ÜBER DIE MULTIPLIKATION DER KAUSALFUNKTIONEN IN DER QUANTENTHEORIE DER FELDER

VON

N. N. BOGOLIUBOW und O. S. PARASIUK

in Moskau (N. N. B.) und in Kiev (O. S. P.)

Einführung

Die verallgemeinerten Funktionen von Sobolew [1] und Schwartz [2] finden heute eine immer breitere und breitere Anwendung. In erster Reihe umfasst dieses Anwendungsgebiet die Theorie der linearen Probleme der mathematischen Physik. Bei nichtlinearen Problemen findet diese Theorie fast keine Anwendungen. Dies lässt sich wohl dadurch erklären, dass bis jetzt die Theorie der nichtlinearen Operationen mit verallgemeinerten Funktionen noch nicht ausgearbeitet ist. Die einfachste nichtlineare Operation ist die Multiplikation. Nun hat Schwartz [3] in einer seiner Arbeiten gezeigt, dass es praktisch nicht möglich ist, eine vernünftige Multiplikation im Gebiete der verallgemeinerten Funktionen zu definieren. Da aber die Operation der Multiplikation der speziellen verallgemeinerten Funktionen in der Quantentheorie der Felder eine besonders wichtige Rolle spielt, nämlich bei der Konstruktion der Streumatrix mit störungstheoretischen Methoden, so ist das Problem der Ausarbeitung einer Theorie der Multiplikation für spezielle sogenannte Kausalfunktionen ein zentrales Problem der modernen mathematischen Physik. Die Physiker haben versucht, diese Aufgabe in der folgenden Weise zu lösen. Unter Benutzung der Tatsache, dass die Fouriertransformation der Kausalfunktionen durch eine Folge gewöhnlicher Funktionen dargestellt werden kann (siehe weiter strenge Definition im § 1), versuchte man, die Fouriertransformation des Produktes zu schreiben. Dabei erschienen aber im Allgemeinen divergente Integrale, da die Funktionen unter dem Integralzeichen oft zu schnell im Unendlichen anwuchsen. Damit entstand der Wunsch, diesen divergenten Integralen einen finiten Sinn beizulegen. Bemühungen in dieser Richtung führten zur Ausarbeitung einer speziellen Subtraktionstechnik (Schwinger [4], Feynmann [5], [6], Dyson [7], Salam [8]). Bis heute aber sind die Untersuchungen auf diesem Gebiet noch nicht zu Ende gebracht. Die wichtigste diesbezügliche Arbeit [8] enthält keine strenge Definition der Subtraktionsoperation, während die Einführung der sog. Basisvariablen den praktischen Nutzen dieser Operation weitgehend beschränkt hat.

Der Beweis des Satzes, dass die Subtraktionsoperation auf endliche Resultate führt, ist nicht streng und der mathematische Sinn dieser Operation ist unklar.

Ein neuer Ansatz zur Lösung dieser Probleme wurde in den Artikeln [9] vorgeschlagen. Jedoch sind diese Arbeiten in erster Linie für Physiker bestimmt; sie enthalten keine Beweise der wichtigen Sätze, welche die Subtraktionsoperation charakterisieren. Unserer Meinung nach haben solche Sätze selbständige Bedeutung und wir haben uns daher entschieden, eine unabhängige, für Mathematiker bestimmte Darlegung zu bringen. Daneben richtet sich unser Artikel ebenfalls an Mathematiker, die die physikalische Bedeutung der Resultate begreifen wollen, ebenso wie an Physiker, denen es an einer strengen mathematische Begründung der Subtraktionsoperation gelegen ist.

Daher haben wir uns entschlossen, dem Artikel einen Anhang beizufügen, in dem ein Zusammenhang zwischen der S-Matrix-Theorie und dem Multiplikationsproblem der Kausalfunktionen hergestellt wird.

Fassen wir kurz die Resultate der Arbeit zusammen. Wie schon oben erwähnt, beschäftigen wir uns mit dem Problem der Multiplikation von Kausalfunktionen. Die Fouriertransformation oder, wie wir lieber sagen wollen, das Impulsbild solcher Funktionen wird durch die Gleichung

$$\tilde{\Delta}^c(k) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P(k)}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}$$

definiert, wo k den vierdimensionalen Vektor mit den Komponenten k^0, k^1, k^2, k^3, $P(k)$ ein Lorentzkovariantes Polynom und die Grenze $\varepsilon \to 0$ in der schwachen Topologie zu nehmen ist. Die Kausalfunktion $\Delta^c(x)$ wird also durch die Formel

$$\Delta^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ikx}\, \tilde{\Delta}^c(k)\, dk$$

$$kx = k^0 x^0 - k^1 x^1 - k^2 x^2 - k^3 x^3; \quad dk = dk^0\, dk^1\, dk^2\, dk^3$$

definiert, wo die Fouriertransformation im Sinne der Theorie der verallgemeinerten Funktionen zu verstehen ist (vgl. § 1). Unsere Aufgabe besteht darin, die Theorie der Produkte der Kausalfunktionen der Form

$$\prod_l \Delta_l^c(x_r - x_s)$$

zu entwickeln; hierbei bedeutet l den Index der Linien, die die Punkte x_r mit x_s verbinden (vgl. § 1). Das Problem wird in der folgenden Weise gelöst. Man konstruiert zuerst zu jeder Kausalfunktion $\Delta_l^c(x_r - x_s)$ eine Folge von regulären Lorentzinvarianten Funktionen reg $\Delta_{lM}^c(x_r - x_s)$, die bei $M \to \infty$ schwach gegen $\Delta_l^c(x_r - x_s)$ konvergiert, d. h. für jede genügend schlichte Funktion $F(x)$ gilt die Beziehung

$$\lim_{M \to \infty} \int \operatorname{reg} \Delta_{lM}^c(x)\, F(x)\, dx = \int \Delta_l^c(x)\, F(x)\, dx.$$

Jetzt wäre es natürlich, die schwache Konvergenz der Produkte

$$\prod_l \operatorname{reg} \Delta_{lM}^c(x_r - x_s); \; l = 1, 2, \ldots, L \tag{0.1}$$

zu beweisen. Der Ausdruck (0.1) konvergiert jedoch in der Regel nicht, selbst in der schwachen Topologie. Der hier vorliegende Umstand ist gerade die oben erwähnte Divergenz der Integrale. Nun lässt es sich aber beweisen, dass die Konvergenz in (0.1) besteht, sobald die schlichten Funktionen F beim Zusammenfallen irgendwelcher Argumente Null werden. Dann können wir das zu konstruierende Produkt

$$\prod_l \Delta_l^c(x_r - x_s); \qquad l = 1, 2, \ldots, L \tag{0.2}$$

als in dieser Unterklasse definiertes Funktional betrachten. Es entsteht jetzt die Aufgabe, das so gefundene Funktional auf den ganzen Raum der schlichten Funktionen auszudehnen. Solche Fortsetzungen lassen sich auf verschiedene Art und Weise bewerkstelligen; nicht alle sind für uns gleichwichtig. In der vorliegender Arbeit studieren wir eine spezielle Fortsetzung, die durch die Operation R (§ 3) realisiert wird.

Der Grund für die Wichtigkeit dieser Fortsetzung wird im Anhang erhellt. Es zeigt sich nämlich, dass die durch sie definierte Produkte zur Konstruktion der Streumatrix führen, welche den Bedingungen der Lorentzkovarianz, Unitarität und Kausalität genügt. Die Subtraktionsoperation kann hierbei als Fortsetzungsoperation erklärt werden.

Die strenge Definition dieser Operation und der strenge Beweis des Satzes, dass durch sie die Fortsetzung unseres Funktionals realisiert wird, d. h. dass in den entsprechenden Integralen die Divergenz aufgehoben wird, stellen die wichtigsten Resultate unserer Arbeit dar.

Die Arbeit besteht aus vier Paragraphen: der erste enthält eine kurze Theorie der Kausalfunktionen; im zweiten wird das Problem der Multiplikation der Kausalfunktionen diskutiert; im dritten definieren wir die Subtraktionsoperation und studieren ihre kombinatorischen Eigenschaften; im vierten werden schliesslich die wichtigsten Sätze bewiesen.

Einige Bemerkungen über die von uns benutzten Bezeichnungen:

$x_1, x_2, \ldots x_n$ bedeuten die Ortsvektoren der Punkte im vierdimensionalen Raumzeitkontinuum; $k_1, k_2, \ldots k_n$ die vierdimensionalen Impulsvektoren;

$$k x = k^0 x^0 - k^1 x^1 - k^2 x^2 - k^3 x^3, \; k^2 = (k^0)^2 - (k^1)^2 - (k^2)^2 - (k^3)^2,$$
$$x^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

die skalaren Produkte; m_i, M_i die Massen der Felderteilchen; $\delta(x)$ das Symbol der vierdimensionalen Diracschen Funktion, $d k = d k^0 \, d k^1 \, d k^2 \, d k^3$; $d x = d x^0 \, d x^1 \, d x^2 \, d x^3$.

Die Operation $\int (\ldots) \, d k$, bzw. $\int (\ldots) \, d x$, bedeutet die Integration über den ganzen vierdimensionalen Impulsvektorraum bzw. Koordinatenraum: schreiben wir

$$\iint \ldots \int (\ldots) \, d k_1 \, d k_2 \ldots d k_n, \text{ bzw. } \iint \ldots \int (\ldots) \, d x_1 \ldots d x_n,$$

so ist darunter die Integration über den ganzen entsprechenden $4n$-dimensionalen Raum zu verstehen. Weitere Bezeichnungen werden im Text eingeführt.

§ 1. Die Kausalfunktionen der Quantentheorie der Felder

Eine strenge Definition der Kausalfunktionen lässt sich mit Hilfe der Theorie der verallgemeinerten Funktionen von Sobolew [1] und Schwarz [2] geben. Es ist wohl bekannt, dass man die verallgemeinerten Funktionen, als Funktionale im Raume der ',Grundfunktionen" definiert. Dabei hängt die Klasse der verallgemeinerten Funktionen wesentlich von der Wahl dieses Raumes ab. Für unsere Zwecke ist die folgende Klasse der v. F. am bequemsten.

Sei $C(q, r, n)$ die Klasse der q-mal stetigdifferenzierbaren Funktionen $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$, für die alle Produkte der Form

$$x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \ldots x_{i_s}^{\alpha_s} \frac{\partial^p F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_{j_1}^{\beta_1} \, \partial x_{j_2}^{\beta_2} \ldots \partial x_{j_p}^{\beta_p}}$$

$$(s = 0, 1, \ldots, r; \; p = 0, 1, \ldots, q; \; \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$$

beschränkt sind.

Wir definieren für Elemente $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C(q, r, n)$ die Norm $\|F\|$ durch die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}\| F \| = \sup \left| x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \ldots x_{i_s}^{\alpha_s} \dfrac{\partial^p \; F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_{j_1}^{\beta_1} \partial x_{j_2}^{\beta_2} \ldots \partial x_{j_p}^{\beta_p}} \right| \\ (-\infty < x_i^\alpha < \infty;\ s = 0, 1, \ldots, r;\ p = 0, 1, \ldots, q;\ \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)\end{array}\right\}. \tag{1.1}$$

Man sieht leicht, dass dadurch der Raum $C(q, r, n)$ zu einem Banachschen Raume wird.

Die linearen Funktionale $K(F)$ über den Räumen $C(q, r, n)$ (q, r irgendwelche ganze positive Zahlen) sollen verallgemeinerte Funktionen heissen. Wir werden sie auch durch

$$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv K(F) \tag{1.2}$$

bezeichnen und kurz in $C(q, r, n)$ integrierbare Funktionen nennen. Es ist klar, dass wenn $K(F)$ ein lineares Funktional über dem Raume $C(q, r, n)$ ist, so ist es auch ein lineares Funktional über denjenigen $C(\bar{q}, \bar{r}, n)$, für welche $\bar{q} > q$, $\bar{r} > r$ gilt. Da $C(\bar{q}, \bar{r}, n)$ dicht in $C(q, r, n)$ ist, sobald nur $\bar{q} > q$, $\bar{r} > r$, so entstehen keine Schwierigkeiten mit der Eindeutigkeit unserer Definitionen. Selbstverständlich sind auch die gewöhnlichen Funktionen $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in diesem Sinne $C(q, r, n)$ integrierbare Funktionen, sobald nur die Integrale

$$\iint \ldots \int K(x_1, x_2, \ldots, x_n) F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n,$$

$F \in C(q, r, n)$ existieren. Wir wollen sagen, dass wir im Falle der gewöhnlichen Funktionen mit Funktionalen von dem Typ einer Funktion zu tun haben.

Mit Hilfe solcher Funktionale kann man eine neue, für uns sehr nützliche Definition der verallgemeinerten Funktionen geben. Man wähle eine schwach konvergente Folge $K_M(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $M \to \infty$ der Funktionale von dem Typ einer Funktion (d. h. für jede $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D(q, r, n)$, q, r genügend gross, möge

$$\lim_{M \to \infty} \iint \ldots \int K_M(x_1, x_2, \ldots, x_n) F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n$$

existieren).

Der Grenzwert $K(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv K(F)$

einer solchen Folge bestimmt nun ein Funktional, dass im allgemeinen nicht mehr ein Funktional von dem Typ einer Funktion zu sein braucht. So entsteht eine verallgemeinerte Funktion

$$K(F) \equiv K(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{1.3}$$

Es ist nicht schwer für den oben eingeführten Begriff der verallgemeinerten Funktion eine Theorie der Differentiation, der Integration, der harmonischen Analyse u. a. zu entwickeln. Dabei muss man aber alle Räume $C(q, r, n)$ benützen; man sieht, dass eine genügend hohe Ableitung einer verallgemeinerten Funktion nicht mehr in dem Zugehörigen $C(q, r, n)$ integrierbar zu sein braucht.

Nach diesen Bemerkungen können wir bereits zur Definition der Kausalfunktion übergehen.

Eine Kausalfunktion $D^c(x)$ ist eine verallgemeinerte Funktion, die durch die Gleichung

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ikx} \tilde{D}^c(k)\, dk \tag{1.4}$$

definiert wird, wobei

$$\tilde{D}^c(k) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} \tag{1.5}$$

und der Grenzübergang in der schwachen Topologie zu vollziehen ist. Mit anderen Worten $D^c(x)$ ist als Fouriertransformation der verallgemeinerten Funktion $\tilde{D}^c(k)$ zu verstehen.

Eine noch allgemeinere Kausalfunktion $\Delta^c(x)$ führen wir durch die Gleichung

$$\Delta^c(x) = P\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) D^c(x). \tag{1.6}$$

ein, wo P ein Polynom bedeutet. In den Anwendungen soll es ein Lorentzkovariantes Polynom sein.

Die Funktionen D^c, Δ^c haben bekanntlich Singularitäten auf dem Lichtkegel. Dies ist der wahre Grund, warum man sie als verallgemeinerte Funktionen betrachten muss.

