SUR LA RESOLUTION D'UN PROBLEME DE LA THEORIE DES CORRESPONDANCES MULTIVOQUES ABSTRAITES.

Par

W. SIMONSEN

à COPENHAGUE.

1. Le but de l'ouvrage présent est l'étude et la résolution du problème suivant: Étant donnés trois ensembles abstraits, non vides, P, Q et R, une correspondance f entre P et Q, et une correspondance g entre P et R; on cherche des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une correspondance h entre Q et R telle que l'égalité $hf = g$ soit remplie, et pour l'unicité d'une telle correspondance h.

Dans un ouvrage précédent[1], nous avons résolu ce problème dans le cas particulier où f est une correspondance univoque; ce cas et le cas où g est univoque seront traités dans la section 5 ci-dessous.

Résumons, préalablement, quelques définitions et notions de la théorie des correspondances multivoques partielles et des correspondances multivoques (propres)[2].

P et Q étant des ensembles arbitraires, non vides, nous définirons une *correspondance* (*multivoque*) *partielle* f entre P et Q comme un ensemble (vide ou non vide) des paires ordonnées (x, y) telles que $x \in P$ et $y \in Q$. Dans le cas, où tout $x \in P$ est l'élément premier dans une paire au moins et tout $y \in Q$ est contenu comme deuxième élément dans une paire au moins — et dans ce cas seulement — nous dirons que f est une *correspondance* (*multivoque*) *propre* ou, plus court, une *correspondance* entre P et Q; toute correspondance est donc, *a fortiori*, une correspondance partielle.

Si f est une correspondance partielle entre P et Q, la correspondance partielle inverse f^{-1} entre Q et P sera définie comme l'ensemble des paires (y, x) inverses aux

---

[1] Acta mathematica, 84 (1950), pp. 225–229, cité dans la suite comme II.

[2] *Voir*, aussi, notre ouvrage dans Acta mathematica, 81 (1949), pp. 291–297, auquel nous renverrons pour la définition et les propriétés des notions d'ensemble invariant relativement à une correspondance f et de classe, déterminée par f. Cet ouvrage sera cité dans la suite comme I.

paires $(x, y) \in f$; on aura donc $(f^{-1})^{-1} = f$, et les relations $(x, y) \in f$ et $(y, x) \in f^{-1}$ sont équivalentes.

Soient f une correspondance partielle entre P et Q, et A un sous-ensemble arbitraire de P. Nous désignerons par fA l'ensemble des éléments $y \in Q$, pour lesquels il existe un $x \in A$, tel que $(x, y) \in f$; en particulier, pour tout $x \in P$, $f\{x\}$ sera l'ensemble des éléments $y \in Q$, pour lesquels $(x, y) \in f$.

Par une *correspondance univoque* f entre P et Q nous entendrons une correspondance telle que, pour tout $x \in P$, $f\{x\}$ ne contient qu'un seul élément (désigné habituellement par $f(x)$).

Nous pouvons maintenant démontrer quelques théorèmes sur des correspondances partielles.

(1.1). Si f est une correspondance partielle entre P et Q, les relations $(x, y) \in f$, $y \in f\{x\}$ et $x \in f^{-1}\{y\}$ sont équivalentes.

Cela est immédiat en vertu de la définition de l'ensemble $f\{x\}$.

(1.2). Si (f_α) est un système arbitraire des correspondances partielles f_α entre P et Q, l'union $f = \sum_\alpha f_\alpha$ sera une correspondance partielle entre P et Q, et on aura pour tout $x \in P$:

$$f\{x\} = \sum_\alpha f_\alpha\{x\} . \tag{1.3}$$

En effet, si $y \in f\{x\}$, on aura $(x, y) \in f$ et, par conséquent, $(x, y) \in f_\alpha$ pour un α au moins, donc $y \in f_\alpha\{x\}$ et $y \in \sum_\alpha f_\alpha\{x\}$, d'où il suit que $f\{x\} \subseteq \sum_\alpha f_\alpha\{x\}$. Réciproquement, si $y \in \sum_\alpha f_\alpha\{x\}$, on aura pour un α convenable: $y \in f_\alpha\{x\}$, donc $(x, y) \in f_\alpha \subseteq f$ ou $y \in f\{x\}$ et, par conséquent, $\sum_\alpha f_\alpha\{x\} \subseteq f\{x\}$.

(1.4). Si (f_α) est un système arbitraire des correspondances partielles f_α entre P et Q, l'intersection $f = \prod_\alpha f_\alpha$ sera une correspondance partielle entre P et Q, et on aura pour tout $x \in P$:

$$f\{x\} = \prod_\alpha f_\alpha\{x\} . \tag{1.5}$$

La relation $y \in f\{x\}$ donnant $(x, y) \in f$ et, par suite, $(x, y) \in f_\alpha$ pour tout α ou $y \in f_\alpha\{x\}$, on obtient $y \in \prod_\alpha f_\alpha\{x\}$, ce qui montre que $f\{x\} \subseteq \prod_\alpha f_\alpha\{x\}$. D'autre part, si $y \in \prod_\alpha f_\alpha\{x\}$, on aura pour tout α: $y \in f_\alpha\{x\}$ et $(x, y) \in f_\alpha$, d'où il suit que $(x, y) \in \prod_\alpha f_\alpha = f$ ou $y \in f\{x\}$; il s'ensuit que $\prod_\alpha f_\alpha\{x\} \subseteq f\{x\}$.

(1.6). Si f' et f'' sont des correspondances partielles arbitraires entre P et Q, la différence $f = f'' - f'$ sera une correspondance partielle entre P et Q, et on aura pour tout $x \in P$:

$$f\{x\} = f''\{x\} - f'\{x\} . \tag{1.7}$$

En effet, lorsque $y \in f\{x\}$, on aura $(x, y) \in f$ et, par suite, $(x, y) \in f''$ ou $y \in f''\{x\}$, et $(x, y) \notin f'$ ou $y \notin f'\{x\}$, d'où il suit que $y \in f''\{x\} - f'\{x\}$, donc $f\{x\} \subseteq f''\{x\} - f'\{x\}$. Réciproquement, $y \in f''\{x\} - f'\{x\}$ impliquera que $y \in f''\{x\}$ ou $(x, y) \in f''$, et $y \notin f'\{x\}$ ou $(x, y) \notin f'$, donc $(x, y) \in f'' - f' = f$ ou $y \in f\{x\}$; on en conclut que $f''\{x\} - f'\{x\} \subseteq f\{x\}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une correspondance partielle soit une correspondance (propre) est fournie par le théorème suivant:

(1.8). Pour qu'une correspondance partielle f entre P et Q soit une correspondance, il faut et il suffit que $f\{x\} \supset O$ pour tout $x \in P$ et que, pour tout $y \in Q$, il existe un $x \in P$ tel qu'on ait $y \in f\{x\}$.

La vérité de ce théorème résulte immédiatement de la définition des ensembles de la forme $f\{x\}$ et de la définition d'une correspondance (propre) entre P et Q.

Déduisons ensuite quelques théorèmes sur des correspondances, constituant un supplément aux théorèmes de la section 1 de I.

