10}$$

$$f^{-1} B' \leqq f^{-1} B'' \quad (B' \leqq B'' \leqq Q), \tag{1.11}$$

$$B \leqq ff^{-1} B \quad (B \leqq Q), \tag{1.12}$$

$$f^{-1} \sum_{\alpha} B_{\alpha} = \sum_{\alpha} f^{-1} B_{\alpha} \quad (B_{\alpha} \leqq Q), \tag{1.13}$$

$$f^{-1} \prod_{\alpha} B_{\alpha} \leqq \prod_{\alpha} f^{-1} B_{\alpha} \quad (B_{\alpha} \leqq Q) \tag{1.14}$$

et

$$f^{-1}(B' - B'') \geqq f^{-1} B' - f^{-1} B'' \quad (B' \leqq Q,\ B'' \leqq Q). \tag{1.15}$$

Signalons que la relation $(a, b) \in f$ est équivalente à $b \in f\{a\}$; ce fait nous sera utile pour les considérations de la section suivante.

2. Soit f une correspondance entre les ensembles non vides P et Q. Si $M \leqq P$, nous dirons que M est invariant relativement à f, si la condition suivante est remplie:

$$f^{-1} f M = M. \tag{2.1}$$

En vertu des relations (1.4) et (1.10), l'ensemble vide O et l'ensemble P sont invariants relativement à f.

Démontrons le théorème suivant:

(2.2). Soit (M_α) un système de sous-ensembles de P, tel que tout M_α est un ensemble invariant relativement à f; les ensembles $\sum_\alpha M_\alpha$ et $\prod_\alpha M_\alpha$ seront invariants relativement à f.

On aura d'après (1.13), (1.7), (1.14), (1.11) et (1.8):

$$f^{-1} f \sum_\alpha M_\alpha = \sum_\alpha f^{-1} f M_\alpha = \sum_\alpha M_\alpha$$

et

$$f^{-1} f \prod_\alpha M_\alpha \leqq \prod_\alpha f^{-1} f M_\alpha = \prod_\alpha M_\alpha$$

ou

$$f^{-1} f \prod_\alpha M_\alpha \leqq \prod_\alpha M_\alpha,$$

ce qui donne, d'après (1.6):

$$f^{-1} f \prod_\alpha M_\alpha = \prod_\alpha M_\alpha.$$

Démontrons ensuite le théorème:

(2.3). Soit $A \leqq P$; l'ensemble

$$M_A = A + f^{-1} f A + f^{-1} f f^{-1} f A + \cdots \tag{2.4}$$

(où les ensembles A, $f^{-1} f A$, $f^{-1} f f^{-1} f A, \ldots$ sont en nombre fini ou dénombrable) sera un ensemble invariant relativement à f, tel que $M_A \geqq A$; et si $A \leqq M \leqq P$, l'invariance de M relativement à f entraînera que $M_A \leqq M$.

L'ensemble M_A est donc l'ensemble invariant le plus petit, qui contient l'ensemble A. Pour prouver le théorème, nous remarquons que (1.7) et (1.13) nous donnent

$$f^{-1} f M_A = f^{-1} f A + f^{-1} f f^{-1} f A + \cdots;$$

d'après (1.6), nous avons $A \leqq f^{-1} f A$ et, par suite,

$$f^{-1} f M_A = A + f^{-1} f A + f^{-1} f f^{-1} f A + \cdots = M_A,$$

ce qui démontre l'invariance de M_A relativement à f. Soit maintenant M un sous-ensemble invariant de P, tel que $M \geqq A$; on aura:

$$M \geqq A,$$
$$M = f^{-1} f M \geqq f^{-1} f A,$$
$$M = f^{-1} f M \geqq f^{-1} f f^{-1} f A,$$

et ainsi de suite, donc

$$M \geqq A + f^{-1} f A + f^{-1} f f^{-1} f A + \cdots = M_A.$$

Le théorème est donc prouvé.

Considérons, en particulier, le cas où $A = \{a\}$; l'ensemble

$$M_{\{a\}} = \{a\} + f^{-1} f \{a\} + f^{-1} f f^{-1} f \{a\} + \cdots \qquad (2.5)$$

est l'ensemble invariant le plus petit, qui contient l'élément a.

Démontrons que $b \in M_{\{a\}}$ entraînera $a \in M_{\{b\}}$.

Si $b \in M_{\{a\}}$, on a, en vertu de (2.5), $b = a$ et, par suite, $a \in M_{\{b\}}$ ou, si $b \neq a$: $b \in g\{a\}$, la correspondance g étant de la forme

$$g = f^{-1} f \ldots f^{-1} f.$$

Utilisant la remarque à la fin de la section précédente, nous verrons que $b \in g\{a\}$ est équivalent à $(a, b) \in g$, ou à $(b, a) \in g^{-1}$, donc équivalent à $a \in g^{-1}\{b\}$; ceci nous donne d'après (1.2) et (1.1):

$$a \in g^{-1}\{b\} = (f^{-1} f \ldots f^{-1} f)^{-1}\{b\} = f^{-1} f \ldots f^{-1} f \{b\} \leqq M_{\{b\}},$$

donc $a \in M_{\{b\}}$.