In diesem Zusammenhang ist es wichtig, dass sich immer eine Folge, reg $\Delta^c_M(x)$, von regulären Lorentzinvarianten Funktionen angeben lässt, die bei $M \to \infty$ schwach gegen die Funktion $\Delta^c(x)$ konvergiert.

Die Konstruktion einer solchen Folge wurde von Pauli-Villars [10] angegeben. Wir werden den Sinn dieser Konstruktion erklären und dann den Satz von der schwachen Konvergenz der Folge reg $\Delta^c_M(x)$ beweisen.

Man bildet eine lineare Kombination von Funktionen $\Delta^c_{M_j}(x)$ mit verschiedenen Massen M_j

$$\operatorname{reg} \Delta^c_M(x) = \Delta^c(x) + \sum_{j=1}^{l} c_j \Delta^c_{M_j}(x) \tag{1.7}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\left.\begin{aligned} 1+\sum_j c_j &= 0, \\ m^2+\sum_j c_j M_j^2 &= 0, \\ m^{2(l-1)}+\sum_j c_j M_j^{2(l-1)} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

wodurch die Singularitäten in der Funktion reg $\Delta_M^c(x)$ aufgehoben werden.

Den Sinn der Nebenbedingungen sieht man am besten, wenn man mit Hilfe der Relation

$$\frac{1}{m^2-k^2-i\,\varepsilon} = i\int_0^\infty e^{-i\alpha(m^2-k^2-i\varepsilon)}\,d\alpha \tag{1.9}$$

zu einer neuen Darstellung d.s. α-Darstellung der Kausalfunktionen übergeht

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ikx}\,\tilde{D}^c(k)\,dk = \lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{1}{2^4\pi^2}\int_0^\infty e^{-i\alpha(m^2-i\varepsilon)}\,e^{-\frac{ix^2}{4\alpha}}\,\frac{d\alpha}{\alpha^2}. \tag{1.10}$$

Die letzte Gleichung haben wir durch die Ausrechnung der Gaussischen Integrale

$$\int e^{i(\alpha k^2+kx)}\,dk = \frac{\pi^2}{i\,\alpha^2}\,e^{-\frac{i\,x^2}{4\alpha}}, \qquad \alpha>0, \tag{1.11}$$

erhalten.

Solche Integrale sind stets als Grenzwerte

$$\lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta>0}}\int e^{i(\alpha k^2+kx)-\eta[(k^0)^2+(k^1)^2+(k^2)^2+(k^3)^2]}\,dk$$

zu verstehen.

Aus der Formel (1.10) sieht man leicht, dass die Singularitäten der Funktion $D^c(x)$ aus dem Pol bei $\alpha=0$ stammen.

Wir bemerken aber, dass die Funktion reg $\Delta^c(x)$ mit Hilfe der Relation (1.9) in der folgenden Weise geschrieben werden kann

$$\text{reg}\;\Delta_M^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ikx}\left\{i\,P(k)\int_0^\infty I(\alpha)\,e^{i\alpha(k^2-m^2+i\varepsilon)}\,d\alpha\right\}dk; \tag{1.12}$$

dabei hat die Funktion $I(\alpha)$ die Form

$$I(\alpha) = 1+\sum_j c_i\,e^{-i\alpha(M_j^2-m^2)}$$

und nach (1.8) eine Nullstelle von genügend hoher Ordnung bei $\alpha = 0$. Die Anwesenheit dieser Nullstelle garantiert die Regularität der Funktionen reg $\Delta_M^c(x)$.

Es gilt der

Satz 1. *Man kann die Hilfsmassen in der Formel* (1.12) *so gegen unendlich streben lassen, dass die Folge*

$$\operatorname{reg} \Delta_M^c(x)$$

schwach gegen den Grenzwert $\Delta^c(x)$ *konvergiert.*

Beweis. Seien μ_j beliebig verschiedene Massen. Da die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \dots \mu_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_1^{2(l-1)} & \mu_2^{2(l-1)} & \dots \mu_n^{2(l-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

von Null verschieden ist, so hat das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{l} a_j^{(\nu)} = \delta^{0\nu} \\ \dots\dots\dots\dots ; \quad \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \mu \neq \nu \\ 1 & \mu = \nu \end{cases} \\ \sum_{j=1}^{l} a_j^{(\nu)} \mu_j^{2(l-1)} = \delta_{l-1,\nu} \end{array}\right\} \tag{1.13}$$

eine Lösung. Wir setzen $M_j = \mu_j M$

und finden leicht aus (1.13) dass

$$c_j = -\sum_{\nu=0}^{l=1} a_j^{(\nu)} \left(\frac{m}{M}\right)^{2\nu}.$$

Es ist klar, dass für $M \to \infty$ $|c_j| \leq K$.

Nun schätzen wir die Differenz

$$\int \operatorname{reg} \Delta^c(x) F(x)\, dx - \int \Delta^c(x) F(x)\, dx = \sum_{j=1}^{l} c_j \int \Delta_{M_j}^c(x) F(x)\, dx$$

ab, wo $F(x)$ eine beliebige Funktion aus dem Raume $C(q, r, n)$ ist und die Zahlen q, r genügend gross gewählt worden sind. Da die c_j bei $M \to \infty$ beschränkt bleiben, so genügt es

$$\int \Delta_{M_j}^c(x) F(x)\, dx \to 0$$

zu beweisen. Das ersieht man aber mit Hilfe der Parsevalschen Identität.

§ 2. Das Problem der Multiplikation von Kausalfunktionen

Wir betrachten im vierdimensionalen Zeitraume die Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und verbinden sie in einer ganz beliebigen Weise durch gerichtete Linien. Dadurch entsteht im vierdimensionalen Raume eine Figur. Wir wollen sie einen Graph oder ein Diagramm nennen und durch $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bezeichnen. Die Punkte x_r sollen die Vertexe und die Linien l die Linien der Graphen $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ heissen.

Jeder Linie l des Graphen $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, die von x_r nach x_s führt, ordnen wir nun eine Kausalfunktion $\Delta_l^c(x_r - x_e)$ zu und bilden formal das Produkt

$$\prod_l \Delta_l^c(x_r - x_s), \quad l = 1, 2, \ldots, L. \tag{2.1}$$

Ein solches Produkt soll als Beitrag des Graphen G bezeichnet werden.

Ziel unserer Arbeit ist nun Aufbauen einer Theorie für solche Produkte der Form (2.1). Gerade solche Produktbildungen werden in der Quantentheorie der Felder bei der Konstruktion der S-matrix mit störungstheoretischen Methoden (siehe Anhang) gebraucht.

Eine kleine Rechnung zeigt, dass das formale Impulsbild eines solchen Produktes von der Form

$$\left.\begin{gathered} I(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \int\int \cdots \int \prod_r \delta\left(k_r + \sum_l e_l^r p_l\right) \prod_l \Delta_l^c(P_l)\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_L \\ r = 1, 2, \ldots, n, \quad l = 1, 2, \ldots, L \end{gathered}\right\} \tag{2.2}$$

sein wird, wobei

$e_l^r = 1$, wenn die entsprechende Linie l x^r als Endpunkt hat;
$e_l^r = -1$ wenn die Linie l x_r als Anfangspunkt hat;
$e_l^r = 0$, wenn die Linie l den Vertex x_r nicht enthält.

Man sieht, dass für die Berechnung des Impulsbildes des Beitrages recht einfache Regeln formuliert werden können: jedem Vertex x_r ordne man die Funktion $\delta(k_r + \sum_l e_l^r p^l)$, jeder Linie l die Funktion $\Delta_l^c(p_l)$, erstrecke die Multiplikation über alle Vertexe und Strecken und integriere über alle dp_l $(l = 1, 2, \ldots, L)$.

Bereits die einfachsten Beispiele zeigen, dass die Ausdrücke $\dot{I}(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ wegen der Divergenz der Integrale bei grossen Impulsen sinnlos werden können.

Um den tieferen analytischen Sinn dieser Divergenzerscheinung aufzuklären, setzen wir in die Formel (2.2) an Stelle der Funktionen Δ_l^c die regularisierten reg Δ_l^c ein und ziehen die α-Darstellung heran, also:

$$\operatorname{reg} \Delta_l^c(p_l) = i P_l(p_l) \int_0^\infty I(\alpha_l) e^{i\alpha_l(p_l^2 - m_l^2 + i\varepsilon)} d\alpha_l$$

(der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ soll am Ende der Rechnungen vollzogen werden, vergleiche weitere Auseinandersetzungen).

Für $I(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ erhalten wir jetzt

$$I_M(k_1, k_2, \ldots, k_n) = i^L \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_L e^{i \sum \alpha_l (i\varepsilon - m_l^2)} \prod_l I(\alpha_l) \cdot$$
$$\cdot \int\int \ldots \int \prod_l P_l(p_l) e^{i\alpha_l p_l^2} \prod_r \delta(k_r + \sum_l e_l^r p_l) d p_1 d p_2 \ldots d p_L. \quad (2.3)$$

Das folgende Lemma klärt den analytischen Sinn der Divergenzerscheinung auf:

Lemma 1. *Der Ausdruck $I_M(k_1, k_2, \ldots k_n)$ kann in folgender Form geschrieben werden:*

$$I_M(k_1, k_2, \ldots, k_n) =$$
$$= \delta\left(\sum_{i=1}^n k_i\right) \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \prod_{l=1}^L I(\alpha_l) e^{-i \sum_l \alpha_l m_l^2 - \varepsilon \sum_l \alpha_l} f(k_1, k_2, \ldots, k_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_L) d\alpha_1 \ldots d\alpha_L$$
$$\equiv \delta\left(\sum_{i=1}^n k_i\right) \Omega_M(k_1, k_1, \ldots, k_n), \quad (2.4)$$

wo

$$f(k_1, k_2, \ldots, k_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_L) = F(k_1, k_2, \ldots, k_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_L) \cdot$$
$$\cdot e^{i \sum_{a,b} A_{ab}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_L) k_a k_b}$$

Die Funktion $F(k_1, k_2, \ldots, k_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_L)$ ist ein Polynom in den Veränderlichen $k_1, k_2, \ldots k_n$ und eine rationale Funktion in den Veränderlichen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_L$ die bei $\alpha_l = 0$ einen Pol hat. Die reelle quadratische Form

$$\sum_{a,b} A_{ab}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_L) x_a x_b$$

ist positiv definit und die Koeffizienten $A_{ab}(\ldots \alpha_l \ldots)$ sind lineare homogene rationale Funktionen in den α_l.

Bevor wir zum Beweise dieser wichtigen Aussage übergehen, bemerken wir, dass die Formel (2.4) anschaulich zeigt wie die Singularitäten entstehen, wenn die Regularisation aufgehoben wird und die Hilfsmassen M_j gegen ∞ streben. Dann könnte man nämlich annehmen, dass $I(\alpha_l) \to 1$ und im Ausdrucke (2.4) erscheinen die Pole bei $\alpha_l = 0$.

Wir beweisen das Lemma durch die vollständige Induktion nach der Anzahl der Linien und Vertexe.

Wie sofort zu sehen, ist die Behauptung richtig im Falle des Graphen mit einer einzigen Linie, die zwei Vertexe verbindet. Nun bemerken wir, dass jeder Graph aus einem solchen durch Hinzufügen von neuen Linien und Vertexen entsteht. Betrachten wir zuerst den Fall des Hinzufügens einer Linie. Nehmen wir an, dass die neue Linie den Vertex 1 mit dem Vertex 2 verbindet, dann haben wir

$$\operatorname{reg} \Delta^c (x_1 - x_2) \prod_l \operatorname{reg} \Delta_l^c (x_r - x_s) = \frac{1}{(2\pi)^{4L+4}} \int\int \dots \int \operatorname{reg} \Delta^c (p)\, e^{ip(x_1 - x_2)} \cdot$$

$$\cdot \delta\left(\sum_{i=1}^n k_i\right) \Omega_M (k_1, k_2, \dots, k_n)\, e^{i\sum_{j=1}^n k_j x_j} \, dp\, dk_1\, dk_2 \dots dk_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{4L+4}} \int\int \dots \int e^{i\sum_{j=1}^n k_j x_j}\, \delta\left(\sum_{j=1}^n k_j\right) \left[\int \Omega_M (k_1 - p, k_2 + p, \dots, k_n)\, \Delta^c (p)\, dp\right] \cdot$$

$$\cdot\, dk_1\, dk_2 \dots dk_n \qquad (2.5)$$

also

$$f^* (k_1, k_2, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L, \alpha) = \int P(p)\, e^{i\alpha p^2} f(k_1 - p, k_2 + p, \dots, k_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L)\, dp,$$

wobei das Sternchen über f bedeutet, dass die neue Linie berücksichtigt worden ist. Da aber

$$f(k_1 - p, k_2 + p, k_3, \dots, k_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L)$$

$$= F(k_1 - p, k_2 + l_a p, k_3 + l_3 p, \dots, k_n + l_n p, \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_L) \cdot$$

$$\exp\left\{i \sum_{a,b} A_{ab} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L)(k_a + l_a p)(k_b + l_b p)\right\}$$

$$= F(-i\nabla q_1, -i\nabla q_2, \dots, -i\nabla q_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_L) \cdot$$

$$\exp\left\{i \sum_{a,b} A_{ab} (\dots \alpha_l \dots)(k_a + l_a p)(k_b + l_b p) + i \sum_{a=1}^n (k_a + l_a p)\, q_a\right\}_{q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0}$$

$$l_a = +1, \ -1, \ 0,$$

$$l_b = +1, \ -1, \ 0,$$

so kann die Integration nach p ausgeführt werden und wir erhalten

$$f^*(k_1, k_2, \ldots, k_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_L, \alpha) =$$
$$= P(-i\nabla q) F(-i\nabla q_1, -i\nabla q_2, \ldots, -i\nabla q_n, \ldots) \cdot$$
$$\cdot \int \exp i\alpha p^2 + ipq \exp\left\{ i\sum_{a,b}(k_a + l_a p)(k_b + l_b p) + \sum_a i(k_a + l_a p) q_a \right\} dp_{q=q_1=q_2=\cdots=q_n=0}$$
$$= P(-i\nabla q) F(-i\nabla q_1, -i\nabla q_2, \ldots, -i\nabla q_n, \ldots) \frac{\pi^2}{i(\sum A_{ab} l_a l_b + \alpha)^2} \cdot$$
$$\cdot \exp\left\{ i\sum_{a,b} A_{ab} k_a k_b - i\frac{2\sum_{a,b} A_{ab} k_a l_b + \sum l_a q_a + q)^2}{4(\sum_{a,b} A_{ab} l_a l_b + \alpha)} + i\sum_a k_a q_a \right\}_{q=q_1=q_2=\cdots=q_n=0} \tag{2.6}$$

Hierbei sollen die Gaussischen Integrale

$$\int e^{i(ap^2+bp)} dp = -i\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 e^{-i\frac{b^2}{4a}}, \qquad a > 0,$$

stets als Grenzwerte

$$\lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta>0}} \int e^{i(ap^2+bp)-\eta[(p_0)^2+(p^1)^2+(p^2)^2+(p^3)^2]} dp$$

verstanden werden.

