ÜBER DIE DUALITÄT VON FINSLERSCHEN UND CARTANSCHEN RÄUMEN.

von

ARTHUR MOÓR

in DEBRECEN (UNGARN)

Einleitung.

Ein Finslerscher Raum ist ein n-dimensionaler Punktraum, der auf die Koordinaten $x^1, x^2, \ldots, x^n$ bezogen ist, und in dem durch ein Bogenelement von der Form:

$$ds = F^*(x^1, x^2, \ldots, x^n, dx^1, dx^2, \ldots, dx^n) \tag{1}$$

eine Metrik eingeführt ist. Von der Funktion $F^*(x^1, x^2, \ldots, x^n, dx^1, \ldots, dx^n)$ soll, wie es gewöhnlich geschieht, angenommen werden, dass es in den dx^i positiv homogen von erster Dimension ist. Es besteht also

$$F^*(x^i, \varrho\, dx^i) = \varrho\, F^*(x^i, dx^i), \qquad (\varrho > 0). \tag{1 a}$$

Mit Hilfe von (1) kann man die Länge einer Kurve

$$x^i = x^i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

zwischen den Parameterwerten t_1, t_2 wegen (1 a) durch das Integral

$$s_{12} = \int_{t_1}^{t_2} F^*(x^i(t), \dot{x}^i(t))\, dt, \qquad \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt} \tag{2}$$

bestimmen. s_{12} ist wegen der Homogenität von F^* von der Wahl des Parameters t unabhängig.

Im folgenden werden wir einen Punkt $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ kurz mit x^i bezeichnen; entsprechend bedeutet dx^i die n Koordinatendifferentiale $dx^1, dx^2, \ldots, dx^n$; $\dot{x}^i$ die n Grössen $(\dot{x}^1, \dot{x}^2, \ldots, \dot{x}^n)$ usw.

Wie es in der Cartanschen Theorie der Finslerschen Räume gebräuchlich ist, erweitern wir den n-dimensionalen Punktraum mit dem Grundelement x^i zu einer

$(2n-1)$-dimensionalen Linienelementmannigfaltigkeit, indem wir zu jedem Punkt x^i sämtliche hindurchgehende orientierte Richtungen $\dot{x}^i$ hinzunehmen. Bei den $\dot{x}^i$ kommt es selbstverständlich nur auf ihr Verhältnis an. Damit ist das Grundelement des Finslerschen Raumes das Linienelement $(x^i, \dot{x}^i)$ geworden, und eine Kurve

$$x^i = x^i(t), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

in diesem erweiterten Raum ist die Mannigfaltigkeit ihrer Linienelemente:

$$(x^i(t), \dot{x}^i(t)), \qquad \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}.$$

In einem Linienelement $(x^i, \dot{x}^i)$ können natürlich nicht sämtliche $\dot{x}^i$ verschwinden.

Der Finslersche Raum kann also als eine metrisierte Linienelementmannigfaltigkeit betrachtet werden. Die den Finslerschen Raum charakterisierenden Grössen, die Tensoren und die Skalaren des Raumes, sind also Funktionen von $(x^i, \dot{x}^i)$. Sie sind in den $\dot{x}^i$ homogen nullten Grades, und man kann sie aus der Funktion des Bogenelements $F^*(x^i, \dot{x}^i)$ ableiten. Eben wegen dieser Eigenschaft nennen wir die Funktion $F^*(x^i, \dot{x}^i)$ Grundfunktion des Finslerschen Raumes.

Zu jedem Linienelement $(x^i, \dot{x}^i)$ des Finslerschen Raumes werden wir in eineindeutiger Weise ein Hyperflächenelement (x^i, μ_i) eines Cartanschen Raumes zuordnen. Das „Hyperflächenelement" besteht aus einem Punkt x^i und aus n nicht sämtlich verschwindenden Zahlen μ_i, die die Normalenrichtung eines gerichteten Hyperflächenstückes durch den Punkt x^i bestimmen. Ein Hyperflächenelementraum (x^i, μ_i) nennt man Cartanschen Raum, falls in ihm durch eine Funktion von der Form:

$$dO = \frac{F(x^i, \mu_i)}{\mu_n} dx^1\, dx^2 \ldots dx^{n-1} \tag{3}$$

das Oberflächenelement angegeben ist. Die Funktion $F(x^i, \mu_i)$[1] soll in den μ_i positiv homogen von erster Dimension sein; man hat also

$$F(x^i, \varrho\mu_i) = \varrho F(x^i, \mu_i), \qquad (\varrho > 0). \tag{3 a}$$

Ein Hyperflächenelementraum (x^i, μ_i) ist von $(2n-1)$ Dimension; denn die μ_i kann man mit einem willkürlichen positiven Faktor multiplizieren. $(x^i, \varrho\mu_i)$ bestimmt also eben dasselbe Hyperflächenelement wie (x^i, μ_i).

Die Oberfläche einer Hyperfläche

[1] Wir werden im folgenden konsequent für die Grössen des Finslerschen Raumes das „*" benutzen, während die Grössen des Cartanschen Raumes einfach durch die gewöhnlichen Buchstaben bezeichnet werden.

$$x^i = x^i(v^1, v^2, \ldots, v^{n-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

kann man mittels (3) in der Form

$$O = \int_{n-1} F(x^i, p_i)\, d v^1, d v^2 \ldots d v^{n-1}$$

bestimmen, wo die p_k gewisse Unterdeterminanten bedeuten, die man auf folgender Weise bilden kann: aus der Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{d x^1}{d v^1} & \cdots & \frac{d x^n}{d v^1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d x^1}{d v^{n-1}} & \cdots & \frac{d x^n}{d v^{n-1}} \end{pmatrix}$$

lassen wir die k-te Spalte weg und bilden dann die Determinante:

$$D_k = \left| \frac{d x^r}{d x^s} \right|; \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots, (k-1), (k+1), \ldots, n \\ s = 1, 2, \ldots, (n-1) \end{pmatrix}.$$

Es wird denn

$$p_k = (-1)^{k+1} D_k .$$

Die Tensoren und Skalaren eines Cartanschen Raumes sind durch die Grundfunktion $F(x^i \mu_i)$ bestimmt; sie sind in den μ_i homogen von nullter Dimension.

Die Grundelemente und die Grundfunktionen eines Finslerschen und eines Cartanschen Raumes zeigen gewissermassen einen ähnlichen Charakter, sogar ihre Fundamentaltensoren — wie z. B. den metrischen Grundtensor g_{ik}, den Torsionstensor A_{ijk}, den Riemannschen Krümmungstensor R^j_{ikl} beider Räume — kann man einander zuordnen. Wie schon erwähnt, werden wir nur die Grundelemente der Cartanschen und die des Finslerschen Raumes in ein-eindeutiger Weise einander zuordnen und dann untersuchen, wie die Fundamentaltensoren der beiden Geometrien zusammenhängen. Es wird sich zeigen, dass nur diejenige Zuordnung eine geometrische Realität hat, die schon, vorher durch L. Berwald benutzt wurde.[2]

Berwald hat angenommen, dass der Tensor A^i des Cartanschen Raumes identisch verschwindet. Wir werden diese Bedingung von der Form der Zuordnung der Linienelemente zu den Hyperflächenelementen ableiten können.

In §. 1. stellen wir die Grundtensoren des Cartanschen Raumes, sowie die des Finslerschen Raumes zusammen. In §. 2. geben wir die Zuordnung der Hyperflächenelemente zu den Linienelementen des Finslerschen Raumes an, und zeigen die

[2] Vgl. L. Berwald, Über Finslersche und Cartansche Geom. II. Compositio math. 7. (1940) S. 141—176.

Identität der metrischen Grundtensoren beider Räume in den miteinander korrespondierenden Grundelementen. In §. 3. untersuchen wir die Torsionstensoren, und zeigen, dass bei der Zuordnung (2.1) und (2.3) die Vektoren A^i, A^{*i} identisch verschwinden.

In den zwei letzten Paragraphen zeigen wir mit Hilfe des oskulierenden Riemannschen Raumes die Identität der Krümmungstensoren und der invarianten Differentiale der Cartanschen und der Finslerschen Geometrien.

§ 1. Grundtensoren des Finslerschen und des Cartanschen Raumes.

Die Grundelemente des Finslerschen bzw. die des Cartanschen Raumes, also die Linienelemente bzw. die Hyperflächenelemente werden wir durch $2n$ Grössen

$$(x^i, \dot{x}^i) = (x^1, x^2, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \ldots, \dot{x}^n)$$

bzw.

$$(x^i, \mu_i) = (x^1, x^2, \ldots, x^n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$$

angeben. Dabei kommt es bei den $\dot{x}^i$ sowie auch bei den μ_i nur auf das Verhältnis dieser Grössen an. Somit sind beide Räume $(2n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten.