Comme conséquence immédiate de la proposition démontrée, nous allons montrer que $b \in M_{\{a\}}$ entraînera $M_{\{a\}} = M_{\{b\}}$.

Les ensembles $M_{\{a\}}$ et $M_{\{b\}}$ sont invariants, et comme $b \in M_{\{a\}}$, nous avons en vertu du théorème (2.3): $M_{\{b\}} \leqq M_{\{a\}}$. Mais la relation $b \in M_{\{a\}}$ entraîne que $a \in M_{\{b\}}$; d'après le théorème (2.3), nous avons aussi $M_{\{a\}} \leqq M_{\{b\}}$, donnant $M_{\{a\}} = M_{\{b\}}$.

Nous pouvons maintenant établir la proposition suivante:

(2.6). Soient $a \in P$ et $b \in P$; on a donc $M_{\{a\}} M_{\{b\}} = O$ ou, si $M_{\{a\}} M_{\{b\}} \neq O$: $M_{\{a\}} = M_{\{b\}}$.

En effet, si $M_{\{a\}} M_{\{b\}} \neq O$, il existe un élément c dans P, tel que $c \in M_{\{a\}}$ et $c \in M_{\{b\}}$. On a donc $M_{\{c\}} = M_{\{a\}}$ et $M_{\{c\}} = M_{\{b\}}$, d'où $M_{\{a\}} = M_{\{b\}}$.

Le résultat obtenu peut s'exprimer par le théorème:

(2.7). La correspondance f détermine d'une façon univoque une division de l'ensemble P en ensembles disjoints de la forme $M_{\{a\}}$:

$$P = M_{\{a'\}} + M_{\{a''\}} + \cdots. \qquad (2.8)$$

Nous appellerons dans la suite les ensembles $M_{\{a'\}}$, $M_{\{a''\}}$, ... les classes déterminées par la correspondance f. En vertu des raisonnements précédents, nous voyons que, pour que les éléments a et b de P soient contenus dans une même classe, il faut et il suffit que $a = b$ ou, si $a \neq b$, que $b \in f^{-1} f \ldots f^{-1} f\{a\}$.

3. La structure des sous-ensembles de P, qui sont invariants relativement à la correspondance f, est mis en lumière par le théorème suivant:

(3. 1). Soit $M \leqq P$ et $M \neq O$; pour que M soit invariant relativement à la correspondance f, il faut et il suffit que M est l'union de certaines des classes déterminées par f.

La suffisance de cette condition est immédiate en vertu de (2. 2). Pour en montrer la nécessité, nous considérons l'ensemble invariant $M \neq O$. La relation (2. 8) nous donne:

$$M = MP = MM_{\{a'\}} + MM_{\{a''\}} + \cdots.$$

Comme $M \neq O$, l'un au moins des ensembles $MM_{\{a'\}}$, $MM_{\{a''\}}$, ... sera $\neq O$; désignons par $MM_{\{b'\}}$, $MM_{\{b''\}}$, ... les ensembles, qui remplissent cette condition; on a alors

$$M = MM_{\{b'\}} + MM_{\{b''\}} + \cdots,$$

où les ensembles $MM_{\{b'\}}$, $MM_{\{b''\}}$, ... sont disjoints. Considérons l'un quelconque de ces ensembles, par exemple $MM_{\{b'\}}$; cet ensemble étant $\neq O$, il existe un $b \in MM_{\{b'\}}$, d'où il suit que $b \in M$ et $b \in M_{\{b'\}}$, ce qui entraînera $M_{\{b\}} = M_{\{b'\}}$ en vertu du théorème (2. 6). M étant invariant, nous verrons par le théorème (2. 3) que $M_{\{b\}} \leqq M$, comme $b \in M$, ce qui donne $M_{\{b'\}} \leqq M$ ou $MM_{\{b'\}} = M_{\{b'\}}$.

Nous avons par conséquent

$$M = M_{\{b'\}} + M_{\{b''\}} + \cdots, \tag{3. 2}$$

notre théorème étant ainsi démontré.

Un corollaire de ce théorème est immédiat: Si M est un ensemble invariant, $P - M$ l'est aussi; car $P - M$ est l'union des classes, qui ne sont pas contenues dans M. Utilisant ce corollaire, nous obtenons comme supplément au théorème (2. 2) le théorème suivant:

(3. 3). Soient M' et M'' deux sous-ensembles de P invariants relativement à f; l'ensemble $M' - M''$ sera invariant relativement à f.