Aus der Formel (2.6) ersieht man nun, dass, wenn die Aussage für die Funktion $f(k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots)$ gilt, sie auch für die Funktion $f^*(k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots)$ richtig ist.

Im Falle des Hinzufügens eines neuen Vertexes bekommen wir ganz analog

$$f^*(k_1, k_2, \ldots, k_n, k_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_L, \alpha) = P(k_0) e^{i\alpha k_0^2} \cdot f(k_1 - k_0, k_2, \ldots, k_n, \ldots, \alpha_l, \ldots) \tag{2.7}$$

wo $P(k_0)$ das Polynom im Impulsbild der Kausalfunktion der neu hinzugekommenen Linie ist. Aus der Formel (2.7) sieht man leicht, dass die Richtigkeit der Aussage auch in diesem Falle erhalten bleibt.

Jetzt sehen wir bereits die Schwierigkeiten, die man bei der Aufstellung einer Theorie der Multiplikation von Kausalfunktionen zu überwinden hat.

Da man

$$\operatorname*{reg}_{M\to\infty} \Delta^c_{lM}(x) \to \Delta^c(x)$$

schreiben kann, so wäre es ganz natürlich das Produkt $\prod_l \Delta^c_l(x_r - x_s)$ als schwacher Grenzwert der Folge

$$\prod_l \operatorname{reg} \Delta^c_{lM}(x_r - x_s) \tag{2.8}$$

für $M \to \infty$ zu definieren.

$$\iint \ldots \int \{\prod_l \operatorname{reg} \Delta_{lM}^c (x_r - x_s)\} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, d x_1\, d x_2 \ldots d x_n$$

wo

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) \in C(q, r, n).$$

Da aber

$$\iint \ldots \int \{\prod_l \operatorname{reg} \Delta_{lM}^c (x_r - x_s)\} F(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)\, d x_1\, d x_2 \ldots d x_n$$
$$= \iint \ldots \int I_M (k_1, k_2, \ldots, k_n)\, \tilde{F}(k_1, k_2, \ldots, k_n)\, d k_1\, d k_2 \ldots d k_n,$$

wo $\tilde{F}$ das Impulsbild von F ist, so braucht dieser Grenzwert nach den obigen Ausführungen nicht zu existieren. Es lässt sich jedoch beweisen, dass der Limes der Folge (2.8) existiert, zwar nicht für alle Funktionen F aus dem Raume $C(q, r, n)$, doch für solche $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, die sich zusammen mit ihren Ableitungen verschwinden, sobald irgendwelche Argumente zusammenfallen, d. h. wenn $x_r = x_s$. Die Klasse solcher Funktionen bezeichnen wir durch $D(q, r, n)$.

Es gilt nämlich der

Satz 2. *Für alle Funktionen $F \in D(q, r, n)$ (q, r genügend grosse Zahlen) strebt die Folge*

$$\iint \ldots \int \{\prod_l \operatorname{reg} \Delta_l^c (x_r - x_s)\} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, d x_1\, d x_2 \ldots d x_n$$

gegen einen bestimmten Limes, wenn $M \to \infty$, d. h. wenn die Regularisation aufgehoben wird.

Den Beweis des obigen Satzes kann man in den Arbeiten [12], [16] finden.

Bemerken wir, dass durch den Satz 2 das Produkt (2.1) bei nichtzusammenfallenden Argumenten definiert wird und zwar als ein Funktional aus der Funktionenklasse $D(q, r, n)$.

Um das Problem vollständig zu lösen, muss jetzt das so gefundene Funktional aus der Klasse $D(q, r, n)$ auf den ganzen Raum $C(q, r, n)$ fortgesetzt werden. Eine solche Fortsetzung kann natürlich auf mannigfache Art und Weise bewerkstelligt werden. Die Wahl der Fortsetzung wird davon abhängen, welchen Bedingungen wir das Produkt der Kausalfunktionen unterwerfen. In der vorliegenden Arbeit werden wir eine spezielle Fortsetzung dieses Funktionals studieren, welche durch die in § 3 eingeführte R-Operation geliefert wird. Diese Fortsetzung (wir werden sie als R-Fortsetzung bezeichnen) ist besonders für die Zwecke der Quantentheorie der Felder geeignet: wie im Anhang gezeigt wird, genügt die Streumatrix, die mit Hilfe der R-Fortsetzung konstruiert wird, den wichtigen Bedingungen der Unitarität, der Lorentzinvarianz und der Kausalität. Dabei werden die Forderungen, die man gewöhnlich an Produktoperation stellt, völlig ausser Acht gelassen, so dass wir das Wort „Produkt" nur ganz formal benützen dürfen.

Da die R-Fortsetzung, wie es uns später klar wird, in Wirklichkeit mit dem Subtraktionsformalismus zusammenfällt, so werden wir sie auch als Subtraktionsoperation bezeichnen.

§ 3. Die Subtraktionsoperation R und ihre wichtigsten Eigenschaften

Es sei G ein Graph mit den Vertexen x_r, $(r=1, 2, \ldots, n)$ und den Linien $l\,(l=1, 2, \ldots, L)$. Nehmen wir weiterhin an, dass der Graph G zusammenhängend ist. Ausserdem ordnen wir, wie zuvor, jeder Linie l eine bestimmte regularisierte Kausalfunktion, reg $\Delta_l^c\,(x_r - x_s)$, zu, wo x_r den Anfangspunkt und x_s den Endpunkt der Linie l bedeutet.

Bevor wir die R-Operation, die einem Graph G entspricht, definieren, wollen wir den Begriff des verallgemeinerten Vertexes einführen.

Unter einem verallgemeinerten Vertexe verstehen wir eine beliebige Menge von Vertexen $x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \ldots, x_{\nu_k}$, welche als ein Ganzes betrachtet werden soll. Dies ist so zu verstehen, dass bei der Berechnung des Beitrages des Untergraphen $G\,(x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \ldots, x_{\nu_k})$, der aus Vertexen dieser Menge besteht, sollen die Kausalfunktionen der Linien, die die Punkte $x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \ldots, x_{\nu_k}$ mit einander verbinden, ausser Acht gelassen werden und an deren Stelle sollen die Funktionen der Form

$$P_l\left(\frac{\partial}{\partial x_{\nu_\alpha}}\right)\delta\,(x_{\nu_\alpha} - x_{\nu_\beta})$$

eingesetzt werden, wobei P_l einige Polynome bedeuten sollen, die später definiert werden. Der Beitrag eines verallgemeinerten Vertexes $G\,(x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \ldots, x_n)$ wird also immer ein Impulsbild von der folgenden Form haben

$$\tilde{\Delta}\,(G) = \delta\left(\sum_{l=1}^{n} k_{\nu_i}\right) f\,(k_{\nu_1}, k_{\nu_2}, \ldots, k_{\nu_k})$$

wo f ein Polynom ist.

Wenn in einem Graph $G\,(x_1, x_2 \ldots x_n)$ die Vertexe $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu verallgemeinerten Vertexen $G_1\,(x_1, x_2, x_{\nu_1})$, $G_2\,(x_{\nu_1+1}, x_{\nu_1+2}, \ldots, x_{\nu_2})$, $\ldots$ $G_s\,(x_{\nu_{s-1}+1}, \ldots, x_n)$ zusammengefasst werden, so werden wir dies durch die Schreibweise:

$$G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_s \tag{3.1}$$

andeuten. Der neue Graph

$$G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_s$$

ist also ein solcher Graph, in welchem nur solche Linien auftreten, die G_a mit einander verbinden.

Den Beitrag dieses Graphen werden wir durch

$$\Delta(G_1)\,\Delta(G_2)\,\ldots\,\Delta(G_s) \tag{3.2}$$

bezeichnen.

Zur Berechnung eines solchen Beitrages bilde man also das Produkt

$$\Delta(G_1)\cdot\Delta(G_2)\,\ldots\,\Delta(G_s)\prod_l \operatorname{reg}\,\Delta_l^c(x_r - x_s) \tag{3.3}$$

wo l genau alle Linien durchläuft, die die Vertexe x_r aus den verschiedenen $G_1, G_2, \ldots, G_n$ miteinander verbinden. Die Linien die die Vertexe, welche in denselben G_a liegen, verbinden, werden ausser Acht gelassen, jedoch werden sie durch die Faktoren $\Delta(G_1)$, $\Delta(G_2), \ldots, \Delta(G_s)$ der verallgemeinerten Vertexe in Rechnung gestellt.

Bei der Einführung aller dieser neuen Begriffe spielen die ursprünglichen Vertexe x_r eine besondere Rolle und wir wollen sie Urvertexe nennen.

Um aber eine Symmetrie in den Bezeichnungen zu erreichen, wählen wir als Urvertexe bereits verallgemeinerte Vertexe $G_1, G_2, \ldots, G_s$ des Graphen

$$G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_s;$$

diese sollen also Urvertexe in dem Sinne sein, dass wir aus ihnen weitere verallgemeinerte Vertexe (sozusagen höheren Stufe) bilden werden:

$$\Gamma_k = G_{i_1} \times G_{i_2} \times \cdots \times G_{i_k}. \tag{3.4}$$

Jetzt definieren wir ganz formal die dem Graph $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_s$ zugeordnete R-Operation. Wir bezeichnen sie durch $R(G_1\,G_2\,\ldots\,G_s)$. Die Definition lautet:

$$R(G_1\,G_2\,\ldots\,G_s) = \Delta(G_1)\,\Delta(G_2)\,\ldots\,\Delta(G_s) + \sum_{m=2}^{s-1}\Delta(\Gamma_1)\,\Delta(\Gamma_2)\,\ldots\,\Delta(\Gamma_m) +$$

$$+\Delta(G_1\,G_2\,\ldots\,G_s) \equiv \overline{R(G_1\,G_2\,\ldots\,G_s)} + \Delta(G_1\,G_2\,\ldots\,G_s), \tag{3.5}$$

wo die Summation über alle möglichen Unterteilungen des Graphen $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_s$ in verallgemeinerte Vertexe Γ_k zu erstrecken ist:

$$G = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_m, \qquad \Gamma_k = G_{i_1} \times G_{i_2} \times \cdots \times G_{i_k}.$$

Die Operation R, in welcher für Urvertexe gerade die Vertexe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ genommen werden, bezeichnen wir einfach durch $R(G)$. Um die Definition der R-Operation vollständig zu machen, muss man natürlich noch die Beiträge $\Delta(\Gamma_1), \Delta(\Gamma_2), \ldots, \Delta(\Gamma_m)$ bestimmen; der Sinn des Symbols

$$\Delta(\Gamma_1)\,\Delta(\Gamma_2)\,\ldots\,\Delta(\Gamma_m)$$

wurde schon erklärt.

Bevor wir das machen, wollen wir für die rechte Seite von (3.5) abzüglich des letzten Gliedes die Bezeichnung $\overline{R(G)}$ einführen.

Wir gehen nun zur Bestimmung von $\Delta(\Gamma_k)$ über. Nehmen wir an, dass jedem verallgemeinerten Vertexe Γ_k eine ganze positive Zahl $\nu(\Gamma_k)$ zugeordnet ist.

Es wird später erklärt, wie eine solche Zahl zu wählen ist. Dann definieren wir die Impulsbilder der Beiträge des Γ_k (wir bezeichnen sie auch mit $\Delta(\Gamma_k)$) in der folgenden Weise:

a) Wenn der Graph Γ_k schwachzusammenhängend ist d. h. in zwei Graphen, die mit einer einzigen Linie verbunden werden, zerfällt, dann setzen wir

$$\Delta(\Gamma_k) = 0.$$

b) Wenn der Graph Γ_k starkzusammenhängend ist (d. h. zusammenhängend aber nicht schwachzusammenhängend ist), dann definiert man $\Delta(\Gamma_k)$ rekurrent mit Hilfe der Annahme, dass für alle $\Gamma_j \subset \Gamma_k$ der Beitrag $\Delta(\Gamma_j)$ bereits definiert ist

$$\Delta(\Gamma_k) = -M(\Gamma_k)\left\{\Delta(G_{i_1})\,\Delta(G_{i_2})\,\ldots\,\Delta(G_{i_k}) + \sum_{j_m=2}^{s-1}\Delta(\Gamma_{j_1})\,\Delta(\Gamma_{j_2})\,\ldots\,\Delta(\Gamma_{j_m})\right\}, \tag{3.6}$$

wo die Summation über alle möglichen Unterteilungen des Graphen Γ_k in verallgemeinerte Vertexe Γ_{j_m} zu erstrecken ist. Das Symbol $M(\Gamma_k)$ ist so zu verstehen: man bringe den Beitrag in den Klammern in die Form

$$\delta\left(\sum_{s=1}^{k} k_{\nu_s}\right) f_{\Gamma_k}(k_{\nu_1}, k_{\nu_2}, \ldots, k_{\nu_k}) \tag{3.7}$$

und setze dann an seine Stelle den Ausdruck

$$\delta\left(\sum k_{\nu_s}\right) T_\omega^\nu f_{\Gamma_k},$$

wo $T_\omega^\nu f_{\Gamma_k}$ ein solcher Abschnitt der Taylorschen Entwicklung der Funktion f_{Γ_k} in einem beliebigen Punkt $k_{\nu_1} = \omega_{\nu_1} \ldots k_{\nu_k} = \omega_{\nu_k}$ ist, in dem keine Glieder vom höheren Grade als $\nu(\Gamma_k)$ auftreten.

Da wir annehmen, dass $\Delta(G_1)$, $\Delta(G_2) \ldots \Delta(G_s)$ für Urvertexe gegeben sind, so genügen die Bedingungen a) b), um $\Delta(\Gamma_k)$ vollständig zu definieren.

Wir sehen also, dass, wenn $\Delta(G_1)$, $\Delta(G_2)$, $\ldots$, $\Delta(G_s)$ und die Zahlen $\nu(\Gamma_k)$ bekannt sind, die Funktion $R(G_1, G_2 \ldots G_s)$ vollständig definiert ist.

Jetzt wollen wir einige Eigenschaften der so definierten R-Operation studieren.

LEMMA 2. *Es gilt die Formel*

$$R(G_1\, G_2 \ldots G_s) = \Delta(G_1)\, R(G_2\, G_3 \ldots G_s) + \sum_{\nu_1} P\begin{pmatrix} 2, 3, \ldots, \nu_1 \\ \nu_1+1, \ldots, s \end{pmatrix} \cdot$$
$$\cdot\, \Delta(G_1\, G_2, \ldots, G_{\nu_1})\, R(G_{\nu_1+1}, \ldots, G_s) + \Delta(G_1\, G_2, \ldots, G_s), \qquad (3.8)$$

wobei P ein Symmetriesationssymbol bedeutet, und zwar die Summation über alle Zerlegungen der Menge $(2, 3, \ldots, s)$ in zwei Mengen aus $\nu_1 - 1$ und $s - \nu_1$ Elemente, so dass insgesamt über alle Unterteilungen der Menge $(2, 3, \ldots, s)$ in zwei Mengen summiert wird.