Bei einer Koordinatentransformation:

$$\bar{x}^s = \bar{x}^s(x^1, x^2, \ldots, x^n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

transformieren sich die $\dot{x}^i$ wie kontravariante Vektoren, die μ_i aber wie kovariante Vektordichten vom Gewicht -1. Die Grössen μ_i bestimmen im wesentlichen die Normalenrichtung des Hyperflächenelements (x^i, μ_i). Das kommt in der Gleichung

$$\mu_i \, dx^i = 0 \text{ [3]}$$

zum Ausdruck, wo die dx^i die Tangentenrichtungen des Hyperflächenelements bestimmen.

Die $\dot{x}^i$ und die μ_i unterscheiden sich wesentlich voneinander; indem die μ_i Vektordichten vom Gewicht -1 sind. Diesen Unterschied wollen wir später noch beachten.

Die Metrik in beiden Räumen ist durch die metrischen Grundtensoren $g^*_{ij}(x^r, \dot{x}^r)$ bzw. $g^{ij}(x^r, \mu_r)$ bestimmt. Der metrische Grundtensor $g^*_{ij}(x^r, \dot{x}^r)$ des Finslerschen Raumes lässt sich von einer Fundamentalfunktion $F^*(x^i, \dot{x}^i)$ ableiten. Es ist:

---

[3] Auf zweimal vorkommende Indizes soll, wie es in der Tensorrechnung üblich ist, stets summiert werden. Selbstverständlich bezieht sich diese Festsetzung nicht auf Indizes, die voneinander getrennt sind. $(x^i, \dot{x}^i)$ bedeutet also z. B. die $2n$ Grössen $(x^1, x^2, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \ldots, \dot{x}^n)$.

$$g^*_{ik} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^{*2}(x^r, \dot{x}^r)}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k}. \tag{1.1}$$

Dabei ist die Fundamentalfunktion $F^*(x^r, \dot{x}^r)$ homogen von erster Dimension in den $\dot{x}^i$. Der metrische Grundtensor $g^{ik}(x^r, \mu_r)$ des Cartanschen Raumes hängt mit der Fundamentalfunktion $F(x^r, \mu_r)$ durch die Formel

$$g^{ik} = \frac{1}{2} \Delta^{-\frac{1}{n-1}} \frac{\partial^2 F^2(x^r, \mu_r)}{\partial \mu_i \partial \mu_k} \tag{1.2}$$

zusammen, wo Δ die Determinante mit den Elementen

$$a^{hj} = F \frac{\partial^2 F}{\partial \mu_h \partial \mu_j} + \frac{\partial F}{\partial \mu_h} \frac{\partial F}{\partial \mu_j}$$

bedeutet. $F(x^r, \mu_r)$ ist in den μ_r homogen von erster Dimension.

Im folgenden werden für uns die Torsionstensoren und die Riemannschen Krümmungstensoren von Bedeutung sein. Der Torsionstensor des Finslerschen Raumes hat die Form:

$$A^*_{ijk}(x^t, \dot{x}^t) = F^* C^*_{ijk}, \tag{1.3}$$

wo

$$C^*_{ijk}(x^t, \dot{x}^t) = \frac{1}{2} \frac{\partial g^*_{ij}}{\partial \dot{x}_k} \tag{1.4}$$

ist. Auf Grund der Gleichung (1.1) ist C^*_{ijk} symmetrisch in jedem seiner Indizes. Der Torsionstensor des Cartanschen Raumes hat die Form:

$$A^{ijk}(x^t, \mu_t) = \frac{F}{\sqrt{g}} C^{ijk}, \tag{1.5}$$

wo g die Determinante

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

und C^{ijk} die Grösse:

$$C^{ijk} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{ij}}{\partial \mu_k} \tag{1.7}$$

bedeuten. A^{ijk} und C^{ijk} sind nach (1.5), (1.7) in Beachtung der Gleichung (1.2) symmetrisch in i und j.

Die metrischen Grundtensoren beider Räume kann man durch die kovarianten, sowie auch durch die kontravarianten Komponenten bestimmen. Diese hängen miteinander durch die Gleichungen

$$g^*_{ij}\, g^{*ik} = \delta_j^k, \qquad g_{ij}\, g^{ik} = \delta_j^k \tag{1.8}$$

zusammen. δ_j^k bedeutet dabei das Kroneckersche Symbol. Mit g^*_{ij} bzw. g_{ij} kann man wegen (1.8) die Indizes der Tensoren in beiden Räumen herauf- und herabziehen. Z. B.:

$$T^{ij} = g^{js}\, T^i{}_s, \qquad T^{*\,k}_{ij} = g^{*ks}\, T^*_{ijs}.$$

Durch Verjüngung erhält man von den Torsionstensoren (1.3) und (1.5) die Vektoren:

$$A^*_i = A^{*\,k}_{ik} = F^* \frac{\partial \log \sqrt{g^*}}{\partial \dot{x}^i}, \tag{1.9}$$

wo g^* die Determinante:

$$g^*(x^i, \dot{x}^i) = \begin{vmatrix} g^*_{11} & \dots & g^*_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ g^*_{n1} & \dots & g^*_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.10}$$

bedeutet; und im Cartanschen Raum

$$A^i = A^{ki}_k = -F \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{g}}}{\partial \mu_i}. \tag{1.11}$$

In den Räumen, wo

$$A^*_i = 0, \text{ oder } A^i = 0 \tag{1.12}$$

besteht, existiert ein von der Richtung $\dot{x}^i$, bzw. von den Hyperflächenelementen μ_i unabhängiges Inhaltsmass. Es ist nämlich in diesem Fall nach (1.9), (1.11) $\sqrt{g^*}$ bzw. $\sqrt{g}$ von $\dot{x}^i$ bzw. von μ_i unabhängig. In den Fällen

$$A^*_i \neq 0, \text{ und } A^i \neq 0$$

kann man dagegen den Rauminhalt eines Bereiches nur in Bezug auf ein Feld von Linienelementen bzw. Hyperflächenelementen definieren.

Der Einheitsvektor im Finslerschen Raum, der dieselbe Richtung wie sein Linienelement besitzt, hat

$$l^{*i} = \frac{\dot{x}^i}{F^*} \text{ bzw. } l^*_i = \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}^i} \tag{1.13}$$

zu kontravarianten bzw. zu kovarianten Komponenten. Der Normaleinheitsvektor des Hyperflächenelements (x^i, μ_i) hat die folgenden kontravarianten, bzw. kovarianten Komponenten:

$$l^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial \mu^i}, \qquad l_i = \frac{\sqrt{g}}{F} \mu_i. \tag{1.14}$$

Überschiebungen mit den Vektoren l^{*i} oder l_i pflegt man stets durch eine Null zu bezeichnen, z. B.:

$$Q^*_{ijo} = Q^*_{ijk}\, l^{*k}, \qquad P^{io} = P^{ij}\, l_j.$$

Wegen der Homogenität nullter Dimension der metrischen Grundtensoren in den $\dot{x}^i$ bzw. μ_i, ergibt sich nach (1.3), (1.4), bzw. (1.5), (1.7):

$$A^*_{ijo} = 0, \qquad A^{ijo} = 0. \tag{1.15}$$

Wegen der Symmetrie des Torsionstensors A^*_{ijk} in allen ihren Indizes wird nach (1.15)

$$A^*_{ojk} = A^*_{jok} = A^*_{jko} = 0.$$

Im Cartanschen Raum hat man aber:

$$A^{oik} = A^{iok} = l^i \, A^k, \tag{1.16 a}$$

$$A_{ok}{}^i = A_{ko}{}^i = l_k \, A^i. \tag{1.16 b}$$

Die Gleichungen (1.16 a) und (1.16 b) kann man sofort bestätigen, wenn man den Tensor A^{ijk} in expliziter Form berechnet, und die Homogenität von erster Dimension in den μ_i der Grundfunktion $F(x^i, \mu_i)$ beachtet. Es ist:

$$A^{ijk} = g^{ij} A^k - \frac{F}{4\, g^{3/2}} \frac{\partial^3 F^2}{\partial \mu_i \, \partial \mu_j \, \partial \mu_k}. \tag{1.17}$$

Wir wollen noch in diesem §. die Form des Riemannschen Krümmungstensors angeben.