(1.9). Si f et g sont des correspondances entre P et Q, la relation $f \subseteq g$ entraînera que $f^{-1} \subseteq g^{-1}$.

En effet, $(y, x) \in f^{-1}$ impliquera $(x, y) \in f$, donc $(x, y) \in g$ et $(y, x) \in g^{-1}$.

(1.10). Soient f' et f'' des correspondances entre P et Q, g' et g'' des correspondances entre Q et R, et soient $f' \subseteq f''$ et $g' \subseteq g''$; on aura donc $g'f' \subseteq g''f''$.

Lorsque $(x, z) \in g'f'$, il existe un $y \in Q$ tel que $(x, y) \in f'$ et $(y, z) \in g'$, d'où il suit que $(x, y) \in f''$ et $(y, z) \in g''$ et, par suite, $(x, z) \in g''f''$.

Nous pouvons montrer que les ensembles de la forme $f\{x\}$, où f est une correspondance entre P et Q, caractérisent la correspondance f; on peut, en effet, prouver le théorème suivant:

(1.11). Soient f' et f'' des correspondances entre P et Q; la relation $f' \subseteq f''$ sera équivalente à la condition que $f'\{x\} \subseteq f''\{x\}$ pour tout $x \in P$. Par conséquent, l'égalité $f' = f''$ revient au même que $f'\{x\} = f''\{x\}$ pour tout $x \in P$.

Si $f' \subseteq f''$, $y \in f'\{x\}$ implique $(x, y) \in f'$, donc $(x, y) \in f''$ et $y \in f''\{x\}$; on a alors $f'\{x\} \subseteq f''\{x\}$. D'autre part, si pour tout $x \in P$ cette condition est remplie, nous aurons pour toute $(x, y) \in f'$: $y \in f'\{x\}$, donc $y \in f''\{x\}$ ou $(x, y) \in f''$, d'où résulte que $f' \subseteq f''$. Le reste du théorème est immédiat, l'égalité $f' = f''$ étant équivalente aux deux relations simultanées $f' \subseteq f''$ et $f'' \subseteq f'$.

(1.12). Pour que la correspondance f entre P et Q soit univoque, il faut et il suffit qu'on ait $ff^{-1}\{y\} = \{y\}$ pour tout $y \in Q$.

Lorsque f est une correspondance univoque, on aura pour tout $y \in Q$: $\{y\} \subseteq ff^{-1}\{y\}$, et pour tout $y^* \in ff^{-1}\{y\}$ il existe un $x^* \in f^{-1}\{y\}$ tel que $y^* \in f\{x^*\}$; on a alors $y \in f\{x^*\}$ et, par conséquent, $y^* = y$, l'ensemble $f\{x^*\}$ ne contenant qu'un seul élément. De là résulte que $ff^{-1}\{y\} \subseteq \{y\}$, donc $ff^{-1}\{y\} = \{y\}$.

Inversement, si $ff^{-1}\{y\} = \{y\}$ pour tout $y \in Q$, il existe pour tout $x \in P$ un $y \in Q$ tel que $y \in f\{x\}$; on aura donc $x \in f^{-1}\{y\}$ et, par suite, $f\{x\} \subseteq ff^{-1}\{y\} = \{y\}$, ce qui montre que $f\{x\}$ ne contient qu'un seul élément, d'où il suit que f doit être une correspondance univoque.

(1.13). Soient f une correspondance entre P et Q, e la correspondance identique entre Q et Q (c.-à-d. $e\{y\} = \{y\}$ pour tout $y \in Q$) et k une correspondance entre Q et P telle que $fk = e$; alors f sera une correspondance univoque, et on aura $k = f^{-1}$.

De la relation $fk = e$ on tire $f^{-1}fk = f^{-1}e = f^{-1}$ et $fkk^{-1} = ek^{-1} = k^{-1}$. Pour tout $y \in Q$ on aura donc $f^{-1}\{y\} = f^{-1}fk\{y\} \supseteq k\{y\}$, d'où il vient $f^{-1} \supseteq k$, en appliquant (1.11); de même, pour tout $x \in P$ on aura $k^{-1}\{x\} = fkk^{-1}\{x\} \supseteq f\{x\}$, donnant $k^{-1} \supseteq f$ en vertu de (1.11), donc $k \supseteq f^{-1}$ d'après (1.9). Il s'ensuit que $k = f^{-1}$. Comme $fk = e$, nous obtenons $ff^{-1} = e$; à l'aide de (1.12) nous verrons alors que f doit être une correspondance univoque.

(1.14). Soient (f_α) un système des correspondances f_α entre P et Q, et $f = \sum_\alpha f_\alpha$; alors f sera une correspondance entre P et Q, et on aura pour tout $x \in P$:

$$f\{x\} = \sum_\alpha f_\alpha\{x\}\,. \tag{1.15}$$

Toute f_α étant une correspondance partielle entre P et Q, il résulte de (1.2) que f est elle-même une correspondance partielle entre P et Q et que (1.15) est valable. Pour tout $x \in P$, nous aurons, d'après (1.8), $f_\alpha\{x\} \supset O$ pour un α quelconque, donc $f\{x\} \supset O$; et si $y \in Q$, il existe pour un α arbitrairement choisi un $x \in P$ tel que $y \in f_\alpha\{x\}$, d'où il suit que $y \in f\{x\}$. La condition (1.8) étant ainsi remplie par f, il s'ensuit que f est une correspondance.

(1.16). Soient (f_α) un système des correspondances f_α entre P et Q, et $f = \prod_\alpha f_\alpha$; pour que f soit une correspondance entre P et Q, il faut et il suffit que $\prod_\alpha f_\alpha\{x\} \supset O$ pour tout $x \in P$ et que, pour tout $y \in Q$, il existe un $x \in P$ tel que $y \in \prod_\alpha f_\alpha\{x\}$; on aura alors pour tout $x \in P$:

$$f\{x\} = \prod_\alpha f_\alpha\{x\}\,. \tag{1.17}$$

De (1.4) il suit que f est une correspondance partielle entre P et Q et que (1.17) est remplie. Le reste du théorème se démontre à l'aide de (1.8).

(1.18). Soient f' et f'' des correspondances entre P et Q, et $f = f'' - f'$; pour que f soit une correspondance entre P et Q, il faut et il suffit que $f''\{x\} - f'\{x\} \supset O$ pour tout $x \in P$ et que, pour tout $y \in Q$, il existe un $x \in P$ tel que $y \in f''\{x\}$ et $y \notin f'\{x\}$; on aura alors pour tout $x \in P$:

$$f\{x\} = f''\{x\} - f'\{x\} . \tag{1.19}$$

La démonstration du théorème est tout à fait analogue à la démonstration du (1.16); on employera (1.6) et (1.8).

2. Nous nous occuperons maintenant du problème énoncé au début de la section 1. Soient P, Q et R des ensembles, non vides, f une correspondance entre P et Q et g une correspondance entre P et R; nous chercherons des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une correspondance h entre Q et R telle que

$$hf = g; \tag{2.1}$$

toute correspondance h satisfaisante à (2.1) sera désormais appellée, pour abréger, une *correspondance admissible*.