Beweis. Da die verallgemeinerten Vertexe Γ_k aus den Urvertexen G_{i_1}, G_{i_2}, $\ldots$ G_{i_k} bestehen, so können wir immer in der Summe (3.5) die Glieder finden, welche als Faktoren entweder $\Delta(G_1)$ oder $\Delta(G_1\, G_2)$ usw. enthalten. Fassen wir in der Summe alle Komponenten, die zum Beispiel $\Delta(G_1)$ enthalten, so können wir $\Delta(G_1)$ vor die Klammer ziehen und es steht, wie leicht zu sehen ist, in der Klammer genau der Ausdruck

$$R(G_2\, G_3 \ldots G_s).$$

In analoger Weise bekommen wir auch die anderen Glieder der Summe (3.5). Um den Beweis der Formel (3.8) zu Ende zu führen, muss man sich nur noch überzeugen, dass in dieser Weise alle Komponenten der Summe (3.5) erschöpft werden. Dies ist aber offensichtlich, wenn wir bemerken, dass eine beliebige Unterteilung der Menge $G_2, G_3, \ldots, G_r$ in verallgemeinerte Vertexe $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ in folgender Weise durchgeführt werden kann.

Wir wählen einen festen Vertex G_1 und unterteilen die übrigen auf alle mögliche Weise in verallgemeinerte Vertexe: dann vereinigen wir G_1 und G_2 zu einem verallgemeinerten Vertex und unterteilen die anderen in beliebiger Weise usw.

Damit ist das Lemma bewiesen.

Jetzt wollen wir eine andere Bezeichnung für die Operation R einführen.

Wir schreiben $$R(G_1\, G_2 \ldots G_s \,|\, \ldots \Omega_\Gamma \ldots), \qquad (3.9)$$

wo die Ausdrücke Ω_Γ diejenigen beliebigen Punkte bezeichnen, in denen bei der Berechnung von $\Delta(\Gamma_k)$ Taylorsche Entwicklung gebildet wird. Weiterhin schreiben wir

$R^*(G_1 G_2 \ldots G_s | \ldots \Omega_\Gamma \ldots)$ für die R-Operation, die dem Graph G^* entspricht, der aus G durch das Hinzufügen einer neuen Linie zwischen G_a und G_b entsteht, wenn daneben den Untergraphen Γ_k aus G^* dieselben Zahlen $\nu(\Gamma_k)$ wie im G zugeordnet sind.

Das Impulsbild der Verbreitungsfunktion der Linie 1–2 bezeichnen wir durch

$$\Delta^c_{ab}(t)$$

Jetzt können wir folgendes Lemma formulieren.

L e m m a 3. *Es gilt die folgende rekurrente Formel*

$$R^*(G_1 G_2 \ldots G_s | \ldots \Omega_\Gamma \ldots) = \int \Delta^c_{ab}(t) R_{ab}(G_1^t G_2^t \ldots G_s^t | \ldots \Omega_\Gamma^t \ldots)\, dt, \tag{3.10}$$

wo der obere Index t andeuten soll, dass in R_{ab} für k_a der Ausdruck $k_a - t$ für k_b der Ausdruck $k_b + t$ substituiert ist. Die Integration wird über den ganzen Impulsraum geführt. Die Operation R_{ab} wird durch die Formel

$$R_{ab}(G_1 G_2 \ldots G_s | \ldots \Omega_\Gamma \ldots) = R(G_1 G_2 \ldots G_s) + \sum_{\Gamma' \subset G} R(G_1 G_2 \ldots G_s : \Gamma' | \ldots \Omega_\Gamma \ldots) \tag{3.11}$$

Hierbei bedeutet $\Gamma' = G_{a_1} \times G_{a_2} \times \cdots \times G_{a_k}$ diejenige schwach zusammenhängenden Graphen, welche nach Hinzufügen der neuen Linie zwischen G_a und G_b stark zusammenhängend werden, $R(G_1 G_2 \ldots G_s : \Gamma' | \ldots \Omega_\Gamma \ldots)$ ist eine Art von R-Operation für Graph G^*, indem für Urvertexe der Graph Γ' und alle übrigen G_{a_k} die nicht in Γ' enthalten sind, genommen werden. Dabei wird die Operation $\Delta(\Gamma')$ durch die Formel

$$\Delta(\Gamma') = -M(\Gamma') \overline{R(\Gamma')} \tag{3.12}$$

definiert, d. h. $\Delta(\Gamma')$ wird so berechnet, als ob die neue Linie zwischen G_a und G_b fehle und der Graph Γ' starkzusammenhängend wäre.

Beweis. Mit Hilfe der Formel (3.8) bekommen wir für $R^*(G_1 G_2 \ldots G_s | \ldots \Omega_\Gamma \ldots)$

$$\begin{aligned} R^*(G_1 G_2 \ldots G_s | \ldots \Omega_\Gamma \ldots) &= \Delta^*(G_1) R^*(G_2 G_3 \ldots G_s) + \\ &+ \Delta^*(G_1 G_2) R^*(G_3 G_4 \ldots G_s) + \cdots + \Delta^*(G_1 G_2 \ldots G_s). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Das Sternchen auf der linken und der rechten Seite der Gleichung (3.13) bedeutet, dass alle Operationen unter Berücksichtigung der neuen $a-b$ genommen werden. Wir wollen jetzt die rechte Seite von (3.13) so umformen, dass dort die Operationen Δ und R (ohne Sternchen) explizit erscheinen. Natürlich wird dadurch die Verbreitungsfunktion $\Delta^c_{ab}(t)$ auftauchen. Dazu bemerken wir: wenn wir von den Komponenten in (3.13) diejenigen mit dem Faktor $\Delta^*(G_1 G_2 \dots G_k)$ wählen, die denjenigen Graphen entsprechen, welche auch vor dem Hinzufügen der Linie $a-b$ stark zusammenhängend waren, so würde ihre Summe, im Falle dass wir diese Linie nicht berücksichtigen, gerade $R(G_1 G_2 \dots G_s)$ ergeben. Um zu erkennen, um welche Ausdrücke die Summe der gewählten Glieder sich von $R(G_1 G_2 \dots G_s)$ unterscheidet, weisen wir darauf hin, dass für Komponenten der Form $\Delta^*(A) R^*(B)$, wo $A \supset G_a$ und $B \supset G_b$ die Gleichung

$$\Delta^*(A) R^*(B) = \int \Delta^c_{ab}(t) \Delta(A^t) \Delta(B^t) \, dt$$

gilt.

Bei Komponenten der Form $\Delta^*(A) R(B)$, wo $A \supset G_a G_b$ wegen der Voraussetzung des Lemmas bezüglich der Zahlen $\nu(\Gamma_k)$, kann man ähnlich verfahren.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass

$$A = G_a \times G_b.$$

Da nach Annahme A, auch vor dem Hinzufügen der Linie $a-b$, stark zusammenhängend ist, so hat man

$$\begin{aligned} \Delta^*(A) = \Delta^*(G_a G_b) &= -M(A)\{\Delta^*(G_a)\Delta^*(G_b)\} \\ &= -M(A)\left\{\int \Delta^c_{ab}(t) \Delta(G^t_a) \Delta(G^t_b)\, dt\right\} \\ &= \int \Delta^c_{ab}(t)\{-M(A)[\Delta(G^t_1)\Delta(G^t_2)]\}\, dt \\ &= \int \Delta^c_{ab}(t) \Delta(G^t_a G^t_b)\, dt, \end{aligned}$$

wobei das Bestehen der letzten Gleichung auf Grund der Eigenschaften der Zahlen $\nu(\Gamma_k)$ erschlossen worden ist.

Wir nehmen jetzt an, dass die Formel

$$\Delta^*(H) = \int \Delta^c_{ab}(t) \Delta(H^t)\, dt$$

richtig ist für alle Untergraphen

$$H = G_a \times G_b \times G_{b_1} \times \cdots \times G_{b_k}$$

des Graphen

$$A = G_a \times G_b \times G_{a_1} \times \cdots \times G_{a_s},$$

welcher auch vor dem Hinzufügen der Linie $a-b$ starkzusammenhängend war und beweisen, dass sie auch für den ganzen Graph A gültig bleibt. In der Tat

$$\Delta^* (A) = -M(A)\{\Delta^*(G_a)\,\Delta^*(G_b)\,\Delta^*(G_{a_1}) \ldots \Delta^*(G_{a_s}) + \sum_m \Delta^*(H_1)\,\Delta^*(H_2) \ldots (H_m)\}$$
$$= -M(A)\left\{\int \Delta^c_{ab}(t)\,[\Delta(G^t_a)\,\Delta(G^t_b)\,\Delta(G^t_{a_1}) \ldots \Delta(G_{a_s}) + \right.$$
$$\left. + \sum_m \Delta(H^t_1)\,\Delta(H^t_2) \ldots \Delta(H^t_m)]\,dt\right\}$$
$$= \int \Delta^c_{ab}(t)\,\Delta(A^t)\,dt.$$

Jetzt ist es schon klar, dass die Summe aller ausgewählten Glieder gleich

$$\int R(G^t_1\, G^t_2 \ldots G^t_s \,|\, \ldots \Omega^t \ldots)\,\Delta^c_{ab}(t)\,dt$$

ist. Es bleibt zu zeigen, dass die übrigen Glieder die Summe

$$\sum_{\Gamma' \subset G} \int \Delta^c_{ab}(t)\, R(G^t_1\, G^t_2 \ldots G^t_s : \Gamma'^t \,|\, \ldots \Omega^t_\Gamma \ldots)\,dt$$

ergeben. Dazu betrachten wir die Komponente

$$\Delta^*(\Gamma')\, R^*(G_{a_1}\, G_{a_2} \ldots G_{a_k}).$$

Offensichtlich ist $$R^*(G_{a_1}\, G_{a_2} \ldots G_{a_k}) = R(G_{a_1}\, G_{a_2} \ldots G_{a_k}),$$

denn die neue Linie $a-b$ liegt in Γ. Weiter bemerken wir, dass Γ' auch von dem Hinzufügen der neuen Linie zusammenhängend war, denn durch das Hinzufügen der neuen Linie ist der Graph Γ' ja stark zusammenhängend geworden und dass die Zahl $\nu(\Gamma')$ durch das Hinzukommen der neuen Linie nicht geändert worden ist. Dann bekommen wir

$$\Delta^*(\Gamma') = \int \Delta^c_{ab}(t)\,\Delta(\Gamma'^t)\,dt.$$

Also können wir schreiben

$$\Delta^*(\Gamma')\, R(G_{a_1}\, G_{a_2} \ldots G_{a_s}) = \int \Delta^c_{ab}(t)\,\Delta(\Gamma'^t)\, R(G_{a_1}\, G_{a_2} \ldots G_{a_k})\,dt$$
$$= \int \Delta^c_{ab}(t)\, R(G_{a_1}\, G_{a_2} \ldots G_{a_k} : \Gamma' \,|\, \ldots \Omega_\Gamma \ldots)\,dt$$

auf Grund der Definition von $R(G:\Gamma' \,|\, \ldots \Omega_\Gamma \ldots)$.

Es bleibt jetzt die Summation über $\Gamma' \subset G$ zu berücksichtigen um das Lemma vollständig zu beweisen.

Wir bemerken noch, dass in der gleichen Weise auch die folgende Formel bewiesen werden kann:

$$\overline{R^*(G_1\, G_2 \ldots G_s \,|\, \ldots \Omega_\Gamma \ldots)} = \int \Delta^c_{ab}(t)\, \overline{R_{ab}(G^t_1\, G^t_2 \ldots G^t_s \,|\, \ldots \Omega^t_\Gamma \ldots)\,dt}, \tag{3.14}$$

wo $$R_{ab}(G \,|\, \ldots \Omega^t_\Gamma \ldots) = \overline{R(G_1\, G_2 \ldots G_s)} + \sum_{\Gamma' \subset G} \overline{R(G_1\, G_2 \ldots G_s : \Gamma' \,|\, \ldots \Omega_\Gamma \ldots)}.$$

§ 4. Die analytischen Eigenschaften der Subtraktionsoperation R

In diesem Paragraph studieren wir die analytischen Eigenschaften der R-Operation und zeigen, dass mit Hilfe dieser Operation die Multiplikation der Kausalfunktionen definiert werden kann.

Wir führen zuerst einige neue Bezeichnungen ein. Für R wollen wir im Falle, dass für die Kausalfunktionen die regularisierten stehen, $R(G)\,I_M(\dots k\dots)$, und im anderen Falle $R(G)\,I(\dots k\dots)$ schreiben.

Es gilt der

Satz 3. *Es sei $G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_s$ ein zusammenhängender Graph. Dann können wir $R(G_1G_2\dots G_s)\,I_M(\dots k\dots)$ in der Form*

$$\overline{R(G_1G_2\dots G_s)}\,I_M(\dots k\dots)=\delta\left(\sum_{i=1}^{n}k_i\right)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\cdots\int\limits_0^\infty e^{-i\sum\limits_l\alpha_l m_l^2-\varepsilon\sum\alpha_l}\prod_l I(\alpha_l)\cdot$$
$$\cdot\sum\frac{f^\mu(\sqrt{\bar\alpha}\,k_1,\ \sqrt{\bar\alpha}\,k_2,\dots,\ \sqrt{\bar\alpha}\,k_n,\ \sqrt{\bar\alpha}\,\omega_1,\ \sqrt{\bar\alpha}\,\omega_2,\dots,\ \sqrt{\bar\alpha}\,\omega_N,\ \sqrt{\bar\alpha})}{\phi_r^\mu(\sqrt{\alpha_1},\ \sqrt{\alpha_2},\dots,\sqrt{\alpha_L})}\cdot$$
$$\cdot\, e^{i\sum\limits_{a,b}A^\mu_{G_aG_b}(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_l)\,p_\alpha p_b}\,d\alpha_1\dots d\alpha_L \qquad (4.1)$$

schreiben. Darin bedeuten:

$$p_a=\begin{cases}\textit{entweder} & \sum\limits_{G_a}k_\nu\\ \textit{oder} & \sum\limits_{G_b}\omega_\nu,\end{cases}$$

$f^\mu(\dots\sqrt{\bar\alpha}\,k\dots\sqrt{\bar\alpha}\,\omega\dots\sqrt{\bar\alpha})$ *ein Polynom in allen seinen Argumenten,*

$\phi_r^\mu(\dots\sqrt{\alpha_l}\dots)$ *eine homogene rationale Funktion in $\sqrt{\alpha_1},\sqrt{\alpha_2},\dots,\sqrt{\alpha_L}$ vom Grade r,*

die Summation vor $(f_\mu/\phi_r^\mu)\,e^{i\sum\limits_{a,b}A^\mu_{G_aG_b}p_ap_b}$, dass zur Berechnung des Beitrages $\overline{R}$ möglicherweise über verschiedene Glieder der in der Formel angegebenen Form durchzuführen ist,

$\bar\alpha$ eine homogene rationale Funktion ersten Grades in $\sqrt{\alpha_l}$,

$r[\Delta(G)]$ den Grad des Polynoms in $\Delta(G)$,

r_l den Grad des Polynoms der Verbreitungsfunktion, die der Linie l entspricht,

L die Zahl aller Linien zwischen den Basisvertexen,

S die Zahl aller Basisvertexe,

$r=\sum\limits_a r[\Delta(G_a)]+\sum\limits_l r_l+4L-4(S-1),$

$\sum\limits_{a,b} A''_{G_a G_b}(\ldots \alpha_l \ldots)\, x_a x_b$ *(Summe über beliebige $S-1$ von S vertexen): quadratische Form in x_a und homogene rationale Funktion ersten Grades in α_l mit den Eigenschaften:*

a) *Wenn alle $\alpha_l > 0$, so ist die quadratische Form in x_a positiv definit.*

b) $\sum\limits_{a,b} A''_{G_a G_b}(\ldots \alpha_l \ldots)\, x_a x_b \leq \sum\limits_{l} \alpha_l (\sum\limits_{a} |x_a|)^2.$

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion nach der Zahl der Linien und Urvertexe. Betrachten wir zuerst den einfachsten Fall, dass der Graph aus zwei durch eine Linie verbundene Vertexe besteht. Andere Graphen entstehen aus einem solchen durch Hinzufügen von neuen Linien und Vertexen.