Bezeichnen wir die „Übertragungsparameter", die im Ausdruck des invarianten Differentials auftreten, durch $\overset{(*)}{\Gamma}{}_i^{*j}{}_k$ [4] bzw. im Cartanschen Raum durch $\Gamma_i^{*j}{}_k$. Der Riemannsche Krümmungstensor des Finslerschen Raumes ist dann:

$$R_i^{*j}{}_{kl} = \frac{\partial \overset{(*)}{\Gamma}{}_i^{*j}{}_k}{\partial x^l} - \frac{\partial \overset{(*)}{\Gamma}{}_i^{*j}{}_k}{\partial \dot{x}^s} \frac{\partial G^s}{\partial \dot{x}^l} - \left(\frac{\partial \overset{(*)}{\Gamma}{}_i^{*j}{}_l}{\partial x^k} - \frac{\partial \overset{(*)}{\Gamma}{}_i^{*j}{}_l}{\partial \dot{x}^s} \frac{\partial G^s}{\partial \dot{x}^k} \right) + \\ + \Gamma_i^{*s}{}_k \, \Gamma_s^{*j}{}_l - \Gamma_i^{*s}{}_l \, \Gamma_s^{*j}{}_k + A_i^{*j}{}_s \, R_o^{*s}{}_{kl}. \tag{1.18}$$

In der Äquivalenztheorie der affinzusammenhängenden Linienelementmannigfaltigkeiten bekommt man noch neben $R_i^{*j}{}_{kl}$ den Hauptkrümmungstensor $T_i^{*j}{}_{kl}$. Dieser hat im Finslerschen Raum die Form:

$$T_i^{*j}{}_{kl} = R_i^{*j}{}_{kl} - A^{*j}{}_s \, R_o^{*s}{}_{kl}. \tag{1.19}$$

(Der Name: „Hauptkrümmungstensor" stammt von O. Varga.)

[4] Man pflegt in der Literatur der Finslerschen Räume diese Grössen einfach durch $\Gamma_i^{*j}{}_k$ zu bezeichnen. Wir bezeichnen im folgenden diese Grössen stets durch $\overset{(*)}{\Gamma}{}_i^{*j}{}_k$ um sie von den analogen Grössen der Cartanschen Räume unterscheiden zu können.

Der Krümmungstensor im Cartanschen Raum ist:

$$\bar{R}_{i\ kl}^{\ j} = \frac{\partial \Gamma^{*j}_{i\ k}}{\partial x^l} + \Gamma^{*j}_{i\ k} \|^s \Gamma^*_{sol} - \frac{\partial \Gamma^{*j}_{i\ l}}{\partial x^k} - \Gamma^{*j}_{i\ l} \|^s \Gamma^*_{sok} + \Gamma^{*s}_{i\ k} \Gamma^{*j}_{s\ l} - \Gamma^{*s}_{i\ l} \Gamma^{*j}_{s\ k}. \tag{1.20}$$

wo das Symbol $\|^s$ Ableitung nach μ_s und Multiplikation mit $\frac{F}{\sqrt{g}}$ bedeutet. Es ist also z. B.:

$$K_{i\ k}^{\ j} \|^s = \frac{F}{\sqrt{g}} \frac{\partial K_{i\ k}^{\ j}}{\partial \mu_s}.$$

Der Tensor $\bar{R}_{i\ kl}^{\ j}$ im Cartanschen Raum (die Bezeichnung stammt von L. Berwald) ist das Analogon zu dem Hauptkrümmungstensor (1.19) des Finslerschen Raumes.

Der Riemannsche Krümmungstensor des Cartanschen Raumes ist:

$$R_{i\ kl}^{\ j} = \bar{R}_{i\ kl}^{\ j} - A_i^{js} \bar{R}_{sokl}. \tag{1.21}$$

Für die vollständige Entwicklung der Theorie der Finslerschen und Cartanschen Räume vgl. [1], [3], [4]. Vgl. das Schriftenverzeichnis am Ende.

§ 2. Zuordnung der Grundelemente des Finslerschen und des Cartanschen Raumes.

Bezeichnen wir ein Linienelement des Finslerschen Raumes durch $(x^i, \dot{x}^i)$; zu diesem Linienelement wollen wir ein Hyperflächenelement (x^i, μ_i) eines Cartanschen Raumes durch die Gleichungen;

$$\mu_i = \frac{1}{\sqrt{g^*(x, \dot{x})}} \overset{*}{g}_{ik}(x, \dot{x})\, \dot{x}^k \tag{2.1}$$

zuordnen.[5] Auf beiden Seite von (2.1) hat man eine kovariante Vektordichte vom Gewicht -1; denn $\sqrt{g}$ ist eine Skalarendichte vom Gewicht 1.

Zu dem Hyperflächenelement (x, μ) des Cartanschen Raumes ordnen wir nun das Linienelement $(x, \dot{\bar{x}})$ durch folgende Gleichungen zu:

$$\dot{\bar{x}}^i = \sqrt{g(x, \mu)}\, g^{ik}(x, \mu)\, \mu_k. \tag{2.2}$$

Wir fordern nun, dass die Zuordnung (2.1) und (2.2) ein-eindeutig sei; d. h. ist zum Linienelement $(x, \dot{x})$ durch (2.1) das Hyperflächenelement (x, μ) zugeordnet, dann soll zu (x, μ) durch (2.2) eben $(x, \dot{x})$ zugeordnet sein. Das bedeutet die Gültigkeit der Relation

$$\dot{x}^i = \dot{\bar{x}}^i.$$

[5] Wo kein Missverständnis vorhanden sein kann, wollen wir für $(x^i, \dot{x}^i)$ einfach nur $(x, \dot{x})$ schreiben.

Statt (2.2) bekommt man also

$$\dot{x}^i = \sqrt{g(x, \mu)}\, g^{ik}(x, \mu)\, \mu_k . \tag{2.3}$$

Substituiert man $\dot{x}^i$ von der Gleichung (2.3) in (2.1) so bekommt man die Identität:

$$\mu_i = \frac{\sqrt{g(x, \mu)}}{\sqrt{g^*(x^r, \sqrt{g}\, g^{rs} \mu_s)}}\, g^*_{ik}(x^r, \sqrt{g}\, g^{rs} \mu_s)\, g^{kt} \mu_t , \tag{2.4}$$

wo die Grössen g, g^{rs} Funktionen von (x, μ) sind. Diese Identität wird erfüllt, wenn

$$g^*_{ik}(x^r, \sqrt{g}\, g^{rs} \mu_s)\, g^{kt}(x, \mu) = \delta_i^t \tag{2.5}$$

besteht, wo

$$\delta_i^t = \begin{cases} 1, \text{ für } i = t \\ 0, \text{ für } i \neq t \end{cases}$$

ist. Nach Überschiebung von (2.5) mit $g_{tj}(x, \mu)$ wird wegen (1.8) in Beachtung von (2.3):

$$g^*_{ij}(x, \dot{x}) = g_{ij}(x, \mu), \tag{2.6}$$

oder ausführlich:

$$g^*_{ij}(x^r, \sqrt{g(x, \mu)}\, g^{rs}(x, \mu)\, \mu_s) = g_{ij}(x, \mu). \tag{2.6 a}$$

Überschieben wir aber (2.5) mit $g^{*ip}(x^r, \sqrt{g}\, g^{rs} \mu_s)$ so wird wieder wegen (1.8) und (2.3):

$$g^{*pt}(x^r, \sqrt{g(x, \mu)}\, g^{rs}(x, \mu)\, \mu_s) = g^{pt}(x, \mu) \tag{2.6 b}$$

bzw.

$$g^{*pt}(x, \dot{x}) = g^{pt}(x, \mu). \tag{2.6 c}$$

Die Gleichungen (2.6)—(2.6 c) drücken aus, dass die metrische Grundtensoren beider Räume in den entsprechenden Grundelementen — die also durch (2.1) und (2.3) einander zugeordnet sind — übereinstimmen. Daraus folgt aber auch, dass

$$g(x, \mu) = g^*(x^r, \sqrt{g(x, \mu)}\, g^{rs}(x, \mu)\, \mu_s) \tag{2.7}$$

bzw.

$$g^*(x, \dot{x}) = g(x, \mu) \tag{2.7 a}$$

gültig ist; (2.4) gibt also richtig eine Identität.

Aus den Gleichungen (2.6 a), (2.6 b) und (2.7) ergibt sich nach (2.1), bzw. (2.3)

$$g^*_{ij}(x, \dot{x}) = g_{ij}\left(x^r, \frac{1}{\sqrt{g^*(x, \dot{x})}}\, g^*_{rs}(x, \dot{x})\, \dot{x}^s\right), \tag{2.8 a}$$

(2.8 b)
$$g^{*pt}(x,\dot{x}) = g^{pt}\left(x^r, \frac{1}{\sqrt{g^*(x,\dot{x})}}\, g^*_{rs}(x,\dot{x})\,\dot{x}^s\right)$$

und

(2.9)
$$g^*(x,\dot{x}) = g\left(x^r, \frac{1}{\sqrt{g^*(x,\dot{x})}}\, g^*_{rs}(x,\dot{x})\,\dot{x}^s\right).$$

Durch die Gleichungen (2.1) und (2.2) — bzw. statt (2.2) die Gleichung (2.3) — werden die Grundelemente des Finslerschen und des Cartanschen Raumes einander zugeordnet. Die Annahme, dass die metrischen Grundtensoren $g^*_{ij}(x,\dot{x})$ und $g_{ij}(x,\mu)$ in entsprechenden Elementen beider Räume einander gleich sind, ergibt das Resultat, dass die Zuordnung, die durch (2.1), (2.3) festgelegt ist, ein-eindeutig ist.

