

Justification de la méthode fonctionnelle pour les courbes gauches

par

VALERIO VASSALLO

*Université des Sciences et Technologies de Lille
Villeneuve d'Ascq, France*

Introduction

Le but de ce travail⁽¹⁾ est de donner une justification de la méthode fonctionnelle, due à Cayley ([5]) et utilisée par Berzolari et Severi pour trouver en particulier les formules sur les coniques multisécantes aux courbes gauches ([1], [2], [26], [27]). On est sur un corps de caractéristique 0 et on travaille sur \mathbf{C} pour la commodité (utilisation de coordonnées locales analytiques) ; on notera \mathbf{P}^3 l'espace projectif complexe.

1. Aperçu historique

Pour une courbe lisse X de \mathbf{P}^3 un problème classique est de déterminer les sous-variétés de \mathbf{P}^3 que sont en position spéciale par rapport à X , afin d'obtenir des formules énumératives. Avant de donner quelques exemples, on veut rappeler la définition d'un invariant projectif d'une courbe X de \mathbf{P}^3 , à savoir le nombre h de points doubles apparents de X : c'est le nombre de points doubles d'une projection générique \tilde{X} de X sur un plan. Si X est une courbe irréductible (lisse) de degré n et genre g , alors on a la formule classique $g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - h$.

Voici maintenant des exemples de formules k -sécantes pour une courbe $X \subset \mathbf{P}^3$ de degré n avec h points doubles apparents :

— le nombre $t(X) = h(n-2) - \binom{n}{3}$ de trisécantes rencontrant une droite fixe (Cayley, 1863) ;

⁽¹⁾ Le contenu de cet article représente le thèse de Doctorat de l'auteur. Pendant sa préparation l'auteur a été boursier du Consiglio Nazionale delle Ricerche (I) et ensuite du Ministero della Pubblica Istruzione (I). Je remercie mes parents pour leur soutien constant.

— le nombre $q(X)$ des coniques quadrisécantes à X et qui rencontrent quatre droites fixées par ailleurs (Severi, 1900) :

$$q(X) = 4 \binom{h}{2} + h \left[14 \binom{n}{2} - 22n + 33 \right] - 4 \binom{n}{4} - 3 \binom{n}{3} - \binom{n}{2}.$$

Pour trouver ces formules les géomètres Castelnuovo (1887), Berzolari (1900), Severi (1900) ont utilisé la « méthode fonctionnelle », due à Cayley. *La méthode fonctionnelle*, telle que la concevaient les Anciens, consiste à supposer que toute formule k -sécante pour une courbe C est a priori de la forme $\varphi(n, h)$, fonction seulement des deux invariants projectifs de la courbe : le degré n et le nombre h vu plus haut. Il est alors possible de trouver une « équation fonctionnelle » pour φ , grâce à quoi, on peut établir φ explicitement.

Remarque I. — La plus grosse difficulté à propos de la méthode fonctionnelle est de prouver que toute formule k -sécante est *seulement* fonction de n et h (cf. [29, pp. 7–10]). Severi, commentant ses deux Notes de 1900, a bien conscience d'un besoin de justification de la méthode fonctionnelle. Il écrit en effet en 1950 : *Le due Note vanno inquadrare nello stadio di sviluppo della geometria numerativa di mezzo secolo fa. Di fronte alle esigenze critiche moderne, gli strumenti usati hanno soltanto valore euristico, per quanto (secondo l'opinione di chi scrive) i risultati sieno sicurissimi.*

Justifier la méthode fonctionnelle est le but de cet article ! Nos résultats ont été annoncés dans la note [30]. Plus précisément, on démontre un théorème qui donne l'expression d'une formule k -sécante pour une courbe de degré n avec h points doubles apparents : c'est un *polynôme* en n et h (de degré au plus k en n et $\lfloor \frac{1}{2}k \rfloor$ en h , où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière). Le cas des *droites* k -sécantes a été traité dans [18]. Comme ces polynômes P de $\mathbf{Q}[n, h]$ sont des polynômes *numériques* (i.e. $P(n, h) \in \mathbf{Z}$, pour n et h dans \mathbf{Z}), on les décrira pour la commodité dans la base $\left\{ \binom{n}{i} \binom{h}{j} \right\}_{i,j}$ de $\mathbf{Q}[n, h]$ où $\binom{n}{i} = n(n-1) \dots (n-i+1)/i!$. Cela permet de simplifier les calculs et de donner une forme « plus jolie » aux formules (cf. [27, p. 93]).

2. Le point de vue moderne

Dans tout ce qui suit, on note X une courbe lisse de \mathbf{P}^3 de degré n avec h points doubles apparents. Dans l'article, tout schéma sera de type fini sur \mathbf{C} et « *point* » signifie « *point fermé* ».

Pour utiliser nos techniques, on aura besoin du schéma de Hilbert $\text{Hilb}^k X$, paramétrant la donnée de k points sur la courbe X . Cette idée est déjà implicite dans Severi (cf. [28]) quand il dit : *Consideriamo la varietà $\infty^4 U$ delle quaderne di punti della curva X contenuta nella varietà $\infty^{12} Z$ di tutte le quaderne di punti dello spazio ...* En termes

modernes, la variété U est remplacée par le schéma $\text{Hilb}^4 X$ et la variété Z par le schéma $\text{Hilb}^4 \mathbf{P}^3$, de dimensions respectivement 4 et 12. Donc, il sera intéressant de connaître la classe d'équivalence rationnelle $[\text{Hilb}^k X]$ du schéma de Hilbert des k -uplets de X dans le groupe de Chow $\text{CH}(\text{Hilb}^k \mathbf{P}^3)$. On désignera en effet par $\text{CH}(Z)$ le groupe de Chow d'un schéma Z ; c'est un anneau si Z est non-singulier (voir [7]). On dira souvent « cycles » au lieu de « classe de cycles ».