Für den einfachsten Graph haben wir

$$\overline{R(G_1 G_2)} = \Delta(G_1)\, \Delta(G_2).$$

Es sei

$$\Delta(G_1) = P_1(\ldots k \ldots)\, \delta(\sum_{G_1} k),$$

$$\Delta(G_2) = P_2(\ldots k \ldots)\, \delta(\sum_{G_2} k).$$

Bezeichnen wir noch mit $\Delta^c_{12}(t) \simeq P_{12}(t)\, e^{i\alpha t^2}$

die Verbreitungsfunktion der Linie $1-2$. (Die Integration nach α, sowie die Faktoren $I(\alpha)$ usw. werden wir auslassen.) Dann haben wir

$$\Delta(G_1)\, \Delta(G_2) = \delta(\sum_{G_1} k + \sum_{G_2} k)\, \Delta^c_{12}(\sum_{G} k)\, P_1(k_1 - \sum_{G_1} k, \ldots)\, P_2(k_2 + \sum_{G_1} k \ldots),$$

und deswegen können wir schreiben

$$\Delta(G_1)\, \Delta(G_2) = \delta(\sum k)\, \frac{f(\ldots \sqrt{\bar{\alpha}}\, k \ldots \sqrt{\bar{\alpha}}\, \omega \ldots \sqrt{\bar{\alpha}})}{\phi_r(\ldots \sqrt{\alpha_l} \ldots)}\, e^{i\alpha (\sum\limits_{G_1} k)^2},$$

wobei, wie leicht zu sehen, der Grad der Funktion $\phi(\ldots \sqrt{\alpha_l} \ldots)$ gleich

$$r = r[\Delta(G_1)] + r[\Delta(G_2)] + r_{12} + 4 \cdot 1 - 4(2-1)$$

ist, wie die Behauptung des Satzes fordert. Die anderen Behauptungen des Satzes sind in diesem einfachsten Falle evident.

Wir machen jetzt den Induktionsschluss für das Hinzufügen einer Linie. Dabei fassen wir insbesondere die Eigenschaften der Funktion

$$\frac{f(\ )}{\phi(\ldots\sqrt{\alpha_L}\ldots)}\,e^{i\sum\limits_{a,b}A_{G_a G_b}p_a p_b}$$

ins Auge.

Es sei $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_s$ ein zusammenhängender Graph mit $m+1$ Linien. Wir wollen annehmen, dass dieser Graph von einer solchen Gestalt ist, dass durch das Weglassen einer beliebigen seiner Linien sein Zusammenhang nicht zerstört wird. Alle übrigen Fälle werden durch den späteren Induktionsschluss für das Hinzukommen eines neuen Vertexes erfasst. Wir wollen jetzt annehmen, dass eine Linie zwischen den Vertexen G_1 und G_2 beseitigt worden ist. Dann haben wir auf Grund von Lemma 3

$$\overline{R^*(G_1 G_2 \ldots G_s)} = \int \Delta_{12}^c(t)\,\overline{R_{12}(G_1 G_2 \ldots G_s \,|\, \ldots \Omega_\Gamma^t \ldots)}\,dt. \tag{4.2}$$

Wenn wir behaupten könnten, dass $\overline{R}_{12}$ von derselben Form wie $\overline{R}$ wäre, dann genügte es für die Durchführung der Induktion das Integral (4.2) zu berechnen.

Wir werden nun zeigen, dass die Behauptung tatsächlich zutrifft.

Es ist

$$\overline{R_{12}(G_1 G_2 \ldots G_s \,|\, \ldots \Omega_\Gamma \ldots)} = \overline{R(G_1 G_2 \ldots G_s)} + \sum_{\Gamma' \subset G} R(G_1 G_2 \ldots G_s : \Gamma' \,|\, \ldots \Omega_\Gamma \ldots). \tag{4.3}$$

Wir wissen aber, dass

$$\overline{R(G_1 G_2 \ldots G_s : \Gamma' \,|\, \ldots \Omega_\Gamma)} = \Delta(\Gamma')\,\overline{R(G_{a_1} G_{a_2} \ldots G_{a_k})}, \tag{4.4}$$

wo $G_{a_1}, G_{a_2}, \ldots, G_{a_k}$ diejenige G_i bedeuten, welche nicht in Γ' enthalten sind und

$$\Delta(\Gamma') = -M(\Gamma')\,\overline{R(\Gamma')}. \tag{4.5}$$

Nach der Induktionsannahme soll $\overline{R(\Gamma')}$ die Form (4.1) haben und allen Voraussetzungen des Satzes genügen. Wir zeigen nun, dass durch die Operation $M(\Gamma')$ die Form nicht zerstört wird. Diese Operation wechselt tatsächlich $\Sigma\, k$ in $\Sigma\, \omega$ im Exponente und ändert dabei aber weder die Form des Zählers noch den Grad der Homogenität des Nenners; bei s-maligen Differentiation der Exponentialfunktion wird diese mit dem Ausdruck der Form $(\sqrt{\bar{\alpha}})^s$ multipliziert. Da aber in der Taylorschen Entwicklung der Faktor $(k-\omega)^s$ erscheint, so kann man

$$(\sqrt{\bar{\alpha}}\,(k-\omega))^s\,(\sqrt{\bar{\alpha}}\,p)^s$$

schreiben. Bei der Differentiation des Polynoms entstehen Faktoren der Form $(\sqrt{\bar{\alpha}})^s$, die immer mit $k-\omega$ zusammengefasst werden können. Es ist also die Form von

$\Delta(\Gamma')$ die gleiche wie von $\overline{R(\Gamma')}$. Daraus kann man leicht schliessen, dass auch $\overline{R(G:\Gamma'|\ldots\Omega_\Gamma\ldots)}$ der Induktionsannahme genugtut. Wir können also annehmen, dass

$$\overline{R_{12}(G_1 G_2 \ldots G_s \,|\, \ldots \Omega_\Gamma \ldots)} = \sum_{\mu} \frac{f^\mu(\ldots \sqrt{\bar{\alpha}}\, k \ldots \sqrt{\bar{\alpha}}\, \omega \ldots \sqrt{\bar{\alpha}} \ldots)}{\phi_r^\mu(\ldots \sqrt{\alpha_l} \ldots)} e^{i \sum\limits_{a,b} A^\mu_{G_a G_b}(\ldots \alpha \ldots) p_a p_b}. \quad (4.6)$$

Jetzt ist es schon leicht, die Struktur des Ausdrucks

$$\int \Delta_{12}^c(t)\, \overline{R_{12}(G_1^t G_2^t \ldots G_s^t \,|\, \ldots \Omega^t \ldots)}\, dt \quad (4.7)$$

zu übersehen. Offensichtlich genügt es, das Integral

$$\int \Delta_{12}^c(t) \frac{f^\mu(\ldots \sqrt{\bar{\alpha}}\,(k + l_a t) \ldots \sqrt{\bar{\alpha}}\,(\omega + l_a t) \ldots \sqrt{\bar{\alpha}} \ldots)}{\phi_r^\mu(\ldots \sqrt{\alpha_l})} e^{i \sum\limits_{a,b} A^\mu_{G_a G_b}(p_a + l_a t)(p_b + l_b t)}\, dt \quad (4.8)$$

zu berechnen, wo
$$l_a = \begin{cases} -1 & \text{wenn } k = k_1, \text{ oder } \omega = \omega_1 \\ 1 & \text{wenn } k = k_2, \text{ oder } \omega = \omega_2 \\ 0 & \text{in übrigen Fällen.} \end{cases}$$

Wir setzen für $\Delta_{12}^c(t)$ den Ausdruck

$$P_{12}(t)\, e^{i\alpha t^2} = [P_{12}(-i\nabla_r)\, e^{i\alpha t^2 + itr}]_{r=0} \quad (4.9)$$

und für
$$f^\mu(\ldots \sqrt{\bar{\alpha}}\,(k + l_a t) \ldots \sqrt{\bar{\alpha}}\,(\omega + l_a t) \ldots \sqrt{\bar{\alpha}} \ldots)$$

den Ausdruck

$$[f^\mu(\ldots \sqrt{\bar{\alpha}}\,(-i\nabla_v) \ldots \sqrt{\bar{\alpha}}\,(-i\nabla_w) \ldots \sqrt{\bar{\alpha}})\, e^{i(k + l_\alpha t)v + i(\omega + l_a t)w}]_{v=w=0}.$$

Dann bekommen wir

$$\int \Delta_{12}^c(t) \frac{f^\mu(\ldots \sqrt{\bar{\alpha}}\,(k + l_a t) \ldots \sqrt{\bar{\alpha}}\,(\omega + l t) \ldots \sqrt{\bar{\alpha}})}{\phi_r^\mu(\ldots \sqrt{\alpha_l} \ldots)} e^{i \sum\limits_{a,b} A^\mu_{G_a G_b}(p_a + l_a t)(p_b + l_b t)}\, dt$$
$$= \Bigg[P_{12}(-i\nabla_r) \frac{f^\mu(\ldots \sqrt{\bar{\alpha}}\,(-i\nabla_v) \ldots \sqrt{\bar{\alpha}}\,(-i\nabla_w) \ldots \sqrt{\bar{\alpha}})}{\phi_r^\mu(\cdots \sqrt{\alpha_l})} e^{ikv + i\omega w + i \sum\limits_{a,b} A^\mu_{G_a G_b} p_a p_b}.$$
$$\frac{\pi^2}{i\,(\sum\limits_{a,b} A_{G_a G_b} l_a l_b + \alpha)^2}\, e^{-i \frac{(2 \sum A^\mu_{G_a G_b} l_a p_b + r + \ldots c_a v \ldots + \ldots l_a w \ldots)^2}{4(\sum A_{G_a G_b} l_a l_b + a)}} \Bigg]_{r=v=w=0}. \quad (4.10)$$

Nun sieht man leicht, dass der Grad der neuen Funktion $\phi_r^{*\prime\prime}(\ldots \sqrt{\alpha_l} \ldots)$, welche entsteht, wenn man den Ausdruck (4.10) in die Form (4.1) bringt, um 4 vergrössert wird, was dem Hinzufügen einer neuen Linie entspricht.

Nehmen wir jetzt an, dass man zum Graph G einen neuen Vertex G_1 hinzufügt, welcher mit dem Graphe G_2 durch eine Linie mit der Verbreitungsfunktion $\Delta_{12}^c(t)$ verbunden ist. Auf Grund der Formel (3.8) und auf Grund der Tatsache, dass G_1 mit G_2 nur mit einer einzigen Linie verbunden ist, bekommen wir

$$\begin{aligned} \overline{R(G_1 G_2 \ldots G_{s+1})} &= \Delta(G_1)\, \overline{R(G_2 G_3 \ldots G_{s+1})} \\ &= \delta(\textstyle\sum k) \int R(G_2^t G_3^t \ldots G_{s+1}^t)\, \Delta(G_1^t)\, \Delta_{12}^c(t)\, \delta(t + \sum\limits_{G_1} P)\, dt, \end{aligned} \tag{4.11}$$

wo $\sum\limits_{G_1} P$ die Summe der Impulse des Graphen G_1 bezeichnet.

Das elementare Aufheben der δ-Funktion zeigt, dass auch in diesem Falle die Behauptung des Satzes richtig ist. In der Tat, der Grad der Funktion ϕ_s vergrössert sich um den Grad des Polynoms in $\Delta(G_1)$ und des Polynoms $P_{12}(t)$. Um zu berücksichtigen, dass die Zahl der Linien und der Vertexe sich um Eins vergrössert, muss man in der Formel für r die Zahl 4 addieren und subtrahieren.

Es bleibt also noch die Behauptungen des Satzes über den Faktor im Exponenten zu beweisen.

Aus der bekannten Ungleichung

$$\Big(\sum_{a,b} A''_{G_a G_b}\, p_a\, p_b\Big)\Big(\sum_{a,b} A''_{G_a G_b}\, l_a\, l_b\Big) \geq \Big(\sum_{a,b} A''_{G_a G_b}\, l_a\, p_b\Big)^2$$

folgt leicht, dass die Form

$$\sum_{a,b} A''_{G_a G_b}(\ldots \alpha_l \ldots)\, x_a\, x_b$$

positiv definit ist.

Durch Induktion beweisen wir noch die Ungleichung:

$$\sum_{a,b} A''_{G_a G_b}(\ldots \alpha_l \ldots)\, x_a\, x_b \leq \Big(\sum_l \alpha_l\Big)\Big(\sum_a |x_a|\Big)^2.$$

Im Falle des einfachsten Graphen ist die Ungleichung leicht verifizierbar. Wir betrachten jetzt den Graph mit S Vertexen und L Linien. Dann addieren wir zu ihm eine neue Linie und rechnen die entsprechende quadratische Form aus. Auf Grund der Formel (4.10) bekommen wir

$$\sum_{a,b} A^{*\prime\prime}_{G_a G_b}(\ldots \alpha_l \ldots)\, x_a\, x_b = \sum_{a,b} A''_{G_a G_b}(\ldots \alpha_l \ldots)\, x_a\, x_b - \frac{\Big(\sum\limits_{a,b} A''_{G_a G_b}\, x_a\, l_b\Big)^2}{\Big(\sum A_{G_a G_b}\, l_a\, l_b + \alpha\Big)}.$$

Auf Grund der Induktionsannahme können wir schreiben

$$\sum_{a,b} A^{\mu}_{G_a G_b} x_a x_b - \frac{\sum (A^{\mu}_{G_a G_b} x_a l_b)^2}{(\sum A_{G_a G_b} l_a l_b + \alpha)} \leq (\sum_l \alpha_l)(\sum_a |x_a|)^2 - \frac{(\sum A^{\mu}_{G_a G_b} l_a x_c)^2}{(\sum A_{G_a G_b} l_a l_b + \alpha)}.$$

Da aber $\Sigma A^{\mu}_{G_a G_b} l_a l_b > 0$ so verstärken wir die Ungleichung wenn wir auf der rechten Seite das negative Glied weglassen und das positive addieren. Dann bekommen wir

$$\sum A^{*\mu}_{G_a G_b}(\ldots \alpha_l \ldots) x_a x_b \leq (\sum_l \alpha_l + \alpha)(\sum_a |x_a|)^2.$$

Im Falle des Hinzufügens des neuen Vertexes kann man ähnlich verfahren.