Zum Schluss dieses Paragraphen wollen wir noch die Identität der Fundamentalfunktionen in einander entsprechenden Grundelementen $(x,\dot{x}) \longleftrightarrow (x,\mu)$ beweisen. Nach (1.2) und (1.6) bekommt man durch eine elementare Rechnung[6] auf Grund der Homogenität ersten Grades in den μ_i von $F(x,\mu)$:

$$F^2(x,\mu) = g(x,\mu)\, g^{pt}(x,\mu)\,\mu_p\,\mu_t\,.$$

Nach (2.1) wird dann:

$$F^2(x,\mu) = \frac{g(x,\mu)}{g^*(x,\dot{x})}\, g^{pt}(x,\mu)\, g^*_{pk}(x,\dot{x})\, g^*_{tr}(x,\dot{x})\,\dot{x}^k\,\dot{x}^r.$$

Beachten wir nun (2.8 a), dann wird in Hinsicht auf (2.1):

$$F^2(x,\mu) = \frac{g(x,\mu)}{g^*(x,\dot{x})}\, g^*_{kr}(x,\dot{x})\,\dot{x}^k\,\dot{x}^r\,.$$

Nach (2.7) wird wegen (1.1) und wegen der Homogenität ersten Grades von $F^*(x,\dot{x})$ in den $\dot{x}^i$

(2.10)
$$F(x,\mu) = F^*(x,\dot{x})$$

w. z. b. w.

§ 3. Untersuchung der Torsionstensoren A^*_{ijk} und A_{ijk}.

In diesem § wollen wir vor allem die Identität der Vektoren l^{*i} und l^i beweisen; dann zeigen wir, dass $A^{*i} = A^i = 0$ besteht und endlich untersuchen wir die Torsionstensoren A^*_{ijk} und A^{ijk}.

Die Gleichung (2.1) lässt sich nach (1.13) und (1.14) in der Form:

[6] Vgl. [1].

$$\frac{F(x,\mu)}{\sqrt{g(x,\mu)}}\, l_i = \frac{F^*(x,\dot{x})}{\sqrt{g^*(x,\dot{x})}}\, g^*_{ik}(x,\dot{x})\, l^{*k}$$

schreiben. Beachten wir jetzt die Identität

$$l^*_i = g^*_{ik}\, l^{*k}$$

und die Gleichungen (2.10) und (2.7 a), so folgt

$$l_i = l^*_i. \tag{3.1}$$

(3.1) drückt aus, dass der Normaleinheitsvektor l_i des Cartanschen Raumes mit dem Einheitsvektor l^*_i des Finslerschen Raumes in entsprechenden Grundelementen identisch ist. Wegen (2.6 c) ist auch

$$l^i = l^{*i}. \tag{3.2}$$

Bestimmen wir jetzt die kontravarianten Komponenten des Vektors l^i von der Gleichung (2.10). Nach (1.14) bekommt man durch Ableitung nach μ_i von (2.10)

$$l^k = \frac{1}{\sqrt{g(x,\mu)}}\, \frac{\partial F^*(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}\, \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \mu_k}, \tag{3.3}$$

wobei $\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \mu_k}$ noch aus (2.3) zu bestimmen ist. Nach (2.3) wird:

$$\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \mu_k} = \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \mu_k}\, g^{is}\mu_s + \sqrt{g}\,\frac{\partial g^{is}}{\partial \mu_k}\,\mu_s + \sqrt{g}\, g^{ik}. \tag{3.4}$$

Die Argumente von g und die g^{is} sind natürlich (x^r, μ_r). Beachten wir jetzt, dass nach (1.11)

$$A^k = \frac{F}{2}\,\frac{1}{(\sqrt{g})^3}\,\frac{\partial g}{\partial \mu_k},$$

und nach (1.5), (1.7) und (1.14)

$$A^{iok} = A^{isk}\, l_s = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial g^{is}}{\partial \mu_k}\,\mu_s$$

besteht, so bekommt man aus (3.4)

$$\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \mu_k} = \frac{g}{F}\, A^k g^{is}\mu_s - 2\sqrt{g}\, A^{iok} + \sqrt{g}\, g^{ik}. \tag{3.5}$$

Man hat noch

$$g^{is}\mu_s = \frac{F}{\sqrt{g}}\, l^i;$$

somit wird aus (3.5) in Beachtung der Gleichung (1.16 a)

$$\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \mu_k} = -\sqrt{g}\,(A^{iok} - g^{ik}). \tag{3.6}$$

Setzen wir nun (3.6) in (3.3) ein, so wird in Hinsicht auf (2.6 c)

$$l^k = l^{*k} - l_i^* A^{iok}.$$

Diese Gleichung gibt dann nach (3.1), (3.2) und (1.16 a)

$$A^k = \frac{F}{g^{3/2}} \frac{\partial g}{\partial \mu_k} = 0. \tag{3.7}$$

Die Gleichung (3.6) reduziert sich wegen (1.16 a) und (3.7) auf

$$\frac{\partial \dot{x}^j}{\partial \mu_k} = \sqrt{g}\, g^{ik}, \tag{3.8}$$

Mit Hilfe der Gleichung (2.7 a) können wir sofort beweisen, dass auch der Tensor A_i^* des Finslerschen Raumes verschwindet. Nach (2.7 a) ist nämlich:

$$\frac{\partial g^*(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial g}{\partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial \dot{x}^i}.$$

wo $\frac{\partial \mu_k}{\partial \dot{x}^i}$ nach (2.1) zu berechnen ist. Diese Gleichung gibt aber, auf Grund von (3.7) in Hinsicht auf die Gleichung (1.9):

$$A_i^* = \frac{1}{2} \frac{F^*}{g^*} \frac{\partial g^*}{\partial \dot{x}^i} = 0. \tag{3.9}$$

Die Gleichungen (3.7) (3.9) bedeuten geometrisch, dass *in diejenigen Cartanschen und Finslerschen Räumen, deren Grundelemente* (x, μ) *und* $(x, \dot{x})$ *mit der im § 2. angegebenen Methode zueinander geordnet werden können, ein Rauminhalt von der Form*

$$V = \int_{(n)} \sqrt{g}\, dx^1\, dx^2 \ldots dx^n$$

bzw.

$$V^* = \int_{(n)} \sqrt{g^*}\, dx^1\, dx^2 \ldots dx^n$$

existiert. (Vgl. die Arbeit [2]. § 1.)

Die metrische Dualität von Cartanschen und Finslerschen Räumen, für die $A^k = 0$ besteht, wurde von L. Berwald untersucht.[7] Die Zuordnung der Hyperflächenelemente hat Berwald durch

$$\dot{x}^i = \frac{F}{\sqrt{g}}\,(l^i - A^i),$$

[7] Vgl. [2] S. 148—150.

oder wegen $A^i = 0$, durch

$$\dot{x}^i = \frac{F}{\sqrt{g}} l^i$$

angegeben. Bei dieser Zuordnung, die von der unsrigen etwas verschieden ist, konnte auch er die Identität der metrischen und der Einheitsvektoren erweisen. Berwald hat dabei die Annahme $A^k = 0$ gemacht, die wir aus anderen Forderungen ableiten konnten.

Wir werden noch in diesem §. die Identität der Torsionstensoren $\overset{*}{A}_{ijk}$ und A_{ijk} in entsprechenden Grundelementen zeigen. Differentiert man (2.6 c), so wird wegen (3.8):

$$\frac{\partial g^{pt}}{\partial \mu_s} = \frac{\partial g^{*pt}}{\partial \dot{x}^r} \sqrt{g}\, g^{rs}.$$

Nach (1.5) und (1.7) bekommt man aus dieser Gleichung:

$$A^{pts} = -\frac{F}{2} \frac{\partial g^{*pt}}{\partial \dot{x}^r} g^{*rs}. \tag{3.10}$$

Nun ist wegen (1.8) und (1.4)

$$-\frac{1}{2} \overset{*}{g}_{ps} \frac{\partial g^{*pt}}{\partial \dot{x}^r} = \frac{1}{2} \frac{\partial \overset{*}{g}_{ps}}{\partial \dot{x}^r} g^{*pt} = C^{*t}{}_{rs},$$

die nach Überschiebung mit g^{*sk}

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial g^{*kt}}{\partial \dot{x}^r} = C^{*tk}_{r}$$

ergibt. Diese Identität gibt mit den Gleichungen (3.10), (2.6 c), (2.10) und (1.3) zusammen

$$A^{pts} = A^{*pts}$$

w. z. b. w.