Supposons, d'abord, l'existence d'une correspondance admissible h. De (2.1) et (1.11) résulte, que pour tout $x \in P$ on doit avoir $hf\{x\} = g\{x\}$, et comme $f\{x\} = \sum_{y \in f\{x\}} \{y\}$, on aura $hf\{x\} = h \sum_{y \in f\{x\}} \{y\} = \sum_{y \in f\{x\}} h\{y\}$, donc

$$g\{x\} = \sum_{y \in f\{x\}} h\{y\} . \tag{2.2}$$

Si $y \in Q$, on aura pour tout $x^* \in f^{-1}\{y\}$ d'après (1.1): $y \in f\{x^*\}$, d'òu il suit que $h\{y\} \subseteq hf\{x^*\} = g\{x^*\}$; par conséquent, on aura:

$$h\{y\} \subseteq \prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\} \qquad (y \in Q) . \tag{2.3}$$

De (2.3) et de la relation $h\{y\} \supset O$, qu'on obtient à l'aide de (1.8), il résulte que la condition

$$\prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\} \supset O \qquad (y \in Q) \tag{2.4}$$

doit être remplie.

En employant (2.2) et (2.3), nous deduirons encore la condition

$$g\{x\} \subseteq \sum_{y \in f\{x\}} \prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\} \qquad (x \in P) . \tag{2.5}$$

Or, si $x \in P$ et $y \in f\{x\}$, on aura d'après (1.1): $x \in f^{-1}\{y\}$, d'où il suit que $\prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\} \subseteq g\{x\}$; on a donc aussi $\sum_{y \in f\{x\}} \prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\} \subseteq g\{x\}$ et, en vertu de (2.5):

$$g\{x\} = \sum_{y \in f\{x\}} \prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\} \qquad (x \in P) . \tag{2.6}$$

Nous avons ainsi démontré que (2.4) et (2.6) sont des conditions nécessaires pour l'existence d'une correspondance admissible. D'autre part, les conditions (2.4) et (2.6) sont suffisantes pour l'existence d'une telle correspondance.

Supposons, en effet, ces conditions remplies, et posons

$$\bar{h}\{y\} = \prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\} \qquad (y \in Q) . \tag{2.7}$$

De (2.4) résulte que $\bar{h}\{y\} \supset O$ pour tout $y \in Q$; de plus, nous aurons en vertu de (2.6):

$$g\{x\} = \sum_{y \in f\{x\}} \bar{h}\{y\} \qquad (x \in P) . \tag{2.8}$$

g étant une correspondance entre P et R, nous verrons à l'aide de (1.8) que, pour tout $z \in R$, il existe un $x \in P$ tel que $z \in g\{x\}$; de (2.8) résulte alors qu'il existe un $y \in f\{x\}$ tel que $z \in \bar{h}\{y\}$. On en conclut que l'ensemble $\bar{h}$ des paires ordonnées (y, z), où $y \in Q$ et $z \in \bar{h}\{y\}$, est une correspondance entre Q et R, en appliquant (1.8); de plus, nous pouvons montrer que $\bar{h}$ est une correspondance admissible. En effet, nous obtenons par (2.8): $g\{x\} = \sum_{y \in f\{x\}} \bar{h}\{y\} = \bar{h} \sum_{y \in f\{x\}} \{y\} = \bar{h}f\{x\}$, donc $\bar{h}f = g$ en vertu de (1.11), (2.1) étant ainsi remplie par $\bar{h}$.

En outre, si h est une correspondance admissible quelconque, on aura en vertu de (2.3) et (2.7):

$$h\{y\} \subseteq \bar{h}\{y\} \qquad (y \in Q) , \tag{2.9}$$

d'òu il suit, en appliquant (1.11), que

$$h \subseteq \bar{h} . \tag{2.10}$$

En résumé, nous avons établi le théorème suivant:

(2.11). Pour qu'il existe une correspondance admissible, il faut et il suffit que

$$\prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\} \supset O \text{ pour tout } y \in Q, \tag{2.12}$$

et que

$$g\{x\} = \sum_{y \in f\{x\}} \prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\} \text{ pour tout } x \in P; \tag{2.13}$$

lorsque ces deux conditions sont satisfaites, la correspondance $\bar{h}$, donnée par

$$\bar{h}\{y\} = \prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\} \qquad (y \in Q)\,, \tag{2.14}$$

sera une correspondance admissible, et on aura pour toute correspondance admissible h:

$$h \subseteqq \bar{h}\,. \tag{2.15}$$

Quant au problème de l'unicité d'une correspondance admissible, nous le traiterons dans la section 3 ci-dessous. En général, s'il existe une correspondance admissible, il en existe plusieurs, comme on verra par un exemple simple dans la section 6.

Supposant maintenant dans le reste de la section présente, à l'exception de (2.24) et (2.25), qu'il existe une correspondance admissible, (2.11) étant ainsi remplie, nous nous proposerons de chercher des conditions pour qu'une correspondance h entre Q et R soit une correspondance admissible. Nous allons en montrer le théorème:

(2.16). Soit h une correspondance entre Q et R; pour que h soit une correspondance admissible, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies:

a) pour tout $y \in Q$ on ait

$$h\{y\} \subseteqq \bar{h}\{y\}\,; \tag{2.17}$$

b) pour tout $x \in P$ il existe pour un $z \in g\{x\}$ quelconque un $y \in f\{x\}$ tel que $z \in h\{y\}$.

Si h est une correspondance admissible, il suit de (2.11), que la condition a) est satisfaite; de plus, si $x \in P$ et $z \in g\{x\}$, il résulte de (2.2) qu'il existe un $y \in f\{x\}$ tel que $z \in h\{y\}$, la condition b) étant ainsi remplie.

D'autre part, les deux conditions a) et b) seront suffisantes pour que h soit une correspondance admissible. On aura, en effet, pour tout $x \in P$, en appliquant (2.17):

$$hf\{x\} = \sum_{y \in f\{x\}} h\{y\} \subseteqq \sum_{y \in f\{x\}} \bar{h}\{y\} = \bar{h}f\{x\} = g\{x\}\,,$$

donc $hf\{x\} \subseteqq g\{x\}$; de plus, pour un $z \in g\{x\}$ arbitraire il existe un $y \in f\{x\}$ tel que $z \in h\{y\} \subseteqq hf\{x\}$, d'où il suit que $g\{x\} \subseteqq hf\{x\}$. Il résulte que $hf\{x\} = g\{x\}$ pour tout $x \in P$; appliquant (1.11), nous verrons que $hf = g$, h étant ainsi une correspondance admissible.