On a, en effet, $M' - M'' = M'(P - M'')$, où M' et $P - M''$ sont des ensembles invariants.

Cherchons maintenant la condition pour qu'un ensemble invariant soit une classe. Nous allons en prouver le théorème:

(3.4). Pour qu'un ensemble non vide M, invariant relativement à f, soit une classe, il faut et il suffit que pour tout ensemble M' invariant relativement à f, et tel que $M' \neq O$ et $M' \leqq M$, on a $M' = M$.

La condition est nécessaire. Soient, en effet, M une classe et M' un ensemble invariant tel que $M' \neq O$ et $M' \leqq M$. Comme $M' \neq O$, il existe un élément a tel que $a \in M'$ et, par suite, $a \in M$. M étant une classe, on a, en vertu du théorème (2.7), $M = M_{\{a\}}$ et, M' étant invariant, $M_{\{a\}} \leqq M'$ en vertu de (2.3), comme $a \in M'$. On a ainsi $M \leqq M'$ et $M' \leqq M$ et par conséquent $M' = M$.

La condition est suffisante. En effet, si M n'est pas une classe, on aura par (3.2):

$$M \geqq M_{\{b'\}} + M_{\{b''\}},$$

où $M_{\{b'\}}$ et $M_{\{b''\}}$ sont des classes disjointes, donc $M_{\{b'\}} \neq O$ et $M_{\{b''\}} \neq O$. Posons $M' = M_{\{b'\}}$; l'ensemble M' est invariant et $M' \neq O$, $M' \leqq M$, mais $M' \neq M$, ce qui montre que la condition considérée n'est pas remplie.

4. Étudions les relations entre les sous-ensembles des ensembles P et Q, qui sont déterminées par la correspondance f entre P et Q. Nous démontrons d'abord le théorème:

(4.1). Soit M un sous-ensemble de P, qui est invariant relativement à f; l'ensemble $N = fM$ est donc un sous-ensemble de Q invariant relativement à la correspondance f^{-1}, et on a

$$M = f^{-1} N. \tag{4.2}$$

L'ensemble M étant invariant relativement à f, nous avons d'après (2.1) $M = f^{-1} f M$ ou $M = f^{-1} N$. De cette relation nous déduirons $fM = ff^{-1} N$ ou $ff^{-1} N = N$, ce qui montre que N est un ensemble invariant relativement à f^{-1}.

D'une manière tout à fait analogue nous verrons que si N est un sous-ensemble de Q, invariant relativement à f^{-1}, et $M = f^{-1} N$, M est un sous-ensemble de P invariant relativement à f, et on a $N = fM$.

Soit maintenant

$$P = M' + M'' + \cdots \tag{4.3}$$

la division donnée par (2.8) de P en classes disjointes, et posons

$$N' = fM', \quad N'' = fM'', \ldots; \tag{4.4}$$

nous avons donc

$$Q = fP = fM' + fM'' + \cdots = N' + N'' + \cdots, \tag{4.5}$$

où les ensembles non vides $N', N'', \ldots$ sont invariants relativement à f^{-1}, en vertu du théorème (4.1). Ces ensembles sont disjoints, car si par exemple $N' N'' \neq O$, on aurait d'après (1.14): $O \neq f^{-1}(N' N'') \leqq f^{-1} N' . f^{-1} N'' = M' M''$ ou $M' M'' \neq O$, ce qui est incompatible avec $M' M'' = O$. Nous pouvons enfin montrer que les ensembles $N', N'', \ldots$ sont les classes dans la division de l'ensemble Q, déterminée par f^{-1}. Considérons, par exemple, l'ensemble N' non vide, et soit B un sous-ensemble non vide de N', qui est invariant relativement à f^{-1}. Posons $A = f^{-1} B$; l'ensemble A est donc un sous-ensemble non vide de $f^{-1} N' = M'$, et A est invariant relativement à f. D'après (3.4) on a donc $A = M'$, M' étant une classe dans la division de P déterminée par f; par suite $fA = fM'$ ou $B = N'$, comme $B = fA$. Par conséquent on voit que N' est une classe dans la division de Q déterminée par f^{-1}, appliquant l'analogue du théorème (3.4).

Les derniers resultats obtenus s'expriment par le théorème:

(4.6). Soit

$$P = M' + M'' + \cdots$$

la division de P en classes disjointes, déterminée par la correspondance f entre P et Q, et soient

$$N' = fM', \quad N'' = fM'', \ldots;$$

$$Q = N' + N'' + \cdots$$

est donc la division de Q en classes disjointes, déterminée par la correspondance inverse f^{-1}, et on a

$$M' = f^{-1} N', \quad M'' = f^{-1} N'', \ldots.$$