Wir können also behaupten: *die Torsionstensoren der dualen Finslerschen und Cartanschen Räume stimmen in ihren einander entsprechenden Grundelementen überein.*

Unter dualen Räume verstehen wir dabei diejenigen Finslerschen und Cartanschen Räume, deren Grundelemente $(x, \dot{x})$ und (x, μ) durch (2.1) und (2.3) einander zugeordnet sind.

§ 4. Der oskulierende Riemannsche Raum.

In einem Finslerschen Raum hat Herr O. Varga zu einer Linienelementfolge

$$x^i = x^i(t) \tag{4.1 a}$$

$$\dot{x}^i = \dot{x}^i(t) \qquad (t_0 \leqq t \leqq t_1) \tag{4.1 b}$$

einen sogenannten oskulierenden Riemannschen Raum konstruiert[8], und mit Hilfe des oskulierenden Raumes konnte er das invariante Differential im Finslerschen Raum definieren. Im folgenden zeigen wir der bequemeren Lesbarkeit halber, vor allem die Konstruktion des oskulierenden Riemannschen Raumes; nachher wollen wir auf Grund von (2.1) auch zu dem Cartanschen Raum einen oskulierenden Riemannschen Raum konstruieren und zeigen, dass der oskulierende Riemannsche Raum mit dem des Finslerschen Raumes übereinstimmt. Wir behaupten also:

Der oskulierende Riemannsche Raum eines Cartanschen Raumes ist mit dem des dualen Finslerschen Raumes identisch.

Mit Hilfe des gemeinsamen oskulierenden Riemannschen Raumes werden wir die Krümmungstensoren und die invarianten Differentiale des Cartanschen und des Finslerschen Raumes leicht untersuchen können.

Legen wir durch jedes Linienelement $(x^i(t), \dot{x}^i(t))$ der Folge (4.1) eine Extremale des Variationsproblems

$$\delta s = \int_{\alpha}^{\beta} F^* \left(x(\tau), \frac{dx}{d\tau} \right) d\tau$$

hindurch. Somit haben wir eine einparametrige Schar von Extremalen erhalten, die einen gewissen Punktbereich $\mathfrak{B}$ des n-dimensionalen Punktraumes x^i schlicht bedecken. Wählen wir jetzt auf allen Extremalen die Bogenlänge

$$s = \int F^* \left(x(\tau), \frac{dx}{d\tau} \right) d\tau$$

als Parameter, dann können wir den Tangentenvektor der Extremalen in Bezug auf diesen Parameter bestimmen. Es lässt sich also zu jedem Punkt x^i von $\mathfrak{B}$ eindeutig eine Richtung r^i zuordnen, nämlich die Richtung des Tangentenvektors der durch x^i gehenden Extremale. Es ist somit

$$r^i = r^i(x^1, x^2, \ldots, x^n). \tag{4.2}$$

Wir wollen die Linienelemente (4.1 b) gleich so gewählt denken, dass die $\dot{x}^i(t)$ mit den Ableitungen der Extremalen nach der Bogenlänge s zusammenfallen. Das ergibt die Identitäten:

$$\dot{x}^i(t) = r^i(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)). \tag{4.3}$$

Substituieren wir nun $r^i = r^i(x)$ in den metrischen Grundtensor $g^*_{ik}(x, \dot{x})$ des Finslerschen Raumes, dann können wir die Funktionen:

[8] Vgl. [5], §. 2.

$$\gamma^*_{ik}(x) = g^*_{ik}(x, r(x)), \quad \gamma^{*ik}(x) = g^{*ik}(x, r(x)) \tag{4.4}$$

als metrischen Grundtensor eines Riemannschen Raumes in $\mathfrak{B}$ betrachten. Dieser Riemannsche Raum ist der längs (4.1) oskulierende Riemannsche Raum.

Es sei noch folgende wichtige Eigenschaft des Feldvektors r^i hervorgehoben: längs (4.1) bestehen identisch die Relationen[9]

$$\frac{\partial r^i}{\partial x^l} + \overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{k\,l}^{\,i}\, r^k = 0, \tag{4.5}$$

wo die $\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{k\,l}^{\,i}$ die Christoffelschen Symbole des Tensors $\gamma^*_{ik}(x)$ bedeuten. Es ist

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{k\,l}^{\,i} = \gamma^{*is}\, \overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ksl} \tag{4.6 a}$$

mit

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ksl}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma^*_{ks}}{\partial x^l} + \frac{\partial \gamma^*_{sl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \gamma^*_{kl}}{\partial x^s}\right). \tag{4.6 b}$$

Jetzt gehen wir zur Konstruktion des oskulierenden Riemannschen Raumes der Cartanschen Geometrie über. Dabei setzen wir an, dass die Hyperflächenelemente (x, μ) der Cartanschen Geometrie durch (2.1) zu den Linienelementen $(x, \dot{x})$ des dualen Finslerschen Raumes geordnet sind. Die Gleichungen (4.1) und (2.1) bestimmen hiernach eine Hyperflächenelementfolge von der Form:

$$\left.\begin{aligned} &x^i = x^i(t) &&(4.7\text{ a})\\ &\mu_i = \mu_i(t) = \frac{1}{\sqrt{g^*(x(t), \dot{x}(t))}}\, g^*_{ik}(x(t), \dot{x}(t))\, \dot{x}^k(t) &&(4.7\text{ b})\end{aligned}\right\}\ (t_0 \leqq t \leqq t_1).$$

$\mu_i(t)$ hängt wegen (4.7 b) nur von $x^i(t)$ und $\dot{x}^i(t)$, also von der Linienelementfolge (4.1) ab. Wenn wir die Gleichungen (4.2), (4.3) und (4.4) beachten, können wir die Hyperflächenelementfolge (4.7) über die Kurve (4.7 a) hinaus fortsetzen. Es wird im $\mathfrak{B}$:

$$\mu_i = \mu_i(t) = \frac{1}{\sqrt{\gamma^*(x)}}\, \gamma^*_{ik}(x)\, r^k(x). \tag{4.8}$$

Führen wir nun $\mu_i(x)$ von der Gleichung (4.8) in den metrischen Grundtensor $g_{ik}(x, \mu)$ des Cartanschen Raumes ein, so wird:

$$\gamma^{ik}(x) = g^{ik}(x, \mu(x)) = g^{ik}\left(x^s, \frac{1}{\sqrt{\gamma^*(x)}}\, \gamma^*_{sp}(x)\, r^p(x)\right) \tag{4.9 a}$$

$$\gamma_{ik}(x) = g_{ik}(x, \mu(x)) = g_{ik}\left(x^s, \frac{1}{\sqrt{\gamma^*(x)}}\, \gamma^*_{sp}(x)\, r^p(x)\right), \tag{4.9 b}$$

[9] Vgl. [5] Formel (2.18).

wo $\gamma^*(x)$ selbstverständlich die Determinante mit den Elementen $\gamma_{ik}(x)$ bedeutet. Diese Grössen, nämlich die $\gamma^{ik}(x)$ und $\gamma_{ik}(x)$ sind nicht nur längs der Hyperflächenelementfolge (4.7) definiert, sondern im ganzen Bereich $\mathfrak{B}$, wo die $r^i(x)$ eindeutig bestimmt sind. Dabei soll bemerkt werden, dass die $\mu_i(x)$ eben die durch (2.1) zu der Richtung $r^i(x)$ zugeordneten Hyperflächenelemente bedeuten.

Die $\gamma_{ik}(x)$ betrachten wir nun als die Komponenten eines metrischen Grundtensors, nämlich als Komponenten des metrischen Grundtensors des längs (4.7) oskulierenden Riemannschen Raumes; damit haben wir die Konstruktion beendet. $\gamma_{ik}(x)$ kann wirklich als ein metrischer Fundamentaltensor betrachtet werden, denn die quadratische Form der Hilfsveränderlichen z^r:

$$\gamma_{ik} z^i z^k$$

ist wegen (4.9 b) positiv definit.

Wir können beweisen, dass im Bereich $\mathfrak{B}$ die Relation

$$\gamma_{ij}(x) = \overset{*}{\gamma}_{ij}(x) \tag{4.10}$$

gültig ist, und das bedeutet die Identität der oskulierenden Räume. Nach (2.6 c) besteht für die entsprechenden Elemente $\mu_i(x)$, $r^i(x)$

$$g^{ij}(x, \mu(x)) = g^{*ij}(x, r(x))$$

und dann bekommt man nach (4.9 a) und (4.4), dass

$$\gamma^{ij}(x) = g^{*ij}(x, r(x)) = \gamma^{*ij}(x) \tag{4.11 a}$$

ist, w. z. b. w.