La dernière condition b) de (2.16) peut être transformée un peu. En effet, si h est une correspondance admissible et $z \in R$, on aura pour un $x \in g^{-1}\{z\}$ arbitraire: $z \in g\{x\}$ en vertu de (1.1); à l'aide de (2.16, b)) nous verrons qu'il existe un $y \in f\{x\}$ tel que $z \in h\{y\}$. Inversement, si h est une correspondance entre Q et R, remplissant (2.16, a)) et la condition que, pour tout $z \in R$ et tout $x \in g^{-1}\{z\}$, il existe un $y \in f\{x\}$ tel que $z \in h\{y\}$, la condition (2.16, b)) sera remplie aussi; car si $x \in P$ et $z \in g\{x\}$, on aura par (1.1): $x \in g^{-1}\{z\}$, d'où il suit qu'il existe un $y \in f\{x\}$ tel que $z \in h\{y\}$. Nous avons donc établi le théorème:

(2.18). Soit h une correspondance entre Q et R; pour que h soit une correspondance admissible, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies:

a) pour tout $y \in Q$ on ait

$$h\{y\} \subseteqq \bar{h}\{y\}\,; \tag{2.19}$$

b) pour tout $z \in R$ il existe pour un $x \in g^{-1}\{z\}$ quelconque un $y \in f\{x\}$ tel que $z \in h\{y\}$.

Considérons en particulier la correspondance admissible maximale $\bar{h}$. Nous pouvons démontrer le théorème:

(2.20). Pour que $(y, z) \in \bar{h}$, il faut et il suffit qu'on ait

$$f^{-1}\{y\} \subseteqq g^{-1}\{z\}\,. \tag{2.21}$$

En effet, si $(y, z) \in \bar{h}$, on aura d'après (1.1): $z \in \bar{h}\{y\}$; appliquant (2.14), on verra que, pour tout $x^* \in f^{-1}\{y\}$, $z \in g\{x^*\}$ et, par suite, $x^* \in g^{-1}\{z\}$, d'où il résulte que $f^{-1}\{y\} \subseteqq g^{-1}\{z\}$. Réciproquement, si (2.21) est remplie, nous aurons pour tout $x^* \in f^{-1}\{y\}$: $x^* \in g^{-1}\{z\}$, donc $z \in g\{x^*\}$, d'où il suit que $z \in \bar{h}\{y\}$ en vertu de (2.14); on a alors $(y, z) \in \bar{h}$.

Nous pouvons encore montrer que

$$\bar{h} \subseteqq gf^{-1}\,. \tag{2.22}$$

En effet, comme $f^{-1}\{y\} = \sum_{x^* \in f^{-1}\{y\}} \{x^*\}$ pour tout $y \in Q$, on obtient

$$gf^{-1}\{y\} = \sum_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\} \qquad (y \in Q)\,; \tag{2.23}$$

en comparant cette relation avec (2.14), on verra que $\bar{h}\{y\} \subseteqq gf^{-1}\{y\}$ pour tout $y \in Q$; il en résulte à l'aide de (1.1) que $\bar{h} \subseteqq gf^{-1}$.

Nous pouvons aussi déduire (2.22) en remarquant que (2.1) impliquera $gf^{-1} = \bar{h}ff^{-1} \supseteqq \bar{h}$, comme $ff^{-1}\{y\} \supseteqq \{y\}$ pour tout $y \in Q$.

Déduisons maintenant à l'aide de (2.11) deux conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une correspondance admissible, en nous appuyant au théorème (2.20).

(2.24). Pour qu'il existe une correspondance admissible, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies:

a) pour tout $y \in Q$ il existe un $z \in R$ tel que $f^{-1}\{y\} \subseteq g^{-1}\{z\}$;

b) pour tout $x \in P$ et tout $z \in g\{x\}$ il existe un $y \in f\{x\}$ tel que $f^{-1}\{y\} \subseteq g^{-1}\{z\}$.

La nécessité de cette condition est immédiate en remarquant, que (2.11) entraînera l'existence de $\overline{h}$ et les relations $\overline{h}\{y\} \supset O$ pour tout $y \in Q$ et $g\{x\} = \sum_{y \in f\{x\}} \overline{h}\{y\}$ pour tout $x \in P$, et employant (2.20).

Inversement, la condition est suffisante. En effet, il suit de a) que, pour tout $y \in Q$, il existe un $z \in R$ tel que $f^{-1}\{y\} \subseteq g^{-1}\{z\}$; pour tout $x^* \in f^{-1}\{y\}$ on aura alors $x^* \in g^{-1}\{z\}$ ou $z \in g\{x^*\}$, donc $z \in \prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\}$ et, par suite, $\prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\} \supset O$, (2.12) étant ainsi remplie. De plus, pour tout $x \in P$ et tout $z \in g\{x\}$, il existe, d'après b), un $y \in f\{x\}$ tel que $f^{-1}\{y\} \subseteq g^{-1}\{z\}$; on verra donc, en procédant comme plus haut, que $z \in \prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\}$, d'où il suit que $z \in \sum_{y \in f\{x\}} \prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\}$; par conséquent, on aura $g\{x\} \subseteq \sum_{y \in f\{x\}} \prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\}$. Or, pour tout $y \in f\{x\}$ on a $x \in f^{-1}\{y\}$ et par suite $\prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\} \subseteq g\{x\}$, d'où on conclut que $\sum_{y \in f\{x\}} \prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\} \subseteq g\{x\}$. De là résulte que $g\{x\} = \sum_{y \in f\{x\}} \prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\}$, (2.13) étant ainsi satisfaite.

La condition (2.24) peut être transformée en la condition

(2.25). Pour qu'il existe une correspondance admissible, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies:

a) pour tout $y \in Q$ il existe un $z \in R$ tel que $f^{-1}\{y\} \subseteq g^{-1}\{z\}$;

b) pour tout $z \in R$ et tout $x \in g^{-1}\{z\}$ il existe un $y \in f\{x\}$ tel que $f^{-1}\{y\} \subseteq g^{-1}\{z\}$.

En effet, si (2.24, b)) est satisfaite, $z \in R$ et $x \in g^{-1}\{z\}$ impliquent $z \in g\{x\}$ et l'existence d'un $y \in f\{x\}$ tel que $f^{-1}\{y\} \subseteq g^{-1}\{z\}$. D'autre part, si (2.25, b)) est remplie, $x \in P$ et $z \in g\{x\}$ impliquent $x \in g^{-1}\{z\}$ et l'existence d'un $y \in f\{x\}$ tel que $f^{-1}\{y\} \subseteq g^{-1}\{z\}$.

Démontrons, enfin, quelques théorèmes sur des unions, des intersections et des différences des correspondances admissibles.

(2.26). Soient (h_α) un système des correspondances h_α admissibles, et $h = \sum_\alpha h_\alpha$; h sera donc une correspondance admissible.

En vertu de (1.14), h sera une correspondance entre Q et R. Si $y \in Q$, on aura pour un α quelconque: $h_\alpha\{y\} \subseteq \bar{h}\{y\}$ d'après (2.19); de (1.15) résulte que $h\{y\} \subseteq \bar{h}\{y\}$, (2.19) étant ainsi remplie par h. De plus, si $z \in R$, il existe en vertu de (2.18, b)) pour un α arbitrairement choisi et pour tout $x \in g^{-1}\{z\}$ un $y \in f\{x\}$, tel que $z \in h_\alpha\{y\}$ et, par conséquent, $z \in h\{y\}$, ce qui montre que h remplit (2.18,b)). De là résulte que h est une correspondance admissible.

