WOHLORDNUNG

VON

FRANZ VON KREBEK

in Greifswald

OSKAR PERRON ZUM 75. GEBURTSTAG

Übersicht

Cantor bezeichnete die Herstellbarkeit von Wohlordnung als Denkgesetz. Einen ersten Beweis für die Herstellbarkeit von Wohlordnung gab Zermelo 1904 in *Math. Ann.* 59 und vier Jahre später einen zweiten Beweis *ibid.* 65. Den Angelpunkt beider Beweise bildet sein Auswahlaxiom. Dieses Postulat wurde anfangs heftig angefeindet, während heute die meisten Mathematiker von seiner Unerlässlichkeit überzeugt sind. Eine Analyse des Abzählens legt eine Revision nahe.

In seinem ersten Beweis berief sich Zermelo, *l. c.* S. 515 oben, darauf, dass von zwei wohlgeordneten Mengen die eine einem Abschnitt der anderen ähnlich ist. Das Heranziehen von Ordnungszahlen verhalf zum Beweis. Wie die Bemerkung von Hausdorff in *Grundz. d. Mengenl.* 1914, S. 136: „Wir ... wollen ... den zweiten Zermeloschen Beweis ... reproduzieren, weil er den grossen Vorzug hat, von der Theorie der Ordnungszahlen nichts vorauszusetzen" verrät, empfand man das Heranziehen von Ordnungszahlen dabei als Mangel, dem erst Kneser 1950 in *Math. Z.* 53 abhalf.

Anfang der Wohlordnung

E sei eine beliebige Menge. Man kann sie immer teilweise ordnen, indem man nach Belieben ein erstes Element a, hinterher ein zweites Element b auszeichnet und $a<b$ erklärt. Zusätzlich verlangt man noch, dass a und b allen vergleichbaren Elementen von E vorangehen, und weiter, dass letztere Elemente auch noch untereinander vergleichbar sind.

Anfangsstück einer teilweise geordneten Menge E heisst die Teilmenge A, wenn aus $x \in E$, $y \in A$, $x<y$ stets $x \in A$ folgt.

Der Abschnitt A_x besteht aus allen x vorangehenden Elementen von E.

Wohlgeordnet heisst eine Menge, wenn sie vollständig geordnet ist, und jede nichtleere Teilmenge ein erstes Element besitzt.

Sind L, M, ... auf Grund der Teilordnung in E wohlgeordnete Anfangsstücke, dann nennen wir sie Ketten. Die Mengen $\{a\}$ und $\{a, b\}$ sind Ketten.

Die echten Anfangsstücke einer Kette L sind infolge der Wohlordnung in L Abschnitte. Aus $x < y$ folgt dann $L_x \subset L_y$, so dass nach Berücksichtigung von $L_y \subseteqq L$ die Anfangsstücke einer Kette wohlgeordnete Mengen bilden im Sinne des Enthaltenseins.

Ist daher ein Anfangsstück von L in M nicht enthalten, so muss es ein erstes Anfangsstück mit dieser Eigenschaft geben. Es besitzt wegen $a \in L \cap M$ seinerseits echte Anfangsstücke, die dann aber zugleich Anfangsstücke von M sind. Ihre Vereinigungsmenge ist selber ein Anfangsstück A^*, das in M enthalten ist. Wäre A^* echte Teilmenge von M, dann müsste $M - A^*$ infolge der Wohlordnung in M ein erstes Element m haben. Das erste Element von $L - A^*$ mit l bezeichnet, sind l und m nach unseren Voraussetzungen über die Teilordnung vergleichbar. Wäre $m < l$, müsste $m \in L_l$ sein, da L Anfangsstück ist, woraus dann widersinnig $m \in A^*$ folgen würde. Wäre $l < m$, müsste $l \in M_m$ sein, da M Anfangsstück ist, daher weiter widersinnig $l \in A^*$. So bleibt nur noch die Möglichkeit $l = m$ offen. A^* wäre dann Abschnitt und nicht das grösste in M enthaltene Anfangsstück von L. Diesen Widersprüchen entgeht man allein durch Zugeben der Gleichheit von A^* und M. Es gilt also $A^* = M \subset L$.

Der andere Fall ist der, dass jedes Anfangsstück von L, insbesondere L selbst, in M enthalten ist. Wir erkennen so, dass von zwei Ketten die eine in der anderen enthalten sein muss.