Jetzt werden wir den folgenden wichtigen Satz beweisen.

Satz 4. *Es sei $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_s$ ein zusammenhängender Graph, r_l der Grad des Polynoms der Verbreitungsfunktion der Linie l, $r[\Delta(G_a)]$ der Grad des Polynoms in $\Delta(G_a)$. Wir wählen die Zahlen*

$$\bar{r}[\Delta(G_a)] \geq r[\Delta(G_a)], \quad \bar{r}_l \geq r_l. \tag{4.12}$$

Es sei $\Gamma_k = G_{\alpha_1} \times G_{\alpha_2} \times \cdots \times G_{\alpha_k}$ ein Untergraph des Graphen G. Wir setzen

$$\nu(\Gamma_k) = \sum_{\alpha} \bar{r}[\Delta(G_a)] + \sum_l \bar{r}_l + 2L_k - 4(\bar{s}_k - 1), \tag{4.13}$$

wo die Summation über diejenige G_a zu erstrecken ist, die in Γ_k enthalten sind und über diejenigen l, welche die genannten G_a verbinden; $\bar{s}_k$ ist die Zahl der Urvertexe in Γ_k. Wir definieren zu diesen $\nu(\Gamma_k)$ die Operation:

$$R(G_1 G_2 \ldots G_s) I_M(\ldots k \ldots)$$
$$= \delta\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \prod_l I(\alpha_l) e^{-i\sum_l \alpha_l m_l^2 - \varepsilon \sum_l \alpha_l} \sum_\mu F_\mu(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha \ldots) \cdot$$
$$\cdot e^{i\sum_{a,b} A^{\mu}_{G_a G_b} p_a p_b} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_L. \tag{4.14}$$

In der Formel (4.14) bedeutet F_μ ein Polynom in k, ω und eine rationale Funktion in α_l, wobei das Summenzeichen bedeutet, wie im vorigem Satze, dass man im allgemeinen bei der Berechnung von $R(G_1 G_2 \ldots G_s) I_M(\ldots k \ldots)$ mehrere Glieder von der Form

$$F_\mu(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha \ldots) e^{i\sum_{a,b} A^{\mu}_{G_a G_b} p_a p_b}$$

bekommen kann.

Dann kann man behaupten, dass die folgende Ungleichung gilt

$$|F_\mu(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha \ldots)| \leq \frac{C(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha \ldots)}{\prod\limits_l \alpha_l^{1-\frac{1}{2L}}}, \tag{4.15}$$

wo L die Zahl der Linien, die die Urvertexe $G_1, G_2, \ldots, G_s$ miteinander verbinden und C ein in $k \ldots \omega \ldots \alpha \ldots$ polynomial beschränkter Ausdruck ist (d. h. durch ein Polynom nach oben abgeschätzt werden kann.

Beweis. Der Fall des einfachsten Graphen kann auf Grund der vorigen Berechnungen leicht verifiziert werden. Es sei jetzt der Satz richtig für alle Graphen mit der Linienzahl $L = m$ (wobei $m \geq s-1$ ist) und der Vertexenzahl $s_1 \leq s$. Wir werden ihn für Graphen mit der Linienzahl $L = m+1$ beweisen. Betrachten wir dazu einen Graph mit $m+1$ Linien. Es können zwei Fälle eintreten: entweder zerstört das Weglassen einer Linie den Zusammenhang des Graphen $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_s$ oder nicht. Im ersten Falle sei es die Linie $G_a - G_b$ deren Weglassen den Graph in zwei getrennte Untergraphen Γ_a und Γ_b teilt. Es ist leicht zu sehen, dass in diesem Falle $R(G_1 G_2 \ldots G_s)$ immer von der Form

$$R_a(\ldots k_\nu - \delta_{\nu\nu_0} \sum k \ldots)\, \Delta^c_{ab}(\sum k)\, R_b(\ldots k_\mu - \delta_{\mu\mu_0} \sum k \ldots)$$

sein wird, wo R_a, R_b den Γ_a und Γ_b entsprechen.

Daher

$$F(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha) = F_a(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha)\, F_b(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha)\, P_{ab}(\sum k),$$

wo P_{ab} ein Polynom der Verbreitungsfunktion Δ^c_{ab} ist. Da die Zahl der Vertexe in Γ_a und Γ_b kleiner als S ist, so haben wir nach der Induktionsannahme

$$\left| F_a \prod_{\Gamma_a} \alpha_l^{1-\frac{1}{2L_a}} \right| \leq C_a$$

$$\left| F_b \prod_{\Gamma_b} \alpha_l^{1-\frac{1}{2L_b}} \right| \leq C_b$$

wo $\prod\limits_{\Gamma_a}$, $\prod\limits_{\Gamma_b}$ über die Linien, die im Innern von Γ_a, Γ_b liegen, ausgedehnt sind.

Daher

$$\left| F \prod_G \alpha_l^{1-\frac{1}{2L}} \right| \leq C_a C_b \left| P_{ab}(\sum k)\, \alpha_{ab}^{1-\frac{1}{2L}} \prod_{\Gamma_a} \alpha_l^{\frac{1}{2L_a}-\frac{1}{2L}} \prod_{\Gamma_b} \alpha_l^{\frac{1}{2L_b}-\frac{1}{2L}}, \right. \tag{4.16}$$

wo C ein Polynomial beschränkter Ausdruck ist und

$$L = L_a + L_b + 1.$$

Damit ist die Behauptung für den ersten Fall bewiesen. Wir bemerken, dass dieser Fall die Induktion nach der Vertexenzahl realisiert.

Wir betrachten jetzt den Fall, dass das Weglassen einer beliebigen Linie den Zusammenhang des Graphen $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_s$ nicht zerstört. In diesem Falle benützen wir die rekurrente Formel

$$R^* (G_1 G_2 \ldots G_s) = \int \Delta_{12}^c (t) \, R_{12} (G_1^t G_2^t \ldots G_s^t : \Gamma' \,|\, \ldots \Omega_\Gamma \ldots) \, dt$$

unter der Annahme, dass der Einfluss der Linie $1-2$ in Rechnung gestellt wird.

Wir haben schon bei dem Beweise des vorigen Satzes gesehen, dass die Anwendung dieser Formel für Induktionszwecke auf Schwierigkeiten stösst, die damit verbunden sind, dass man zuerst die Erfüllung der Induktionsannahme nicht nur für $R(G_1 G_2 \ldots G_s)$ sondern auch für $R_{12}(G_1 G_2 \ldots G_s \,|\, \ldots \Omega_\Gamma \ldots)$ zeigen muss.

Wir erinnern, dass

$$R_{12} (G_1 G_2 \ldots G_s \,|\, \ldots \Omega_\Gamma \ldots) = R (G_1 G_2 \ldots G_s \,|\, \ldots \Omega_\Gamma \ldots) + \sum_{\Gamma' \subset G} R (G_1 G_2 \ldots G_s : \Gamma' \,|\, \ldots \Omega_\Gamma \ldots)$$

und dass die Operation ohne Sternchen bei Anwesenheit von m-Linien vorgenommen wird, aber mit denselben $\nu(\Gamma_k)$ wie bei $m+1$ Linien, Wir bemerken, dass diese Vorderung den Annahmen des Satzes nicht widerspricht, denn das Zusammenfallen der Zahlen $\nu(\Gamma_k)$ im Graphe mit $(m+1)$ Linien und mit m-Linien verstärkt die Bedingungen der Form

$$\bar{r}[\Delta(G_a)] \geq r[\Delta(G_a)], \quad \bar{r}_l \geq r_l,$$

Um zu zeigen, dass R_{12} den Induktionsbedingungen genügt, ist es hinreichend dies für $R(G_1 G_2 \ldots G_s : \Gamma' \,|\, \ldots \Omega_\Gamma \ldots)$ zu zeigen.

Betrachten wir dazu $\Delta(\Gamma')$, also die Summe von der Form

$$\sum_\mu C_\mu (\ldots \alpha_l \ldots) \, P_\mu (\ldots k \ldots \omega \ldots) \, e^{i \sum_{a,b} A^\mu_{G_a G_b} \omega_a \omega_b}.$$

Da aber Γ' schwachzusammenhängend ist, also $\overline{R(\Gamma')} = R(\Gamma')$, so haben wir auf Grund der Induktionsannahme

$$|\, C_\mu (\ldots \alpha_l \ldots) \,| \leq \frac{C}{\prod_{\Gamma'} \alpha_l^{1 - \frac{1}{2 L_1}}},$$

wo L_1 die Linienzahl in Γ' ist. Die Grade der Polynome genügen der Bedingung

$$r(P_l) \leq \nu(\Gamma') = \sum_\alpha \bar{r}[\Delta(G_a)] + \sum_l r_l + 2 L_{\Gamma'} - 4 (s_{\Gamma'} - 1).$$

Weil aber Γ' einige G_i umfasst und weil P_μ von C_μ abgetrennt ist, so können wir die Grösse

$$R_\mu(G_{\alpha_1} G_{\alpha_2} \dots G_{\alpha_\mu} : \Gamma' \,|\, \dots \Omega_\Gamma \dots)$$

bilden, in welcher als Basisvertexe Γ' und diejenigen G_i genommen werden, welche nicht in Γ' enthalten sind. Dabei soll sein

$$\Delta(\Gamma') = P(\dots k \dots \omega \dots)\, \delta(\sum k),$$

wobei, auf Grund der Bedingung $\nu(\Gamma') \geq r(P)$, das System der Operationen mit ihren Zahlen ν die mit entsprechenden Zahlen des originellen Graphes zusammenfallen, sich anwendbar zeigt. Deswegen sind die Induktionsannahmen für

$$R_\mu(G_{\alpha_1} G_{\alpha_2} \dots G_{\alpha_\mu} : \,|\, \dots \Omega_\Gamma \dots) \simeq \sum F(\dots k \dots \omega \dots \alpha)\, e^{i \sum A_{G_a G_b} p_a p_b}$$

erfüllt, d. h.

$$|F(\dots k \dots \omega \dots \alpha)| \leq \frac{C}{\prod \alpha_l^{1-\frac{1}{2L'}}} \leq \frac{Q}{\prod \alpha_l^{1-\frac{1}{2L}}}, \tag{4.17}$$

wo

$$L' = L(G_1 G_2 \dots G_s) - L(\Gamma').$$

Wir haben aber

$$\begin{aligned} R(G_1 G_2 \dots G_s : \Gamma' \,|\, \dots \Omega_\Gamma \dots) &= \Delta(\Gamma')\, R(G_{\alpha_1} G_{\alpha_2} \dots G_{\alpha_\mu} : \Gamma' \,|\, \Omega_\Gamma) \\ &= \sum_\mu C_\mu(\dots \alpha_l \dots)\, e^{i \sum A^\mu_{G_a G_b} \omega_a \omega_b} R_\mu(G_{\alpha_1} G_{\alpha_2} \dots G_{\alpha_\mu} : \Gamma' \,|\, \dots \Omega \dots) \\ &= \sum_\nu G_\nu(\dots k \dots \omega \dots \alpha)\, e^{i \sum A^\nu_{G_a G_b} p_a p_b}. \end{aligned}$$

Auf Grund von (4.16), (4.17) finden wir

$$|G_\nu(\dots k \dots \omega \dots \alpha)| \leq \frac{K}{\alpha_l^{1-\frac{1}{2L}}} \tag{4.18}$$

wo K polynomial in $k, \omega, \dots \alpha$ beschränkt ist.

Wir haben uns also überzeugt, dass man schreiben kann

$$R_{12}(G_1 G_2 \dots G_s \,|\, \dots \Omega_\Gamma \dots) = \sum_\mu F_\mu(\dots k \dots \omega \dots \alpha)\, e^{i \sum_{a,b} A^\mu_{G_a G_b} p_a p_b},$$

wobei

$$|F_\mu(\dots k \dots \omega \dots \alpha)| \leq \frac{C(\dots k \dots \omega \dots \alpha)}{\prod_l \alpha_l^{1-\frac{1}{2L}}}$$

und polynomial beschränkt ist. Jetzt können wir schon auf Grund der Formel (3.10) leicht schliessen, dass wenn

$$R^*(G_1 G_2 \ldots G_s \,|\, \ldots \Omega_\Gamma \ldots) = \sum_\mu F_\mu^*(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha)\, e^{i \sum\limits_{a,b} A^*_{G_a G_b} p_a p_b}$$

so wird sein
$$|F^*(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha)| \leq \frac{K(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha)}{\prod\limits_l^* \alpha_l^{1-\frac{1}{2L}}} \cdot \frac{1}{\alpha_{12}^c}, \tag{4.20}$$

wo c eine positive Zahl ist. Nun können wir auf Grund der Bedingungen des Satzes eine beliebige Linie wegwerfen. Wir wollen diejenige wegwerfen für welche α_{ab} maximal ist. (Wir denken uns α_{ab} fixiert.) Für solche Linien gilt

$$\alpha_{ab} \geq \frac{1}{L} \sum_l \alpha_l. \tag{4.21}$$

Daraus sieht man leicht, dass

$$|F^*| \prod_l^* \alpha_l^{1-\frac{1}{2L}} \leq \frac{K^*(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha)}{(\sum\limits_l \alpha_l)^c} \tag{4.22}$$

In der Formel (4.22) bedeutet das Sternchen, dass das Produkt über alle $L = m + 1$ Linien erstreckt ist, K^* bedeutet einen polynomial beschränkten Ausdruck. Andererseits, auf Grund des Satzes 3 gilt

$$\overline{R(G_1 G_2 \ldots G_s \,|\, \ldots \Omega)} \simeq \sum_\mu \overline{F_\mu(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha)\, e^{i \sum\limits_{a,b} A^\mu_{G_a G_b} p_a p_b}}, \tag{4.23}$$

wo
$$F_\mu(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha) = \frac{f_\mu(\ldots \sqrt{\bar{\alpha}}\, k \ldots \sqrt{\bar{\alpha}}\, \omega \ldots \sqrt{\bar{\alpha}})}{\phi_r(\ldots \sqrt{\alpha_l} \ldots)}.$$