(2.27). Soient (h_α) un système des correspondances h_α admissibles, et $h = \prod_\alpha h_\alpha$; pour que h soit une correspondance admissible, il faut et il suffit que $\prod_\alpha h_\alpha\{y\} \supset O$ pour tout $y \in Q$ et que, pour tout $z \in R$ et tout $x \in g^{-1}\{z\}$, il existe un $y \in f\{x\}$ tel que $z \in h_\alpha\{y\}$ pour tout α.

La condition énoncée est nécessaire. En effet, si h est une correspondance admissible, on verra par (1.16) que $\prod_\alpha h_\alpha\{y\} \supset O$ pour tout $y \in Q$; de plus, si $z \in R$, il existe en vertu de (2.18, b)) pour tout $x \in g^{-1}\{z\}$ un $y \in f\{x\}$ tel que $z \in h\{y\}$, d'où il résulte à l'aide de (1.17) que $z \in h_\alpha\{y\}$ pour tout α.

D'autre part, si la condition est remplie, il existe pour tout $z \in R$ et tout $x \in g^{-1}\{z\}$ un $y \in f\{x\}$ tel que $z \in h_\alpha\{y\}$ pour tout α, d'où il suit d'après (1.5) que $z \in h\{y\}$; en appliquant (1.16), nous verrons que h doit être une correspondance entre Q et R, satisfaisante à (2.18, b)). De plus, si $y \in Q$, nous aurons d'après (2.19) pour tout α: $h_\alpha\{y\} \subseteq \bar{h}\{y\}$; par suite nous verrons, en employant la relation $h\{y\} = \prod_\alpha h_\alpha\{y\}$, résultant de (1.17), que $h\{y\} \subseteq \bar{h}\{y\}$, la condition (2.19) étant ainsi remplie par h, d'où il suit que h est une correspondance admissible.

(2.28). Soient h' et h'' des correspondances admissibles, et $h = h'' - h'$; pour que h soit une correspondance admissible, il faut et il suffit que $h''\{y\} - h'\{y\} \supset O$ pour tout $y \in Q$ et que, pour tout $z \in R$ et tout $x \in g^{-1}\{z\}$, il existe un $y \in f\{x\}$ tel que $z \in h''\{y\}$ et $z \notin h'\{y\}$.

La condition est nécessaire. Si h est une correspondance admissible, il résulte de (1.18) que $h''\{y\} - h'\{y\} \supset O$ pour tout $y \in Q$, et si $z \in R$, (2.18, b)) montre que, pour tout $x \in g^{-1}\{z\}$, il existe un $y \in f\{x\}$ tel que $z \in h\{y\}$, d'où il suit à l'aide de (1.19) que $z \in h''\{y\}$ et $z \notin h'\{y\}$.

Inversement, la condition étant satisfaite, il existe pour tout $z \in R$ et tout $x \in g^{-1}\{z\}$ un $y \in f\{x\}$ tel que $z \in h''\{y\}$ et $z \notin h'\{y\}$, d'où il suit d'après (1.7) que $z \in h\{y\}$; au moyen de (1.18), on verra donc que h est une correspondance entre Q et R, qui remplit (2.18, b)). Si $y \in Q$, on aura à l'aide de (2.19): $h''\{y\} \subseteq \bar{h}\{y\}$, et comme $h\{y\} = h''\{y\} - h'\{y\}$ en vertu de (1.19), on obtient $h\{y\} \subseteq \bar{h}\{y\}$, ce qui montre que h remplit la condition (2.19), d'où il résulte que h est une correspondance admissible.

Le théorème (2.28) peut être modifié en remplaçant la correspondance admissible h' par une correspondance *partielle* entre Q et R. Nous pouvons, en effet, établir le théorème suivant, dont nous ferons usage dans la section suivante:

(2.29). Soient h'' une correspondance admissible, h' une correspondance partielle entre Q et R, et $h = h'' - h'$; pour que h soit une correspondance admissible, il faut et il suffit que $h''\{y\} - h'\{y\} \supset O$ pour tout $y \in Q$ et que, pour tout $z \in R$ et tout $x \in g^{-1}\{z\}$, il existe un $y \in f\{x\}$ tel que $z \in h''\{y\}$ et $z \notin h'\{y\}$.

Montrons, d'abord, la nécessité de cette condition. Si h est une correspondance admissible, on aura d'après (1.8) et (1.7): $h''\{y\} - h'\{y\} \supset O$ pour tout $y \in Q$; de plus, si $z \in R$, il résulte de (2.18, b)) que, pour tout $x \in g^{-1}\{z\}$, il existe un $y \in f\{x\}$ tel que $z \in h\{y\}$; considérant (1.7), nous verrons que $z \in h''\{y\}$ et $z \notin h'\{y\}$.

D'autre part, si la condition est remplie, (1.7) montre que $h\{y\} \supset O$ pour tout $y \in Q$; de plus, il existe pour tout $z \in R$ et tout $x \in g^{-1}\{z\}$ un $y \in f\{x\}$ tel que $z \in h''\{y\}$ et $z \notin h'\{y\}$; en employant (1.7), nous verrons que $z \in h\{y\}$. Il résulte donc de (1.8) que h sera une correspondance entre Q et R, qui remplit (2.18, b)); nous voyons encore que, pour tout $y \in Q$, nous aurons $h''\{y\} \subseteqq \bar{h}\{y\}$ en vertu de (2.19). D'après (1.7) nous avons $h\{y\} = h''\{y\} - h'\{y\}$ et, par suite, $h\{y\} \subseteqq \bar{h}\{y\}$, (2.19) étant ainsi remplie par h; par conséquent, h sera une correspondance admissible.

3. A l'aide du théorème (2.29) il sera maintenant aisé d'établir une condition nécessaire et suffisante pour l'unicité d'une correspondance admissible h, l'existence d'une telle correspondance étant supposée.

(3.1). Pour qu'une correspondance admissible soit déterminée d'une manière unique, il faut et il suffit que, pour toute $(y, z) \in \bar{h}$, la condition suivante soit satisfaite: Si $\bar{h}\{y\} \supset \{z\}$, il existe un $x \in g^{-1}\{z\}$ tel que, pour tout $y^* \in f\{x\}$, ou $y^* = y$ ou $z \notin \bar{h}\{y^*\}$. Si cette condition est remplie, la correspondance $\bar{h}$ sera la seule correspondance admissible.

Notons, préliminairement, que les deux relations $y^* = y$ et $z \notin \bar{h}\{y^*\}$ sont incompatibles, comme $y^* = y$ entraînera $(y^*, z) = (y, z) \in \bar{h}$, donc $z \in \bar{h}\{y^*\}$.