Ebenso kann man auch aus (4.9 b)

$$\gamma_{ik}(x) = \overset{*}{\gamma}_{ik}(x) \tag{4.11 b}$$

beweisen.

Wir wollen noch bemerken, dass selbstverständlich (4.5) auch bezüglich der kovarianten Komponenten des Vektors $r(x)$ gültig ist; dass also

$$\frac{\partial r_s}{\partial x^l} - \overset{(\varphi)}{\Gamma}{}_{s}{}^{t}{}_{l}\, r_t = 0 \tag{4.12}$$

besteht. (4.12) ist übrigens aus (4.5) sehr einfach abzuleiten; nur braucht man in (4.5)

$$r^i = \gamma^{*it} r_t$$

zu substituieren, dann mit $\overset{*}{\gamma}_{is}$ überschieben und endlich (4.6) und

$$\frac{\partial \gamma^{*it}}{\partial x^l} \overset{*}{\gamma}_{is} = -\gamma^{*kt} \frac{\partial \overset{*}{\gamma}_{ks}}{\partial x^l}$$

benutzen.

§ 5. Identität der Krümmungstensoren und der invarianten Differentiale.

In diesem Paragraphen beweisen wir:

Satz I. *Der Krümmungstensor* $\overset{(\varrho)}{R_i}{}^j{}_{kl}$ *des längs* (4.1) *oskulierenden Riemannschen Raumes ist mit dem Hauptkrümmungstensor* $T_i^{*j}{}_{kl}$ *des Finslerschen Raumes identisch, falls noch längs* (4.1) *die Gleichung*

$$\text{(5.1 a)} \qquad \frac{\partial^2 r^s}{\partial x^k \partial x^l} = -\frac{\partial^2 G^s}{\partial x^l \partial \dot{x}^k} - \frac{\partial^2 G^s}{\partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^t}\frac{\partial r^t}{\partial x^l} = -\frac{\partial^2 G^s}{\partial x^l \partial \dot{x}^k} + \frac{\partial^2 G^s}{\partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^t}\frac{\partial G^t}{\partial \dot{x}^l}$$

besteht. Dabei sind die G^s die Extremalen des Finslerschen Raumes bestimmenden Funktionen:

$$G^s = g^{*is} G_i\,; \quad G_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F^{*2}}{\partial \dot{x}^i \partial x^r}\dot{x}^r - \frac{\partial^2 F^{*2}}{\partial x^i}\right).$$

(Bei G^s lassen wir den „*" weg, da es kein Missverständniss möglich ist.)

Satz II. *Der Krümmungstensor* $\overset{(\varrho)}{R_i}{}^j{}_{kl}$ *des längs* (4.7) *oskulierenden Riemannschen Raumes ist mit dem Krümmungstensor* $\bar{R}_i{}^j{}_{kl}$ *des Cartanschen Raumes identisch, falls längs* (4.7)

$$\text{(5.1 b)} \qquad \frac{\partial^2 \mu_s}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{F}{\sqrt{g}}\Gamma_{soj}\right) + \frac{\partial}{\partial \mu_t}\left(\frac{F}{\sqrt{g}}\Gamma_{soj}\right)\frac{F}{\sqrt{g}}\Gamma_{tok} = \frac{\partial \dfrac{F}{\sqrt{g}}}{\partial x^k}\Gamma_{soj} + \frac{F}{\sqrt{g}}\frac{\partial \Gamma_{soj}}{\partial x^k} + \frac{F}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \mu_t}\left(\frac{F}{\sqrt{g}}\Gamma_{soj}\right)\cdot \Gamma_{tok}$$

besteht.

Dabei soll $T_i^{*j}{}_{kl}(x, \dot{x})$ und $\bar{R}_i{}^j{}_{kl}(x, \mu)$ längs der Linienelementfolge (4.1) bzw. längs der Hyperflächenelementfolge (4.7) genommen werden. Aus den Sätzen I und II folgt:

Satz III. *Ist zur Linienelementfolge* (4.1) *die Hyperelementfolge* (4.7) *zugeordnet, dann stimmen in den entsprechenden Grundelementen von* (4.1) *und* (4.7) *der Hauptkrümmungstensor* $T_i^{*j}{}_{kl}$ *und der Tensor* $\bar{R}_i{}^j{}_{kl}$ *überein.* (Selbstverständlich müssen (5.1 a) und (5.1 b) erfüllt sein.)

Endlich beweisen wir:

Satz IV. *Längs* (4.1), *bzw. längs der entsprechenden Hyperflächenelementfolge* (4.7) *ist das invariante Differential eines Vektors* ξ^i *mit dem invarianten Differential des oskulierenden Riemannschen Raumes identisch.*

Den ersten Teil des Satzes IV hat schon Herr O. Varga erwiesen (vgl. [5]), denn er hat das invariante Differential des Finslerschen Raumes eben durch das invariante Differential des längs (4.1) oskulierenden Riemannschen Raumes definiert. Somit brauchen wir nur nachzuweisen, dass das invariante Differential des oskulierenden Riemannschen Raumes mit dem des Cartanschen Raumes identisch ist.

In die Gleichung (4.6 b) substituieren wir die $\overset{*}{\gamma}_{pq}(x)$ aus (4.4); es wird:

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ksl}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overset{*}{g}_{ks}}{\partial x^l} + \frac{\partial \overset{*}{g}_{sl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \overset{*}{g}_{kl}}{\partial x^s}\right) + \tag{5.2}$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overset{*}{g}_{ks}}{\partial r^t}\frac{\partial r^t}{\partial x^l} + \frac{\partial \overset{*}{g}_{sl}}{\partial r^t}\frac{\partial r^t}{\partial x^k} - \frac{\partial \overset{*}{g}_{kl}}{\partial r^t}\frac{\partial r^t}{\partial x^s}\right);$$

nun ist längs (4.1 a)[10] nach einer längeren Rechnung:

$$\frac{\partial r^t}{\partial x^k} = -\frac{\partial G^t}{\partial \dot{x}^k}, \tag{5.3}$$

wo die G^t die Extremalen des Finslerschen Raumes bestimmen. Sie sind in den $\dot{x}^i$ homogen von zweiter Dimension. Führt man die Werte $\dfrac{\partial r^t}{\partial x^k}$ von (5.3) in die Gleichung (5.2) ein, so wird wegen (4.4):

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{k\,l}^{\,i}(x) = \overset{(*)}{\Gamma}{}_{k\,l}^{*i}(x, \dot{x}). \tag{5.4}$$

Die Gleichung (5.4) hat selbstverständlich nur längs (4.1) Gültigkeit. Der Krümmungstensor des oskulierenden Riemannschen Raumes ist:

$$\overset{(\varrho)}{R}{}_{i\,kl}^{\,j} = \frac{\partial \overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{i\,k}^{\,j}}{\partial x^l} - \frac{\partial \overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{i\,l}^{\,j}}{\partial x^k} + \overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{i\,k}^{\,s}\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{s\,l}^{\,j} - \overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{i\,l}^{\,s}\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{s\,k}^{\,j}. \tag{5.5}$$

Längs (4.1) ist nun

$$\dot{x}^i = r^i(x);$$

somit erhält man aus (5.2) wegen (5.1 a) und (5.3)

$$\frac{\partial \overset{(\varrho)}{\Gamma}_{pqs}}{\partial x^t} = \frac{\partial \overset{(*)}{\Gamma}{}^{*}_{pqs}}{\partial x^t} - \frac{\partial \overset{(*)}{\Gamma}{}^{*}_{pqs}}{\partial \dot{x}^i}\frac{\partial G^i}{\partial \dot{x}^t}, \tag{5.6}$$

oder mit Hilfe von (4.4) und (5.3)

[10] Vgl. [5] Gleichung (2.27).

(5.6 a) $$\frac{\partial \overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{p}{}^{q}{}_{s}}{\partial x^{t}} = \frac{\partial \overset{(*)}{\Gamma}{}^{*q}_{p\ s}}{\partial x^{t}} - \frac{\partial \overset{(*)}{\Gamma}{}^{*q}_{p\ s}}{\partial \dot{x}^{i}} \frac{\partial G^{i}}{\partial \dot{x}^{t}}.$$

(S. die Rechnungen im Anhang.)

Führen wir jetzt die Grössen $\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{p}{}^{q}{}_{s}$ und $\dfrac{\partial \overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{p}{}^{q}{}_{s}}{\partial x^{t}}$ von (5.4) und von (5.6 a) in die Gleichung (5.5) ein, so bekommen wir das Ergebnis in Hinsicht auf (1.19) und (1.18), dass längs (4.1)

(5.7) $$\overset{(\varrho)}{R}{}_{i}{}^{j}{}_{kl} = T^{*j}_{i\ kl}$$

besteht. Damit haben wir die Gültigkeit von Satz I bewiesen.