Wir wissen weiter, dass

$$R^*(G_1 G_2 \ldots G_s) = (1 - M(G))\, \overline{R^*(G_1 G_2 \ldots G_s)}, \tag{4.24}$$

d. h. R^* ist gleich dem Restglied der Taylorschen Reihe von $\bar{R}^*$ nach den Potenzen $k - \omega$ $\nu(G)$-ter Ordnung

$$R^*(G_1 G_2 \ldots G_s) = \frac{1}{\nu!} \int_0^1 (1-\tau)^\nu \frac{\partial^{\nu+1}}{\partial \tau^{\nu+1}} R^*(G_1^\tau G_2^\tau \ldots G_s^\tau)\, d\tau. \tag{4.25}$$

Hier bedeutet G_1^τ usw., dass an der Stelle k_j soll $\omega_j + \tau(k_j - \omega_j)$ stehen. Jetzt bemerken wir, dass k den Faktor $\sqrt{\bar{\alpha}}$ enthält und nach der $(\nu+1)$-maligen Differentiation als Faktoren homogene rationale Funktionen von $\sqrt{\alpha_l}$ $(\nu+1)$-ter Ordnung erscheinen. Deswegen haben wir

$$F^*(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha) = \frac{f(\ldots \sqrt{\bar{\alpha}}\, k \ldots \sqrt{\bar{\alpha}}\, \omega \ldots \sqrt{\bar{\alpha}})}{\phi_{r-(\nu+1)}(\ldots \sqrt{\alpha_l} \ldots)} \tag{4.26}$$

und, auf Grund (4.22),

$$\left| \frac{f(\ldots \sqrt{\bar{\alpha}}\, k \ldots \sqrt{\bar{\alpha}}\, \omega \ldots \sqrt{\bar{\alpha}})}{\phi_{r-(\nu+1)}(\ldots \sqrt{\alpha_l} \ldots)} \prod_l{}^* \alpha_l^{1-\frac{1}{2L}} \right| \le \frac{K^*(k \ldots \omega \ldots \alpha)}{(\sum_l \alpha_l)^c}. \tag{4.27}$$

Setzen wir jetzt $\qquad t = \sum_l \alpha_l, \quad \alpha_l' = \frac{1}{t}\alpha_l, \quad \sum a_l' = 1.$

Wie es aus den Eigenschaften der Funktion f folgt, bekommen wir dann gemäss (4.27)

$$\left| \frac{f(\ldots \sqrt{\bar{\alpha}'}\, k \ldots \sqrt{\bar{\alpha}'}\, \omega \ldots t\sqrt{\bar{\alpha}'})}{\phi_{r-(\nu+1)}(\ldots \sqrt{\alpha_l'} \ldots)} \prod_l \alpha_l'^{1-\frac{1}{2L}} \right| t^{\frac{\nu+1-r+2L-1}{2}} \le \frac{K^*}{t^c}. \tag{4.28}$$

Also
$$\left| \frac{f(\ldots \sqrt{\bar{\alpha}'}\, k \ldots \sqrt{\bar{\alpha}'}\, \omega \ldots t\sqrt{\bar{\alpha}'})}{\phi_{r-(\nu+1)}(\ldots \sqrt{\alpha_l'} \ldots)} \right| \prod_l{}^* \alpha_l'^{1-\frac{1}{2L}} \le \frac{K^*}{t^{c-s}}, \tag{4.29}$$

wo
$$S = \frac{\nu+1-r+2L-1}{2} > 0.$$

Da aber die linke Seite ein Polynom in t ist und da aus der Beschränktheit des Polynoms durch eine Zahl N im Intervalle, sagen wir 1–2, die Beschränktheit aller seiner Koeffizienten durch die Zahlen, die nur von N abhängen, folgt, so schliessen wir, dass die linke Seite durch einen polynomialen Ausdruck beschränkt werden soll. Auf Grund der Positivität der Zahl S folgern wir daraus

$$\left| \frac{f(\ldots \sqrt{\bar{\alpha}'}\, k \ldots \sqrt{\bar{\alpha}'}\, \omega \ldots t\sqrt{\bar{\alpha}'})}{\phi_{r-(\nu+1)}(\ldots \sqrt{\alpha_l'} \ldots)} \right| \prod_l{}^* \alpha_l'^{1-\frac{1}{2L}} t^s \le C^*(\ldots k \ldots w \ldots t) \tag{4.30}$$

oder
$$|F^*(\ldots k \ldots \omega \ldots \alpha \ldots)| \prod_l{}^* \alpha_l^{1-\frac{1}{2L}} \le C^*(\ldots k \ldots \omega \ldots t). \tag{4.31}$$

Jetzt sind wir schon im Stande, die Existenz der Grenze im Ausdrucke

$$R(G)\, I_M(\ldots k \ldots) \text{ für } \varepsilon \to 0, \quad M \to \infty$$

zu beweisen.

Satz 5. *Für $\varepsilon \to 0$, $M \to \infty$ strebt der Ausdruck $R(G_1 G_2 \ldots G_s)\, I_M(\ldots k \ldots)$ schwach gegen die Grenze $R(G_1 G_2 \ldots G_s)\, I(\ldots k \ldots)$.*

Beweis. Die Existenz der Grenze für $M \to \infty$ bei fixiertem $\varepsilon > 0$ folgt aus der Ungleichung (4.15). Der Faktor $e^{-\alpha \sum_l \alpha_l}$ macht tatsächlich das Integral (4.14) bei grossen α_l absolut konvergent und die möglichen Singularitäten bei $\alpha_l \to 0$ haben nach der Ungleichung (4.15) einen integrierbaren Charakter. Auf diese Weise sehen wir, dass für $M \to \infty$, $R(G) I_M^\varepsilon(\dots k \dots)$ gegen die Grenze

$$R(G) I^\varepsilon(\dots k \dots)$$
$$= \delta\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-i \sum_l \alpha_l m_l^2 - \varepsilon \sum_l \alpha_l} \sum F_\mu(\dots k \dots \omega \dots \alpha) \cdot$$
$$\cdot e^{i \sum_{a,b} A^\mu{}_{G_a G_b} p_a p_b} d\alpha_1 \, d\alpha_2 \dots d\alpha_L \quad (4.32)$$

sogar im gewöhnlichen Sinne strebt. Um die Existenz der Grenze für $\varepsilon \to 0$ zu beweisen, nehmen wir an, dass alle Massen von Null verschieden sind: $m_l \neq 0$. Wir machen jetzt ganz formal die folgende Transformation der Integrationsvariablen

$$\alpha_l = -i \beta_l. \quad (4.33)$$

Dann kann man (4.32) in der Form

$$R(G) I^\varepsilon(\dots k \dots)$$
$$= \delta\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\sum_l \beta_l m_l^2 + i\varepsilon \sum \beta_l} \sum_\mu F_\mu(\dots k \dots \omega \dots i\beta \dots) \cdot$$
$$\cdot e^{\sum_{a,b} A^\mu{}_{G_a G_c}(\dots \beta \dots) p_a p_b} d\beta_1 \, d\beta_2 \dots d\beta_L \quad (4.34)$$

schreiben. Es gilt aber das

LEMMA 4. *Bei der Erfüllung der Bedingung*

$$(\sum_a p_a^0)^2 < \min m_l^2 \quad (4.35)$$

ist die Form

$$A = \sum_{a,b} A_{G_a G_b}(\dots \beta \dots) p_a^0 p_b^0 - \sum_{a,b} A_{G_a G_b}(\dots \beta \dots) \overline{p}_a \overline{p}_b - \sum \beta_l m_l \quad (4.36)$$

negativ definit.

Beweis. Aus dem Satze 3 folgt

$$A < \sum_l \beta_l (\sum p_a^0)^2 - \sum_l \beta_l m_l^2. \quad (4.37)$$

Auf Grund der Bedingung (4.35) bekommen wir

$$A < 0$$

Aus dem Lemma 4 folgt ein wichtiger Schluss: der exponentiale Faktor ist bei Erfüllung der Bedingung (4.35) negativ und das Integral (4.34) ist absolut konvergent, was die Variablentransformation

$$\alpha_l = -i\beta_l$$

legalisiert. Die Funktion ist analytisch bei beliebigem $\varepsilon > 0$ im Gebiete (4.35). Für $\varepsilon \to 0$ existiert die Grenze des Ausdrucks $R(G) I^\varepsilon(\ldots k \ldots)$ im Gebiete (4.35) und stellt eine analytische Funktion dar. Bei den beliebigen Werten der Impulse wird die Grenze des Ausdrucks $R(G) I^\varepsilon(\ldots k \ldots)$ nur im Sinne der schwachen Konvergenz existieren. Dies kann in folgender Weise bewiesen werden. Wir betrachten

$$\int \int \ldots \int R(G) I^\varepsilon(\ldots k \ldots) F(\ldots k \ldots) \, d k_1 \, d k_2 \ldots d k_n, \tag{4.38}$$

wo $F(k_1 k_2 \ldots k_n)$ eine Funktion der Klasse $C(q, r, n)$ bei genügend grossen q, r ist. Wir zerlegen die Funktion $F(\ldots k \ldots)$ in zwei Komponente

$$F(\ldots k \ldots) = \phi(\ldots k \ldots) + [F(\ldots k \ldots) - \phi(\ldots k \ldots)] = 0, \tag{4.39}$$

wo $\phi(k)$ so gewählt wird, dass die ausserhalb des Gebietes (4.35) Null wird und dass genügend grosse Zahl der Momente der Funktion $F - \phi$ Null wird,

$$\int \int \ldots \int k_{i_1}^{\alpha_1} k_{i_2}^{\alpha_2} \ldots k_{i_s}^{\alpha_s} [F(\ldots k \ldots) - \phi(\ldots k \ldots)] \, d k_{i_1} \, d k_{i_2} \ldots d k_{i_s} = 0.$$

Für $\varepsilon \to 0$ streben die Ausdrücke

$$\int \int \ldots \int R(G) I^\varepsilon(\ldots k \ldots) \phi(\ldots k \ldots) \, d k_1 \, d k_2 \ldots d k_n$$

$$\int \int \ldots \int R(G) I^\varepsilon(\ldots k \ldots) [F(\ldots k \ldots) - \phi(\ldots k \ldots)] \, d k_1 \, d k_2 \ldots d k_n$$

gegen bestimmte Grenze. Der erste auf Grund der Existenz der Grenze im gewöhnlichen Sinne, der zweite auf Grund des Satzes 4.

Endlich bemerken wir, für den Fall, dass alle $m_l \neq 0$, dass die Analytizität der Funktion $R(G) I(\ldots k \ldots)$ im Gebiete (4.35) erlaubt, die Punkte ω zu fixieren, um welche die Taylorentwicklung bei der Definition von $\Delta(\Gamma_k)$ geschrieben wurde. Wir wählen $\omega = 0$; dann ist das Resultat Lorentzinvariant.

Wenn nicht alle Massen von Null verschieden sind, kann man die Analyzität von $R(G) I(\ldots k \ldots)$ nur für imaginäre Komponente von k beweisen. Die Taylorentwicklung soll man dann um die Punkte

$$\omega = (i\omega^0, \bar{\omega})$$

schreiben. Um aber die Lorentzinvarianz zu behalten, muss man über die Kugel $(\omega_0)^2 + \bar{\omega}^2 = \mu^2$ die erhaltenen Polynome mitteln, wo μ eine beliebige Zahl ist.

Schlussbemerkungen

Die Sätze, die in vorigen Paragraphen bewiesen wurden, erlauben die gestellte Aufgabe über die Konstruktion der Produkte von der Form

$$\prod_l \Delta_l^c (x_r - x_s)$$

vollständig zu lösen. Einerseits definiert der Satz 2 ein solches Produkt als Funktional im Unterraume $D(q, r, n)$ der schlichten Funktionen, andererseits zeigen die Sätze 3, 4, 5, dass die Operation R die Fortsetzung dieses Funktionals auf den ganzen Raum $C(q, r, n)$ verwirklicht. Das kann man am besten sehen, wenn man zur x-Darstellung übergeht. Dann drückt man $\Delta(\Gamma_1)\Delta(\Gamma_2)\ldots\Delta(\Gamma_m)$ durch die Diracschen Funktionen $\delta(x_r - x_s)\,\delta(x_\mu - x_\nu)$ und deren Ableitungen aus, welche als Funktionale betrachtet, sich im Raume $D(q, r, n)$ annulieren.

Wir bemerken, dass wir nur zusammenhängende Graphen erledigt haben. Aber der Fall der nicht zusammenhängender Graphe stellt keine Schwierigkeiten dar, denn wir können immer den Satz über die direkte Multiplikation der verallgemeinerten Funktionen anwenden. Weiter bemerken wir, dass für die Quantentheorie der Wellenfelder die Definition der Ausdrücke $\Delta(\Gamma_k)$ in folgender Weise verallgemeinert werden soll:

$$\Delta(\Gamma) = -M(\Gamma)\,\overline{R(\Gamma)} + \delta(\Sigma\, k)\, Z_\Gamma(\ldots k \ldots),$$

wo Z ein Polynom derselben Struktur, wie das Polynom $M(\Gamma)\,\overline{R(\Gamma)}$ ist, aber mit beliebigen Koeffizienten.

Auf diese Weise wird der Ausdruck $R(G)\,I(k)$ einige beliebige Konstanten enthalten. Diese Konstanten spielen eine wichtige Rolle bei der Renormierung der physikalischen Konstanten der Felder. Diese Frage wollen wir hier nicht diskutieren. Vergleiche dazu die oben zitierten Artikeln [9].

Anhang

In diesem Anhange soll die physikalische Bedeutung der in den vorigen Paragraphen entwickelten Theorie der Multiplikation der Kausalfunktionen erklärt werden. Dieser Anhang wendet sich an diejenigen Leser, die mit den wichtigsten Begriffen der modernen Quantentheorie der Felder schon vertraut sind.

Wie schon in der Einführung gesagt wurde, spielt unsere Theorie eine sehr wichtige Rolle bei der Konstruktion der Streumatrix mit störungstheoretischen Methoden.

Wie wohl bekannt, wird die S-Matrix als Lösung der Schrödingerschen Gleichung

$$i \frac{\partial S}{\partial t} = H S,$$

wo H der Operator der Wechselwirkungsenergie ist, in der Form der Dysonschen Entwicklung geschrieben:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \int \dots \int T(H(x_1) H(x_2) \dots H(x_n)) d x_1 d x_2 \dots d x_n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \int \dots \int S_n(x_1, x_2, \dots, x_n) d x_1 d x_2 \dots d x_n. \tag{1}$$

In der Quantenelektrodynamik hat man, zum Beispiel, für H den Ausdruck

$$H = \sqrt{4\pi}\, e \sum_m : \bar{\psi}(x) \gamma^m \psi(x) A_m(x) : ,$$

wo ψ, $\bar{\psi}$ die Komponenten des Spinorfeldes und A_m des Fotonenfeldes sind, zu setzen.