Démontrons, d'abord, que la condition est nécessaire. Supposons qu'elle ne soit remplie; alors il existe une $(y^*, z^*) \in \bar{h}$ telle que $\bar{h}\{y^*\} \supset \{z^*\}$ et qu'il existe, pour tout $x \in g^{-1}\{z^*\}$, un $y \in f\{x\}$ tel que $y \neq y^*$ et $z^* \in \bar{h}\{y\}$. Soit h' la correspondance partielle entre Q et R, ne contenant que la paire ordonnée (y^*, z^*). Nous aurons, pour tout $y \in Q$, $\bar{h}\{y\} \supset h'\{y\}$; car nous avons $\bar{h}\{y^*\} \supset h'\{y^*\} = \{z^*\}$, et pour $y \neq y^*$

nous avons $\bar{h}\{y\} \supset O$ et $h'\{y\} = O$. De plus, pour tout $z \in R$ et tout $x \in g^{-1}\{z\}$ il existe un $y \in f\{x\}$ tel que $z \in \bar{h}\{y\}$ et $z \notin h'\{y\}$; en effet, pour tout $x \in g^{-1}\{z^*\}$ il existe un $y \in f\{x\}$ tel que $z^* \in \bar{h}\{y\}$ et $y \neq y^*$, donc $h'\{y\} = O$ et, par suite $z^* \notin h'\{y\}$; et pour $z \neq z^*$ il existe, d'après (2.18, b)), pour tout $x \in g^{-1}\{z\}$ un $y \in f\{x\}$ tel que $z \in \bar{h}\{y\}$; comme $(y, z) \notin h'$, en vertu de la relation $z \neq z^*$, nous avons $z \notin h'\{y\}$. Il résulte alors de (2.29) que $h = \bar{h} - h'$ est une correspondance admissible, et comme $h \subset \bar{h}$, il existe deux correspondances admissibles différentes.

Démontrons, ensuite, la suffisance de la condition. Supposons qu'elle soit remplie, et soit h une correspondance admissible. Si $(y, z) \in \bar{h}$, on aura $\bar{h}\{y\} = \{z\}$, donc $\{z\} = \bar{h}\{y\} = h\{y\}$ en vertu de (2.19), comme $h\{y\} \supset O$, et par suite $(y, z) \in h$; ou bien on aura $\bar{h}\{y\} \supset \{z\}$, et il existe, de plus, un $x \in g^{-1}\{z\}$ tel que, pour tout $y^* \in f\{x\}$, on aura ou $y^* = y$ ou $z \notin \bar{h}\{y^*\}$. h étant une correspondance admissible, il existe, en vertu de (2.18, b)) un $y^* \in f\{x\}$ tel que $z \in h\{y^*\} \subseteq \bar{h}\{y^*\}$; on doit donc avoir $y^* = y$ et, par conséquent, $z \in h\{y\}$ ou $(y, z) \in h$. Pour toute $(y, z) \in \bar{h}$ on aura donc $(y, z) \in h$, d'où il résulte que $\bar{h} \subseteq h$ et, tenant compte de (2.15), que $h = \bar{h}$, ce qui montre que $\bar{h}$ est la seule correspondance admissible.

Nous pouvons énoncer le théorème (3.1) sous une forme modifiée, qui est un peu plus complexe; de l'autre coté, il n'y figurent que les correspondances f et g. En effet, appliquant (2.20), nous obtenons:

(3.2). Pour qu'une correspondance admissible soit déterminée d'une manière unique, il faut et il suffit que, pour tout $y \in Q$ et tout $z \in R$ tels que $f^{-1}\{y\} \subseteq g^{-1}\{z\}$, la condition suivante soit satisfaite: Il n'existe pas un $z^* \in R$ tel que $z^* \neq z$ et $f^{-1}\{y\} \subseteq g^{-1}\{z^*\}$, ou bien il existe un $x \in g^{-1}\{z\}$ tel que, pour tout $y^* \in f\{x\}$, on aura ou $y^* = y$ ou $f^{-1}\{y^*\} \notin g^{-1}\{z\}$.

4. Étudions maintenant les relations entre les classes dans P, Q et R, lesquelles sont déterminées par les correspondances f, g et h de (2.1) et leurs correspondances inverses, en supposant, comme dans la section précédente, qu'il existe une correspondance admissible.

Soit C ($\subseteq R$) une classe, déterminée par g^{-1}; nous aurons donc, en vertu de (2.1): $C = gg^{-1}C = hff^{-1}h^{-1}C \supseteq hh^{-1}C$, comme $ff^{-1}h^{-1}C \supseteq h^{-1}C$, donc $C \supseteq hh^{-1}C$, et comme nous avons de l'autre coté: $C \subseteq hh^{-1}C$, il résulte de là que $hh^{-1}C = C$, C étant ainsi invariant relativement à h^{-1}. Par conséquent, nous aurons d'une façon unique:

$$C = K' + K'' + \cdots , \tag{4.1}$$

où K', K'',... sont des classes disjointes, déterminées par h^{-1}.

Posons
$$B = h^{-1}C \tag{4.2}$$
et
$$H' = h^{-1}K',\ H'' = h^{-1}K'',\ldots; \tag{4.3}$$

alors $H', H'',\ldots$ sont des classes disjointes, déterminées par h, et nous avons au moyen de (4.1):
$$B = h^{-1}C = h^{-1}K' + h^{-1}K'' + \cdots$$
ou
$$B = H' + H'' + \cdots, \tag{4.4}$$

$B(\subseteqq Q)$ étant ainsi un ensemble invariant relativement à h; cette division de B en classes disjointes, déterminées par h, sera unique. Nous avons de plus
$$C = hB. \tag{4.5}$$

Posons, ensuite,
$$A = g^{-1}C; \tag{4.6}$$

$A(\subseteqq P)$ sera alors une classe, déterminée par g, et on a
$$C = gA. \tag{4.7}$$

L'ensemble A étant invariant relativement à g, nous avons $A = g^{-1}gA = f^{-1}h^{-1}hfA \supseteqq f^{-1}fA$, comme $h^{-1}hfA \supseteqq fA$, donc $A \supseteqq f^{-1}fA$; d'autre part, nous avons $A \subseteqq f^{-1}fA$ et, par conséquent, $f^{-1}fA = A$, d'où il suit que A est un ensemble invariant relativement à f. Nous avons donc d'une façon unique:
$$A = M' + M'' + \cdots, \tag{4.8}$$

où $M', M'',\ldots$ sont des classes disjointes, déterminées par f.

Montrons que
$$B = fA. \tag{4.9}$$

Nous avons, en effet, $B = h^{-1}C = h^{-1}gA = h^{-1}hfA \supseteqq fA$ et, d'autre part, $fA = fg^{-1}C = ff^{-1}h^{-1}C = ff^{-1}B \supseteqq B$, d'où résulte $B = fA$.

B est donc un ensemble invariant relativement à f^{-1}, et nous aurons
$$A = f^{-1}B. \tag{4.10}$$

En posant
$$N' = fM',\ N'' = fM'',\ldots, \tag{4.11}$$

nous verrons que $N', N'',\ldots$ sont des classes disjointes, déterminées par f^{-1}, et il résulte de (4.8) et (4.9) que

$$B = fA = fM' + fM'' + \cdots$$

ou

$$B = N' + N'' + \cdots ; \tag{4.12}$$

cette division de B en classes disjointes, déterminées par f^{-1}, sera unique.