Um den Satz II zu beweisen, wollen wir erst erweisen, dass längs (4.7)

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{p}{}^{q}{}_{r}\,(x) = \Gamma^{*q}_{p\ r}\,(x, \mu\,(x))$$

besteht. Beachten wir, dass im Bereich $\mathfrak{B}$ also auch längs (4.7)

$$\mu_{t} = \mu_{t}\,(x)$$

gültig ist. Nachher folgt wegen (4.11 b) und (4.9 b)

(5.8) $$\overset{*}{\gamma}_{ik}\,(x) = g_{ik}\,(x, \mu\,(x))$$

es wird also nach (4.6 b):

(5.9 a) $$\overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ksl}\,(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ks}}{\partial x^{l}} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{s}}\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ks}}{\partial \mu_{t}}\frac{\partial \mu_{t}}{\partial x^{l}} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial \mu_{t}}\frac{\partial \mu_{t}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial \mu_{t}}\frac{\partial \mu_{t}}{\partial x^{s}}\right).$$

Diese Gleichung kann man wegen

$$A_{pq}{}^{r} = \frac{1}{2}\frac{F}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{pq}}{\partial \mu_{r}}$$

auch in der Form (in Beachtung von (4.9 a)):

(5.9) $$\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{k}{}^{i}{}_{l} = \frac{1}{2}g^{si}\left(\frac{\partial g_{ks}}{\partial x^{l}} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{s}}\right) + \\ + \frac{\sqrt{g}}{F}\left(A_{k}{}^{ip}\frac{\partial \mu_{p}}{\partial x^{l}} + A_{l}{}^{ip}\frac{\partial \mu_{p}}{\partial x^{k}} - g^{si}A_{kl}{}^{p}\frac{\partial \mu_{p}}{\partial x^{s}}\right).$$

schreiben.

Überschieben wir diese Gleichung mit

(5.10) $$r_{i} = \sqrt{g}\,\mu_{i}$$

die nach (4.8) und (5.8) im Bereich $\mathfrak{B}$ besteht, und beachten wir, dass (3.7) und (1.16 a)

$$A_p{}^{qt}\,\mu_q = 0$$

ergibt, so wird aus (5.9):

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_k{}^i{}_l\, r_i = \frac{\sqrt{g}}{2} g^{si}\left(\frac{\partial g_{ks}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^s}\right)\mu_i - \frac{g}{F} g^{si} A_{kl}{}^p \frac{\partial \mu_p}{\partial x^s}\mu_i .$$

Diese Gleichung kann man noch mittels

$$\mu_i = \frac{F}{\sqrt{g}}\, l_i$$

etwas umformen:

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_k{}^t{}_l\, r_t = \frac{F}{2}\left(\frac{\partial g_{ks}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^s}\right) l^s - \sqrt{g}\, A_{kl}{}^t \frac{\partial \mu_t}{\partial x^s} l^s . \tag{5.11}$$

Die Grössen Γ_{kol} des Cartanschen Raumes mit $A^i = 0$ sind:

$$\Gamma_{kol} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kt}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{tl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^t}\right) l^t - \frac{1}{2} A_{lk}{}^t \frac{\partial g_{sp}}{\partial x^t}\, l^s\, l^p . \tag{5.12}$$

Nach (4.12) und (5.10) wird

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^j}\mu_s + \sqrt{g}\frac{\partial \mu_s}{\partial x^j} - \sqrt{g}\,\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_s{}^k{}_j\,\mu_k = 0.$$

Aus dieser Gleichung bekommt man nach Überschiebung mit l^j auf Grund von (5.10) und wegen $A_{rp}{}^q\, l^r = 0$

$$\frac{\partial \mu_s}{\partial x^j} l^j = \frac{F}{\sqrt{g}}\left(\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{skj}\, l^k\, l^j - \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^j} l_s\, l^j\right) =$$
$$= \frac{F}{\sqrt{g}}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^s} l^k\, l^j - \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^j} l_s\, l^j\right).$$

Stezen wir dies in die Gleichung (5.11) ein, dann wird wegen $A_{kl}{}^t\, l_t = 0$

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_k{}^i{}_l\, r_i = F\,\Gamma_{kol},$$

wie man das durch Vergleich mit (5.12) sofort bestätigen kann.

Nach (4.12) und (5.10) wird wegen $A^k = 0$

$$\frac{\partial \mu_s}{\partial x^l} = \frac{F}{\sqrt{g}}\Gamma_{sol} - \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^l}\mu_s . \tag{5.13}$$

Die Gleichungen (5.13) und (5.9) ergeben die gewünschte Identität:

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{k}{}^{i}{}_{l} = \Gamma^{*i}_{k\ l}. \tag{5.14}$$

Die Gleichung (5.14) besteht also längs (4.7).

Mit Hilfe von (5.1 b) und (5.13) bekommt man aus (5.9 a) die Gleichung:

$$\frac{\partial \overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ksl}}{\partial x^i} = \frac{\partial \Gamma^*_{ksl}}{\partial x^i} + \frac{\partial \Gamma^*_{ksl}}{\partial \mu_t}\frac{\partial \mu_t}{\partial x^i} \tag{5.15}$$ [11]

(die ausführliche Rechnung s. im Anhang), oder mit Hilfe von (4. 9 a)

$$\frac{\partial \overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{k}{}^{s}{}_{l}}{\partial x^i} = \frac{\partial \Gamma^{*s}_{k\ l}}{\partial x^i} + \frac{\partial \Gamma^{*s}_{k\ l}}{\partial \mu_t}\frac{\partial \mu_t}{\partial x^i}.$$

Substituieren wir diese Werte in (5.5), so wird nach (1.20) längs der Hyperflächenelementfolge (4.7)

$$\overset{(\varrho)}{R}{}_{i}{}^{j}{}_{kl} = \bar{R}_{i}{}^{j}{}_{kl}.$$

Damit haben wir die Sätze II und III bewiesen.

Es sei der Vektor $\xi^i = \xi^i(x, \mu)$ des Cartanschen Raumes gegeben. Bilden wir das invariante Differential von ξ^i längs der Hyperflächenelementfolge (4.7) im längs (4.7) oskulierenden Riemannschen Raum. Es wird:

$$\frac{D\xi^i}{dt} = \frac{d\xi^i}{dt} + \overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{j}{}^{i}{}_{k}\,\xi^j\,\frac{dx^k}{dt}. \tag{5.16}$$

Dabei sind die Grössen im (5.16) längs (4.7) zu bilden. Wegen der Gleichungen (4.8) und (4.7) wird längs (4.7)

$$\mu_i(x(t)) = \mu_i(t),$$

$$\frac{\partial \mu_p}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} = \frac{d\mu_p}{dt};$$

somit bekommt man nach (5.9) und (5.13):

$$\frac{D\xi^i}{dt} = \frac{d\xi^i}{dt} + C_j^{is}\,\xi^j\,\frac{d\mu_s}{dt} + \Gamma_j{}^i{}_s\,\xi^j\,\frac{dx^s}{dt} \tag{5.17}$$

mit

$$\Gamma_j{}^i{}_s = \frac{1}{2}g^{ik}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{js}}{d x^k}\right) + A_s{}^{ip}\,\Gamma_{poj} - A_{js}{}^{p}\,g^{ik}\,\Gamma_{pok}. \tag{5.17 a}$$

Die Gleichung (5.17) gibt mit (5.17 a) eben das invariante Differential des Vektors $\xi^i(x, \mu)$ im Cartanschen Raum längs (4.7).

---

[11] Das Glied $-\dfrac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^l}\mu_s$ in der Formel (5.13) kommt wegen der Homogenität nullter Ordnung der Grössen in (5.15), sowie überhaupt im folgenden, nicht in Betracht.

Bei der Bildung des invarianten Differentials des Vektors $\xi^i(x, \mu)$ längs (4.7) haben wir (5.1 b) gar nicht benutzt. Die Relation (5.16) besteht also längs jeder Hyperflächenelementfolge des Cartanschen Raumes. Wegen dieser Eigenschaft liesse sich das invariante Differential der Vektoren eben durch den oskulierenden Riemannschen Raum in den Cartanschen Raum einführen, also ähnlich wie im Finslerschen Raum. Vgl. [5].

§ 6. Schlussbemerkungen.

Wir haben von der Gestalt der Zuordnung bewiesen, dass die Tensoren A^i, A^{*i} verschwinden. Wenn wir die Identität der metrischen Grundtensoren in entsprechenden Elementen behalten, dann müsste man die Ein-eindeutigkeit der Zuordnung fallen lassen, um einen neuen Fall zu erhalten. Es ist bemerkenswert, dass die von uns behandelte Zuordnung die Gleichung

$$A^i = A^{*i} = 0$$

mit sich bringt.