Bei dem genauen Studium der Entwicklung (1) entstehen zwei Probleme. Erstens wissen wir nichts von der Konvergenz der Reihe. Dieses Konvergenzproblem ist sehr schwer und wir lassen es hier beiseite. Zweitens, in den einzelnen Näherungswerten S_n für die Streumatrix begegnen wir divergenten Impulsintegralen. Diese ergeben sich daraus, dass wenn wir die Ausdrücke $S_n(x_1, x_2, \dots x_n)$ mit Hilfe des Wickschen [15] Satzes in der Normalform darstellen

$$S_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum K_{\dots\alpha\dots\beta\dots}(x_1, x_2, \dots, x_n) \dots u_\alpha^{(+)}(x_r) \dots u_\beta^{(-)}(x_s),$$

wo u_α^{+} die Erzeugungsoperatoren, $u_\alpha^{(-)}$ die Vernichtungsoperatoren sind, die Koeffizientenfunktionen $K_{\dots\alpha\dots\beta\dots}$ gerade von den Produkten der Kausalfunktionen von der Form

$$\prod_l \Delta_l^c (x_r - x_s)$$

gebildet werden und diese führen im Impulsraume in der Regel auf divergente Integrale.

Um diesen Integralen einen finiten Sinn zuzuschreiben, haben Schwinger, Feynman, Dyson und Salam die Subtraktionstechnik ausgearbeitet. Dabei scheinen alle diese Methoden ein Fremdkörper in der Theorie zu sein und der Zusammenhang aller Begriffe wird erst durch die Renormalisationstechnik erklärt. Der tiefe mathematische Sinn der Operationen wird in [7], [8] nicht erklärt. Erst die neue Theorie, die in den Arbeiten [9] entwickelt wurde, hat den physikalischen und mathematischen Sinn aller dieser Methoden aufgeklärt. Wir wollen hier die gekürzte Darstellung dieser Theorie bringen.

In der neuen Theorie wird die Streumatrix auf Grund der vier physikalischen Postulate, welche dem Hamiltonischen Formalismus äquivalent sind, konstruiert, und die Lagrangesche Funktion $L(x)$ der wechselwirkenden Felder als bekannt vorausgesetzt.

Diese Postulate lauten:

1) Korrespondenz mit der klassischen Theorie,
2) Lorentzkovarianz,
3) Unitarität,
4) Kausalität.

Dabei führt man, um mathematisch die Einschaltung und Ausschaltung der Wechselwirkung zu beschreiben, eine Hilfsfunktion $g(x)$ ein, welche gleich Null ist im Gebiete, wo die Wechselwirkung nicht eingeschaltet und gleich eins im Gebiete, wo die Wechselwirkung vollständig eingeschaltet ist.

Wenn wir jetzt die Anfangsamplitude fixieren, so können wir die Endzustandsamplitude als Funktional von $g(x)$ betrachten:

$$\phi(g) = S(g)\,\phi_a.$$

Der reale Fall, wenn die Wechselwirkung im ganzen Raume eingeschaltet ist, wird durch die Matrix $S(1)$ beschrieben. Mit Hilfe des Korrespondenzprinzips bekommt man für unendlich kleine $g(x)$

$$S(g) = 1 + i\int L(x)\,g(x)\,dx \tag{2}$$

wo $L(x)$ die Lagrangesche Funktion der wechselwirkenden Felder bedeutet.

Das zweite Postulat bedeutet folgendes:

Es sei
$$x \rightarrow Lx$$
die Transformation der vollen Lorentzgruppe. Die Funktion $g(x)$ geht bei solcher Transformation in $g(Lx)$ über, d. h. $g(x) \rightarrow Lg = g(Lx)$. Es sei u_L der Operator, welcher das Transformationsgesetz der Zustandsamplitude bestimmt

$$\phi'(Lg) = U_L\,\phi(g).$$

Dann erhalten wir für $S(g)$ das folgende Transformationsgesetz

$$S(Lg) = U_L\,S(g)\,U_L^{-1} = U_L\,S(g)\,U_L^{*}. \tag{3}$$

Die Unitarität führt zu der Gleichung:

$$S^{*}(g)\,S(g) = 1 \tag{4}$$

Die Kausalität bedeutet, dass die Ereignisse, welche im System vorgehen, den Einfluss auf die Evolution des Systems nur in der Zukunft, aber nicht in der Vergangenheit haben können. Um das gesagte mathematisch zu formulieren, nehmen wir an, dass in einer kleinen Umgebung des Raumzeitpunktes y die Funktion $g(x)$ einen unendlich kleinen Zuwachs $\delta g(x)$ erhielt. Dann bekommt die Amplitude $\phi(g)$ den Zuwachs

$$\delta \phi(g) = \delta S(g) \phi = \delta S(g) S^*(g) \phi(g).$$

Auf Grund des oben gesagten soll also der Operator $1 + \delta S(q) S^*(q)$, welcher $\phi(q)$ in $\phi(g) + \delta \phi(g)$ überführt, nicht von der Änderung der Funktion $g(x)$ bei $x^0 < y^0$ abhängen. Auf Grund der Lorentzinvarianz darf $\delta S(g) S^*(g)$ auch bei $x \sim y$ ($\sim$ raumartig) von $g(x)$ nicht abhängen.

Wir können also, wenn wir uns den Begriff der Variationsableitung zu Hilfe ziehen, das Postulat der Kausalität in der Form der Bedingung

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \left(\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} S^*(y) \right) = 0 \quad \text{bei } x \lesssim y \tag{5}$$

schreiben (d. h. bei $x_0 < y_0$, oder $x \sim y$).

Um jetzt $S(g)$ zu finden, die allen Bedingungen (2), (3), (4), (5) genügt, muss man sich der formalen Reihenentwicklung bedienen.

Wir suchen $S(g)$ in der Form

$$S(g) = 1 + \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \int \ldots \int S_n(x_1 x_2, \ldots x_n) g(x_1) g(x_2) \ldots g(x_n) d x_1 d x_2 \ldots d x_n. \tag{6}$$

Das Problem der Konvergenz der Reihe bleibt dabei auch offen. Wenn wir jetzt diese Entwicklung in die Bedingungen (2), (3), (4), (5) einsetzen, so können wir diese Bedingungen von $S(g)$ auf $S_n(x_1, x_2, \ldots x_n)$ übertragen. Um den skalaren Charakter von S_n zu gewährleisten, wollen wir noch annehmen, dass Fermische Feldoperatoren nur in geraden Kombinationen vorkommen. Dann kann man folgende Bedingungen für $S_n(x_1, x_2, \ldots x_n)$ formulieren, die, wie wir sehen werden, die konkrete Form der Funktionen S_n bestimmen.

Die Bedingung (2) gibt $\qquad S_1(x) = i L(x).$

Die Bedingung der Lorentzkovarianz lautet:

$$S_n(L x_1, L x_2, \ldots, L x_n) = U_L^* S_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) U_L. \tag{7}$$

Die Berücksichtigung der Unitarität der S-Matrix führt zu der Gleichung:

$$S_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + S_n^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} P \left(\frac{x_1 x_2 \ldots x_k}{x_{k+1} \ldots x_n} \right) S_k(x_1, x_2, \ldots x_k) S_{n-k}^*(x_{k+1}, \ldots, x_n) = 0. \tag{8}$$

Das Kausalitätsprinzip lässt sich dann schreiben in der Form:

$$H_n(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \tag{9}$$

falls nur für eine der Grössen x_j mit $j = 1, 2, \ldots, n$

$$y \gtrsim x_j$$

gilt, wo

$$H_n(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= i\,S_{n+1}(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) + i \sum_{k=0}^{n-1} P\left(\frac{x_1, \ldots, x_k}{x_{k+1}, \ldots, x_n}\right) S_{k+1}(y, x_1, \ldots, x_k)\, S^*_{n-k}(x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

ist.

So haben wir mit Hilfe der Kovarianz, der Unitarität und der Kausalitätsbedingung, denen die Matrix $S(g)$ als Ganzes gehorcht, die entsprechenden Bedingungen für Kovarianz, Unitarität und Kausalität für die Funktionen $S_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ abgeleitet.

Es entsteht jetzt die Aufgabe aus diesen Bedingungen die Form der Funktionen $S_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zu bestimmen. Für $S_1(x)$ haben wir schon

$$S_1(x) = i\,L(x).$$

Jetzt untersuchen wir das Verfahren zur Bestimmung der Funktion S_n anhand einer vorherigen Ermittlung der Funktionen $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$. Durch die Unitaritätsbedingung (8) wird S_n bis auf einen antihermitischen Operator festgelegt. Bezeichnen wir diesen Operator mit $i\Lambda_n$. Durch die Kausalitätsbedingungen (9) wird die Operatorfunktion S_n mit Hilfe der vorhergehenden $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ im Definitionsbereich ihrer Argumente, d. h. im Bereiche, wo $x_1 \gtrsim$ mindestens ein x_j, $j = 2, 3, \ldots, n$ völlig bestimmt.

In dem genannten Bereiche muss also der antihermitische Operator $i\Lambda$ verschwinden. Aus seiner Symmetrie hinsichtlich aller Argumente geht hervor, dass er auch dann verschwindet, wenn es ein Paar von Argumenten x_i und x_j gibt so dass

$$x_i \neq x_j$$

ist; er kann also nur denn von Null verschieden sein, wenn alle Argumente übereinstimmen:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

Einen solchen Operator nennt man einen quasilokalen Operator. Seine Koeffizientenfunktionen müssen die Form haben:

$$z\left(\cdots \frac{\delta}{\delta x_l} \cdots\right) \delta(x_1 - x_2)\, \delta(x_2 - x_3) \ldots \delta(x_r - x_s)$$

wo z ein Polynom bedeutet, wie man leicht aus einem Satze von Schwartz [2] schliessen kann.

Um also den Ausdruck für die Funktionen $S_1, S_2, \ldots, S_n$ zu gewinnen, muss man also ausser dem lokalen Operator $L(x)$ noch eine Folge quasilokaler Operatoren $\Lambda_2, \Lambda_3, \ldots, \Lambda_n$ angeben.

So bekommt man für S_2

$$S_2(x_1 x_2) = i^2 T[L(x_1) L(x_2)] + i\Lambda_2(x_1, x_2).$$

Für S_3

$$\begin{aligned} S_3(x_1, x_2, x_3) & \\ &= i^3 T[L(x_1) L(x_2) L(x_3) + \\ &\quad + \sum_{\substack{\nu_1+\nu_2=3 \\ m=2}} \frac{i^2}{2!} P(x_1, x_\nu \mid \ldots x_3) T[\Lambda_{\nu_1}(x_1, x_{\nu_1}) \Lambda_{\nu_2}(\ldots x_3) + i\Lambda_3(x_1, x_2, x_3) \\ &= -iT[L(x_1) L(x_2) L(x_3)] - T[L(x_1)\Lambda_2(x_2, x_3)] - \\ &\quad - T[L(x_2)\Lambda_2(x_1, x_3)] - T[L(x_3)\Lambda_2(x_1, x_2)] + i\Lambda_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Für S_n bekommen wir folgende Formel

$$\begin{aligned} S_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = i^n T[L(x_1) L(x_2) \ldots L(x_n)] + \sum_{\substack{2 \leq m \leq n-1 \\ \Sigma \nu = m}} \frac{i^m}{m!} P(x_1, \ldots, x_{\nu_1} \mid \ldots \mid \ldots x_n) \cdot \\ \cdot T[\Lambda_{\nu_1}(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu_1}) \ldots \Lambda_{\nu_m}(\ldots x_n)] + i\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Jetzt wollen wir erklären, wie wir diese Operatoren $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$ benützen werden, um die Divergenzen von S_n zu beseitigen. Wir stellen uns die Frage: Kann man die Operatoren $\Lambda_2, \Lambda_3, \ldots \Lambda_n$ so bestimmen, dass die Koeffizientenfunktionen von S_n integrierbare verallgemeinerte Funktionen werden? Die Antwort lautet: ja. Um das zu begründen, genügt es sich zu überzeugen, dass die Berechnung der Koeffizientenfunktion von S_n auf die Form der R-Operation führt, die wir im Verlaufe der ganzen Arbeit studiert haben.

Das interessanteste ist, dass gerade die Form der R-Operation auf diesem Wege entdeckt wurde, d. h. dass der Versuch, die Streumatrix ohne die Schrödingervergleichung auf Grund der physikalischen Postulate zu konstruieren, ganz naturgemäss auf den Begriff und die Form der Subtraktionsoperation R führte.

Die Einzelheiten findet der Leser in den bereits oben zitierten Arbeiten [9].

Bibliographie

[1]. S. L. Sobolew, Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy. *Mat. Sbornik*, 1 (43) 1936), 39–72.

[2]. L. Schwartz, *Théorie des distributions* I–II, 1950–1951. Paris.

[3]. ——, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 239 (1954), 847.

[4]. J. Schwinger, Quantum electrodynamics I. *Physical Rev.*, 74 (1948), 1439. – II, 75 (1949), 651.

[5]. R. P. Feynman, The Theory of position *P*. *Physical Rev.*, 76 (1941), 749–759.

[6]. ——, Space–time approach to quantum electrodynamics. *Physical Rev.*, 76 (1949), 769–780.

[7]. F. J. Dyson, *S*-matrix in quantum electrodynamics. *Physical Rev.* 75 (1949), 1736-1745.

[8]. A. Salam, Divergent integrals in renormalizable field theories. *Physical Rev.*, 84 (1951), 426–431.

[9]. N. N. Bogoliubow & Schirkow, Woprosy kwantowoj teorii pola I. II. *Uspehi Fiz. Nauk.*, 55 (1955), 149–214; 57 (1955), 1–91. Deutsche Übersetzung in *Fortschritte der Physik*, Probleme der Quantentheorie der Felder, Bd. III (1955), 439–495.

[10]. W. Pauli & F. Villars, Invariant regularisation in relativistic quantum theory. *Rev. Modern Physics*, 21 (1949), 434–444.

[11]. N. N. Bogoliubow & O. S. Parasiuk, O wyčitatelnom formalisme pry umnoženyi pryčynnych funkcyj. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR*, Seriya Matematičeskaya, 20 (1956), 585–610.

[12]. O. S. Parasiuk, K teorii prichynnych singularnych funkcyj. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 100 (1955), 643–645.

[13]. W. Güttinger, Quantum field theory in the light of distribution analysis. *Physical Rev.* 89 (1953), 1004–1012.

[14]. E. G. Stueckelberg & T. A. Green, Elimination des constantes arbitraires dans la théorie relativiste des quanta. *Helvetica Phys. Acta*, 24 (1951), 153–174.

[15]. G. D. Wick, The evaluation of the collision matrix. *Physical Rev.*, 80 (1950), 268–272.

[16]. O. S. Parasiuk, Umnoženie pričynnych funkcyj pry nesowpadajuszčych argumentach. *Izwestiya Akad. Nauk SSSR*. Seriya Matematičeskaya, 20, N 6 (1956), im Druck.