Quant aux relations entre les classes H', H'', ... et N', N'', ..., nous ne pouvons, dans le cas général, dire plus que:

$$H' + H'' + \cdots = N' + N'' + \cdots ,$$

comme il suit de (4.4) et (4.12).

Les résultats ainsi obtenus montrent que, pour étudier les relations entre les classes, déterminées par les correspondances f, g et h et leurs correspondances inverses, il suffit de se borner à l'étude des correspondances, restreintes à des classes de la forme C et les ensembles adjoints de la forme A ou B.

Supposons, enfin, que h' et h'' soient des correspondances admissibles telles que $h' \subseteqq h''$. En employant (1.9) et (1.10), nous verrons que $h'h'^{-1} \subseteqq h''h''^{-1}$. Si K est une classe dans R, déterminée par h''^{-1}, nous aurons $K = h''h''^{-1}K \supseteqq h'h'^{-1}K$, donc $K \supseteqq h'h'^{-1}K$; d'autre part, nous aurons $K \subseteqq h'h'^{-1}K$, donc $h'h'^{-1}K = K$, K étant ainsi un ensemble invariant relativement à h'^{-1}; de là résulte que K peut se diviser en des classes disjointes, déterminées par h'^{-1}. Le résultat de ces considérations peut s'exprimer par le théorème:

(4.13). Soient h' et h'' des correspondances admissibles telles que $h' \subseteqq h''$, et $K (\subseteqq R)$ une classe, déterminée par h''; K sera alors d'une manière unique l'union des classes disjointes, déterminées par h'^{-1}.

5. Cette section sera consacrée à l'étude des cas particuliers, où l'une ou l'autre des correspondances f et g est univoque. Dans ces cas des simplifications considérables auront lieu; en particulier, nous verrons qu'il existe une correspondance admissible au plus, laquelle sera alors identique à gf^{-1}.

Considérons, d'abord, le cas où f est univoque; pour tout $x \in P$ il n'existe qu'un $y \in Q$ tel que $y \in f\{x\}$.

La condition (2.11) pour l'existence d'une correspondance admissible se réduit ici aux deux conditions: (2.12) et: $g\{x\} = \prod_{x^* \in f^{-1}f\{x\}} g\{x^*\}$ pour tout $x \in P$, comme $f\{x\}$ contient un élément seulement. Or, la dernière condition entraînera la première; en effet, si $y \in Q$, nous avons pour un $x \in f^{-1}\{y\}$, arbitrairement choisi: $y \in f\{x\}$, donc $\{y\} = f\{x\}$ et, par suite, $f^{-1}\{y\} = f^{-1}f\{x\}$, d'où résulte que $\prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\} = \prod_{x^* \in f^{-1}f\{x\}} g\{x^*\} = g\{x\} \supset O$.

Par conséquent, pour qu'il existe une correspondance admissible, il faut et il suffit, que pour tout $x \in P$:

$$g\{x\} = \prod_{x^* \in f^{-1}f\{x\}} g\{x^*\} . \tag{5.1}$$

(5.1) étant remplie, nous verrons que $x^* \in f^{-1}f\{x\}$ impliquera $g\{x\} \subseteqq g\{x^*\}$. Or, si $x^* \in f^{-1}f\{x\}$, nous aurons aussi $x \in (f^{-1}f)^{-1}\{x^*\}$ ou $x \in f^{-1}f\{x^*\}$, d'où on tire $g\{x^*\} \subseteqq g\{x\}$ et, par suite, $g\{x^*\} = g\{x\}$. Pour tout $x^* \in f^{-1}f\{x\}$, nous aurons donc $g\{x^*\} = g\{x\}$, d'où on conclut que $g\{x\} = \sum_{x^* \in f^{-1}f\{x\}} g\{x^*\} = gf^{-1}f\{x\}$.

D'autre part, si $g\{x\} = gf^{-1}f\{x\}$ pour tout $x \in P$, nous avons pour tout $x^* \in f^{-1}f\{x\}$: $x \in (f^{-1}f)^{-1}\{x^*\} = f^{-1}f\{x^*\}$ et par suite $g\{x\} \subseteqq gf^{-1}f\{x^*\} = g\{x^*\}$, d'où $g\{x\} \subseteqq \prod_{x^* \in f^{-1}f\{x\}} g\{x^*\}$. Comme nous avons aussi $x \in f^{-1}f\{x\}$, il suit que $\prod_{x^* \in f^{-1}f\{x\}} g\{x^*\} \subseteqq g\{x\}$, étant ainsi $g\{x\} = \prod_{x^* \in f^{-1}f\{x\}} g\{x^*\}$, ce qui montre que (5.1) est remplie.

En résumé, pour qu'il existe une correspondance admissible, il faut et il suffit que pour tout $x \in P$:

$$g\{x\} = gf^{-1}f\{x\} . \tag{5.2}$$

Nous retrouvons ainsi la condition, déduite déjà dans II, où nous avons montré, de plus, que $f^{-1}f\{x\}$ est la classe M dans P, déterminée par f, qui contient x.

La condition peut aussi s'exprimer sous la forme: Pour tout $y \in Q$ et pour $x' \in f^{-1}\{y\}$ et $x'' \in f^{-1}\{y\}$ on doit avoir $g\{x'\} = g\{x''\}$.

Supposons maintenant l'existence d'une correspondance admissible h; il suit de (2.1) que $hff^{-1} = gf^{-1}$ ou $h = gf^{-1}$, ff^{-1} étant la correspondance identique entre Q et Q, en vertu de (1.12). On verra de là, que la correspondance h est déterminée d'une manière unique par f et g.

Quant aux classes, étudiées dans la section précédente, nous verrons que, K étant une des classes considérées, déterminée par h^{-1}, K doit être identique à la classe C. En effet, nous avons $gg^{-1}K = hff^{-1}h^{-1}K = hh^{-1}K = K$, comme $ff^{-1}h^{-1}K = h^{-1}K$, K étant ainsi un ensemble invariant relativement à g^{-1}; de plus, comme $O \subset K \subseteqq C$, et C étant une classe, déterminée par g^{-1}, nous aurons $K = C$ en vertu du théorème (3.4) de I. Nous avons ainsi retrouvé un des résultats de II en démontrant que la classe C, déterminée par g^{-1}, est aussi une classe, déterminée par h^{-1}; il résulte de là que $B = h^{-1}C$ sera une classe, déterminée par h, et que les classes H coïncident avec B. La correspondance f étant univoque, toute classe N, déterminée par f^{-1}, se réduit à un ensemble ne contenant qu'un seul élément.

Considérons, ensuite, le cas où g est univoque; pour tout $x \in P$ il n'existe qu'un $z \in R$ tel que $z \in g\{x\}$.

Nous pouvons montrer que, dans ce cas, les conditions (2.11) et (2.12) seront équivalentes, tel que (2.12) est la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une correspondance admissible. En effet, si (2.12) est satisfaite, on aura pour tout $x \in P$ et tout $y \in f\{x\}$: $x \in f^{-1}\{y\}$, donc $O \subset \prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\} \subseteq g\{x\}$. Or, tout ensemble $g\{x^*\}$ ou $g\{x\}$ ne contenant qu'un seul élément, il s'ensuit que $g\{x^*\} = g\{x\}$ pour tout $x^* \in f^{-1}\{y\}$. De là résulte que $\prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\} = g\{x\}$ pour tout $y \in f\{x\}$ et, par conséquent, $\sum_{y \in f\{x\}} \prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\} = g\{x\}$, (2.11) étant ainsi satisfaite.