Aus unseren Ergebnissen ergibt sich, dass *die Torsionstensoren und die invarianten Differentiale in beiden Räumen übereinstimmen.* Wir haben sogar noch mehr gezeigt, nämlich dass *die invarianten Differentiale beider Räume mit dem invarianten Differential des oskulierenden Riemannschen Raumes übereinstimmen.*

Der Hauptkrümmungstensor des Finslerschen Raumes bzw. der Tensor $\bar{R}_i{}^j{}_{kl}$ des Cartanschen Raumes stimmt dagegen mit $\overset{(\varrho)}{R}_i{}^j{}_{kl}$ des oskulierenden Riemannschen Raumes längs einer Linienelementfolge bzw. Hyperelementfolge nur dann überein, wenn (5.1 a) bzw. (5.1 b) erfüllt ist. Wegen

$$\frac{\partial^2 r^s}{\partial x^k\, \partial x^l} - \frac{\partial^2 r^s}{\partial x^l\, \partial x^k} = 0$$

folgt aus (5.1 a) unmittelbar, dass längs der Linienelementfolge (4.1) die Gleichung:

$$R^{*s}_{o\ kl} = \frac{1}{F^*}\left(\frac{\partial^2 G^s}{\partial x^l\, \partial \dot{x}^k} - \frac{\partial^2 G^s}{\partial x^k\, \partial \dot{x}^l} + \frac{\partial^2 G^s}{\partial \dot{x}^l\, \partial \dot{x}^t}\frac{\partial G^t}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial^2 G^s}{\partial \dot{x}^k\, \partial \dot{x}^t}\frac{\partial G^t}{\partial \dot{x}^l}\right) = 0 \tag{6.1}$$

besteht.

Im Cartanschen Raum folgt aus der Gleichung (5.1 b), dass

$$\bar{R}_{iojk} = \frac{\partial \Gamma^*_{ioj}}{\partial x^k} + \Gamma^*_{ioj}\,\|^s\,\Gamma^*_{sok} - \left(\frac{\partial \Gamma^*_{iok}}{\partial x^j} + \Gamma^*_{iok}\,\|^s\,\Gamma^*_{soj}\right) = 0 \tag{6.2}$$

besteht. Dies kann man sofort beweisen, wenn man

$$\frac{\partial^2 \mu_s}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 \mu_s}{\partial x^k \partial x^j} = 0,$$

$$\Gamma^*_{tok} = \Gamma_{tok}$$

beachtet, und die Gleichung (5.1 b) auf die Form (vgl. den Anhang):

$$\frac{\partial^2 \mu_s}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{F}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \Gamma_{soj}}{\partial x^k} + \Gamma_{soj} \|^t \Gamma_{tok} \right)$$

bringt. Die Γ^*_{iok} stimmen übrigens nur im Fall $A^i = 0$ mit Γ_{iok} überein.

Aus der Bedingung (6.1) folgt nach (1.19), dass der Hauptkrümmungstensor mit dem Riemanncshen Krümmungstensor identisch ist. Ebenso folgt nach (1.21), dass nach (6.2) $\bar{R}_i{}^j{}_{kl} = R_i{}^j{}_{kl}$ besteht.

Anhang.

I. *Beweis der Formel* (5.6) *und* (5.15). Die Gleichung (5.2) besteht im ganzen Teilbereich $\mathfrak{B}$. Differentiert man diese Gleichung nach x^p, so wird:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ksl}}{\partial x^p} = {} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g^*_{ks}}{\partial x^l \partial x^p} + \frac{\partial^2 g^*_{sl}}{\partial x^k \partial x^p} - \frac{\partial^2 g^*_{kl}}{\partial x^s \partial x^p} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g^*_{ks}}{\partial x^l \partial r^t} + \frac{\partial^2 g^*_{sl}}{\partial x^k \partial r^t} - \frac{\partial^2 g^*_{kl}}{\partial x^s \partial r^t} \right) \frac{\partial r^t}{\partial x^p} + \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g^*_{ks}}{\partial x^p \partial r^t} \frac{\partial r^t}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 g^*_{sl}}{\partial x^p \partial r^t} \frac{\partial r^t}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 g^*_{kl}}{\partial x^p \partial r^t} \frac{\partial r^t}{\partial x^s} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g^*_{ks}}{\partial r^q \partial r^t} \frac{\partial r^t}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 g^*_{sl}}{\partial r^q \partial r^t} \frac{\partial r^t}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 g^*_{kl}}{\partial r^q \partial r^t} \frac{\partial r^t}{\partial x^s} \right) \frac{\partial r^q}{\partial x^p} + \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g^*_{ks}}{\partial r^t} \frac{\partial^2 r^t}{\partial x^l \partial x^p} + \frac{\partial g^*_{sl}}{\partial r^t} \frac{\partial^2 r^t}{\partial x^k \partial x^p} - \frac{\partial g^*_{kl}}{\partial r^t} \frac{\partial^2 r^t}{\partial x^s \partial x^p} \right).
\end{aligned}$$

Wenn wir nun (5.1 a) und (5.3) beachten, so erhalten wir sofort die Gleichung (5.6). Differentiert man nach x^p die Gleichung

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}_k{}^s{}_l = \gamma^{*st} \overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ktl},$$

dann bekommt man wegen

$$\gamma^{*st}(x) = g^{*st}(x, r(x))$$

und wegen (5.6):

$$\frac{\partial \overset{(\varrho)}{\Gamma}_k{}^s{}_l}{\partial x^p} = \frac{\partial g^{*st}}{\partial x^p} \overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ktl} + g^{*st} \frac{\partial \overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ktl}}{\partial x^p} + \frac{\partial g^{*st}}{\partial r^q} \overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ktl} \frac{\partial r^q}{\partial x^p} + g^{*st} \frac{\partial \overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ktl}}{\partial r^q} \frac{\partial r^q}{\partial x^p}.$$

Beachtet man jetzt die Gleichung (5.3), so bekommt man aus dieser Gleichung eben (5.6 a).

In ganz ähnlicher weise kann man auch (5.15) beweisen, nur müssen wir die Rechnung mit (5.9 a) beginnen. Formal besteht der Unterschied darin, dass statt g^*_{st} nur g_{st} und statt r der Buchstabe μ steht. Benützen wir dann (5.1 b) und (5.13), so bekommen wir eben (5.15).

Umformung der Formel (5.1 b). Die Gleichung (5.1 b) lässt sich in der Form

$$\frac{\partial^2 \mu_s}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial \dfrac{F}{\sqrt{g}}}{\partial x^k} \Gamma_{soj} + \frac{F}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Gamma_{soj}}{\partial x^k} + \frac{F}{\sqrt{g}} \Gamma_{soj} \Gamma_{ook} + \frac{F}{\sqrt{g}} \Gamma_{soj} \|^t \Gamma_{tok}$$

schreiben, denn

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial \mu_t} = l^t$$

und $\sqrt{g}$ von μ_t nicht abhängt. Es ist wegen $\Gamma^*_{iok} = \Gamma_{iok} + A_{io}{}^s \Gamma_{sok} = \Gamma_{iok}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x^k} = -F \Gamma^*_{ook} + F \Gamma^{*\,m}_{m\ k},$$

$$\frac{\partial \dfrac{1}{\sqrt{g}}}{\partial x^k} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma^{*\,m}_{m\ k}. \qquad \text{(Vgl. [1].)}$$

Es wird also

$$\frac{\partial}{\partial x^k} F \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} = -\frac{F}{\sqrt{g}} \Gamma^*_{ook} = -\frac{F}{\sqrt{g}} \Gamma_{ook}$$

und somit:

$$\frac{\partial^2 \mu_s}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{F}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \Gamma_{soj}}{\partial x^k} + \Gamma_{soj} \|^t \Gamma_{tok} \right)$$

w. z. b. w.

Schriftenverzeichnis.

[1] L. Berwald, *Über die n-dimensionalen Cartanschen Räume und eine Normalform der zweiten Variation eines (n-1)-dimensionalen Oberflächenintegrals.* Acta Math. 71. (1939), 191—248.

[2] ——, *Über Finslersche und Cartansche Geometrie II.* Compositio Math. 7. (1940), 141—176.

[3] E. Cartan, *Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire.* Actualités scientifiques et industrielles. 72. Paris, Hermann & Cie. (1933).

[4] ——, *Les espaces de Finsler.* Actualités scientifiques et industrielles. 79. Paris Hermann & Cie. (1934).

[5] O. Varga, *Zur Herleitung des invarianten Differentials in Finslerschen Räumen.* Monatshefte für Math. und Phys. 50. (1941), 165—175.