Die Vereinigungsmenge K aller Ketten ist wohlgeordnet. H sei Teilmenge von K, h Element von H, dann ist h in einer Kette L enthalten. Infolge der Wohlordnung hat $H \cap L$ in L ein erstes Element h^*. Ist h' ein beliebiges Element von H, dann sind zwei Fälle möglich. Im Falle $h' \in H \cap L$ gilt $h^* \leqq h'$, im Falle $h' \notin H \cap L$ aber, weil dann $h' \in M$, M eine Kette, $M \not\subset L$ und, da von zwei Ketten die eine die andere enthält, $L \subset M$ sein muss, $h^* < h'$.

Weiterhin ist K Anfangsstück, also schliesslich selbst Kette.

Abschluss der Wohlordnung

Ist die Kette F echte Teilmenge von E, dann lässt sich die Wohlordnung von F hinaus in E fortsetzen. Man zeichne in $E - F$ ein Element f aus. Nimmt f an der Teilordnung teil, dann ist es grösser als die Elemente von F, weil F Kette und damit Anfangsstück ist, das mit jedem Element alle kleineren Elemente enthält. Nimmt aber f an der Teilordnung nicht teil, dann erkläre man es für grösser als die Elemente von E, die an der Teilordnung teilnehmen. Diese Erweiterung der Teilordnung genügt sämtlichen Forderungen, die an die Teilordnung gestellt wurden. $F \cup f$ ist eine wohlgeordnete Menge, die F als echte Teilmenge enthält.

Um $F \cup f$ als Kette ansprechen zu können, streiche man in $E - (F \cup f)$ die Teilordnung, soweit Elemente dieser Menge daran teilnehmen. Daraufhin darf $F \cup f$ auch noch als Anfangstück gelten und ist damit eine Kette. Um die anfängliche Teilordnung so wenig wie möglich zu zerstören, ist F mit K zu identifizieren. Ist weiter F echte Teilmenge von E, dann kann man sie ähnlich wie eben F verlängern.

Von allen verlängerten Ketten behalte man nur solche bei, die paarweise verträglich sind, welches Paar man auch bildet. Dabei soll Verträglichkeit bedeuten, dass die eine der beiden Ketten in der anderen enthalten ist, und es in ihnen keine widersprechende Ordnungsbeziehung gibt.

Auf die Vereinigungsmenge Φ der behaltenen Ketten ist aber die kurze Überlegung anwendbar, die erkennen liess, dass K wohlgeordnet war. Φ kann offenbar nicht weiter verlängert werden. Um das mit dem drittletzten Absatz in Einklang zu bringen, wird man auf die Gleichung $\Phi = E$ geführt, die eine Wohlordnung für E bedeutet.

Von der Zulässigkeit unserer Erklärung, welche verlängerten Ketten zu behalten waren, hängt es ab, ob man ohne Auswahlpostulat auskommt. Lehnt man hingegen die Berechtigung ab, so zu definieren, dann kann man die Maximalmenge behaltener Ketten aus dem vorletzten Absatz wie folgt gewinnen. Man darf die Verträglichkeit als Ordnungsbeziehung für die verlängerten Ketten ansehen und sich auf den Satz von Hausdorff *l. c.* S. 140 berufen. Der ebengenannte Satz ist jedoch dem Auswahlaxiom gleichwertig.

Um E wohlzuordnen, kann man gleich mit den Überlegungen aus diesem Abschnitt über den *Abschluss der Wohlordnung* beginnen, denen dann der vorletzte Absatz aus dem vorhergehenden Abschnitt über den *Anfang der Wohlordnung* noch hinzuzufügen ist. Doch würde man so auf das Eingehen auf ein Abzählen im Falle von unendlichen Mengen von vornherein verzichten.

Unabhängigkeit

Unsere Überlegungen machen von einem Postulat Gebrauch, das durch die Analyse des Abzählens nahegelegt wird und lautet: In jeder vorliegenden Menge lässt sich stets ein Element auszeichnen. Dieses Postulat des Abzählens ist im Auswahlpostulat enthalten.

Aus dem Nachweis der Unabhängigkeit des Auswahlaxioms von den übrigen Axiomen

Zermelos, den Fraenkel in den *Sitzungsber. Preuss. Akad.* 1922 erbrachte, können wir dann schliessen, dass unser Abzählaxiom von den übrigen Axiomen Zermelos ebenfalls unabhängig ist. Denn wir errichteten mit seiner Hilfe eine Wohlordnung, die ja dem Auswahlaxiom gleichwertig ist. Wäre unser Postulat nicht unabhängig, dann würde sich damit ein Widerspruch zum Ergebnis von Fraenkel einstellen.