La condition (2.12) peut aussi être exprimée sous la même forme que dans le cas où f est univoque: Pour tout $y \in Q$ et pour $x' \in f^{-1}\{y\}$ et $x'' \in f^{-1}\{y\}$ on doit avoir $g\{x'\} = g\{x''\}$.

Supposons maintenant qu'il existe une correspondance admissible h. De (2.1) on conclut que $hfg^{-1} = gg^{-1} = e$, où e est la correspondance identique entre R et R, en appliquant (1.12). A l'aide de (1.13) nous verrons donc, que h doit être une correspondance univoque, et que $fg^{-1} = h^{-1}$ ou $h = gf^{-1}$. On notera que la correspondance h est déterminée d'une manière unique par f et g.

Quant aux classes considérées dans la section 4, nous verrons que les classes K coïncident avec la classe C, cette classe étant déterminée par g^{-1} et g étant univoque, tel que C se réduit à un ensemble contenant un élément seulement. Il s'ensuit que $B = h^{-1}C$ sera une classe, déterminée par h, et que les classes H coïncident avec B.

6. Nous avons vu dans la section précédente, où l'une ou l'autre des correspondances f et g serait supposée univoque, que l'existence d'une correspondance admissible h impliquait que h était déterminée d'une facon unique, et que $h = gf^{-1}$. Il serait donc naturel de se poser la question, si, dans le cas général, la relation $\overline{h} = gf^{-1}$ soit une condition nécessaire ou suffisante pour l'unicité de h, l'existence d'une correspondance admissible étant supposée. La réponse à cette question est, cependant, négative: ni l'un ni l'autre sera le cas, ce qu'on peut prouver à l'aide de deux exemples simples.

Soient, d'abord:

$$P = \{x_1\},\ Q = \{y_1, y_2\},\ R = \{z_1, z_2\}$$

et

$$f = \{(x_1, y_1),\ (x_1, y_2)\}\ ,$$
$$g = \{(x_1, z_1),\ (x_1, z_2)\}\ .$$

Au moyen des conditions (2.12) et (2.13) nous verifions l'existence d'une correspondance admissible, et nous verrons de plus à l'aide de (2.14) et (2.23), que

$$\overline{h} = gf^{-1} = \{(y_1, z_1),\ (y_1, z_2),\ (y_2, z_1),\ (y_2, z_2)\}\ .$$

Or, l'unicité de h n'aura pas lieu. En effet, il existe outre $\overline{h}$ les six correspondances admissibles:

$$h_1 = \{(y_1, z_1),\ (y_2, z_2)\}\ ,$$
$$h_2 = \{(y_1, z_2),\ (y_2, z_1)\}\ ,$$
$$h_3 = \{(y_1, z_1),\ (y_1, z_2),\ (y_2, z_2)\}\ ,$$
$$h_4 = \{(y_1, z_1),\ (y_2, z_1),\ (y_2, z_2)\}\ ,$$
$$h_5 = \{(y_1, z_1),\ (y_1, z_2),\ (y_2, z_1)\}\ ,$$
$$h_6 = \{(y_1, z_2),\ (y_2, z_1),\ (y_2, z_2)\}\ ,$$

comme on le verra à l'aide de (2.18). Par suite, la relation $\overline{h} = gf^{-1}$ ne peut être une condition suffisante pour l'unicité de h.

Considérons, ensuite, l'exemple où

$$P = \{x_1, x_2, x_3\},\ Q = \{y_1, y_2\},\ R = \{z_1, z_2, z_3\}$$

et

$$f = \{(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_1),\ (x_3, y_2)\}\ ,$$
$$g = \{(x_1, z_1),\ (x_1, z_2),\ (x_2, z_3),\ (x_3, z_1),\ (x_3, z_2),\ (x_3, z_3)\}\ .$$

On aura:

$$\overline{h} = \{(y_1, z_1),\ (y_1, z_2),\ (y_2, z_3)\}$$

et

$$gf^{-1} = \{(y_1, z_1),\ (y_1, z_2),\ (y_1, z_3),\ (y_2, z_1),\ (y_2, z_2),\ (y_2, z_3)\}\ ,$$

donc $\overline{h} \subset gf^{-1}$.

A l'aide de (3.1) nous verrons que $\overline{h}$ est la seule correspondance admissible; par conséquent, $\overline{h} = gf^{-1}$ ne peut être une condition nécessaire pour l'unicité de h.

Il est, d'ailleurs, aisé d'établir une condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{h} = gf^{-1}$. Supposant que cette égalité subsiste, on aura, en vertu de (2.14) et (2.23), pour tout $y \in Q$, la relation équivalente:

$$\sum_{x' \in f^{-1}\{y\}} g\{x'\} = \prod_{x'' \in f^{-1}\{y\}} g\{x''\}\ . \tag{6.1}$$

Soient $x' \in f^{-1}\{y\}$ et $z \in g\{x'\}$; on aura donc en vertu de (6.1): $z \in \prod_{x'' \in f^{-1}\{y\}} g\{x''\}$ et par suite $z \in g\{x''\}$ pour tout $x'' \in f^{-1}\{y\}$. Il résulte de là, que $g\{x'\} \subseteq g\{x''\}$ pour des éléments quelconques x' et x'' de $f^{-1}\{y\}$, d'où il suit, que $g\{x'\} = g\{x''\}$ pour ces éléments. D'autre part, si cette condition est remplie, la validité de (6.1) est immédiate. De là résulte le théorème:

(6.2). Pour que l'égalité $\bar{h} = gf^{-1}$ subsiste, il faut et il suffit que, pour tout $y \in Q$ et pour $x' \in f^{-1}\{y\}$ et $x'' \in f^{-1}\{y\}$, on ait $g\{x'\} = g\{x''\}$.

Notons, encore, que, si f et g remplissent la condition (6.2), la condition (2.11) pour l'existence d'une correspondance admissible sera satisfaite. En effet, si $y \in Q$ et $x' \in f^{-1}\{y\}$, nous avons pour tout $x^* \in f^{-1}\{y\}$: $g\{x^*\} = g\{x'\}$, donc $\prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\} = g\{x'\} \supset O$, (2.12) étant ainsi remplie; de plus, pour tout $x \in P$ et pour tout $y \in f\{x\}$, on aura $x \in f^{-1}\{y\}$ et par suite $g\{x^*\} = g\{x\}$ pour tout $x^* \in f^{-1}\{y\}$; il s'ensuit que $\prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\} = g\{x\}$ et, par conséquent, que $\sum_{y \in f\{x\}} \prod_{x^* \in f^{-1}\{y\}} g\{x^*\} = g\{x\}$, d'où il résulte que (2.13) sera remplie elle aussi.