Généralités sur les schémas de Hilbert ponctuels. — Si X est un schéma projectif, rappelons (cf. [9]) que $\text{Hilb}^k X$ est le schéma de Hilbert associé au polynôme constant k ($k \in \mathbf{N}$). Ensemblistement $\text{Hilb}^k X$ est l'ensemble de k -uplets, contenus (schématiquement !) dans X , c'est-à-dire, plus précisément, des sous-schémas $\xi \subset X$ avec $\dim \xi = 0$ et $\text{long}(\xi) = k$ (i.e. $\dim_{\mathbf{C}} \Gamma(X, \mathcal{O}_{\xi}) = k$). Autrement dit $\text{Hilb}^k X$ paramétrise les idéaux $I(\xi)$ de \mathcal{O}_X avec $\text{Supp}(\mathcal{O}_X|_{I(\xi)})$ fini et $\dim_{\mathbf{C}} \Gamma(X, \mathcal{O}_X|_{I(\xi)}) = k$.

Conventions. — On posera $\text{Hilb}^0 X = \{\emptyset\}$. On parlera dans la suite de *doublet* au lieu de 2-uplet, *triplet* pour 3-uplet, *quadruplet* pour 4-uplet.

Dans $(\text{Hilb}^k X) \times X$, notons $Z^k(X)$ le revêtement tautologique de $\text{Hilb}^k X$ dont l'ensemble sous-jacent est formé de (ξ, x) avec $x \in \xi$. La restriction ϱ de pr_1 à $Z^k(X)$ est *plate*, ce qui revient à dire que la longueur des fibres est constante, égale à k . Notons que, par définition de $Z^k(X)$, la fibre $Z^k(X)_{\xi}$ est ξ .

Propriété universelle de $\text{Hilb}^k X$. Soit S un schéma arbitraire. Si $Z \subset S \times X$ est un revêtement (ramifié) de S à k feuillets, via la première projection, alors Z est obtenu de $Z^k(X)$ par changement de base, via un unique morphisme de schémas $f: S \rightarrow \text{Hilb}^k X$. (Remarquer que f n'a aucune raison d'être plat !)

Soit U un ouvert de \mathbf{C} contenant 0 et soit $\xi \subset X \times U$ un revêtement fini, plat de U , ce qui encore une fois, revient à dire que ξ_s a une longueur constante k . D'après la propriété universelle, on a un morphisme $U \rightarrow \text{Hilb}^k X$: en particulier, ce morphisme est continu, donc on a $\lim_{s \rightarrow 0} \xi_s = \xi_0$, dans $\text{Hilb}^k X$. On utilisera constamment ce procédé dans l'article pour montrer qu'un k -uplet $\xi_0 \in \text{Hilb}^k X$ est dans l'adhérence d'un ouvert de $\text{Hilb}^k X$.

Plus généralement si T/S est un schéma relatif, on définit le schéma relatif $\text{Hilb}^k T/S$ sur S qui vérifie également une propriété universelle. Une conséquence de cette propriété est l'égalité de schémas: $(\text{Hilb}^k T/S)_s = \text{Hilb}^k(T_s)$ si $s \in S$.

Remarque II. — Soit X un schéma, $\xi' \subset X$ un k' -uplet, $\xi'' \subset X$ un k'' -uplet avec $\xi' \cap \xi'' = \emptyset$. Si on note $\xi = \xi' \cup \xi''$, c'est un $(k+k')$ -uplet de X et l'on a un isomorphisme schématique d'un voisinage de ξ dans $\text{Hilb}^{k'+k''} X$ sur un voisinage de (ξ', ξ'') dans $\text{Hilb}^{k'} X \times \text{Hilb}^{k''} X$. Pareil dans le cas relatif $\text{Hilb}^{k'+k''} X/S$ où X/S est un schéma relatif.

Les schémas considérés auront en général dans ce qui suit une structure nilpotente!
En particulier, surtout ne pas confondre $\text{Hilb}^k(X_{\text{red}})$ et $(\text{Hilb}^k X)_{\text{red}}$.

Si Z est un sous-schéma de X , on notera aussi $[Z]$ sa classe d'équivalence rationnelle en tant que cycle, dans le groupe de Chow $\text{CH}(X)$. Si $\dim Z = k$ alors $[Z] \in \text{CH}_k(X)$.

L'idée principale. — On va déformer platement X en un schéma Y de \mathbf{P}^3 tel que $\text{Hilb}^k X$ et $\text{Hilb}^k Y$ soient rationnellement équivalents, d'où l'égalité des classes de cycles $[\text{Hilb}^k X] = [\text{Hilb}^k Y]$. L'intérêt est que le schéma Y que l'on trouve est tel que $\text{Hilb}^k Y$ est réductible, mais on sait compter ses composantes!

La technique tout au long du travail consiste à présenter des k -uplets donnés ξ de \mathbf{P}^3 , comme limite d'une famille à un paramètre $(\xi_s)_{s \in \mathbf{C}}$ de k -uplets plus simples. Cela sera en particulier le cas, par définition du schéma de Hilbert, quand on a la donnée d'un sous-schéma de $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{C}$, fini sur \mathbf{C} avec longueur des fibres constantes (platitude). C'est cette vérification de la longueur constante (quand $s \rightarrow 0$) qui est essentielle pour ce que nous faisons.

Soit X une courbe dans \mathbf{P}^3 de degré n et \tilde{X} la projection (générique) sur un plan P . On notera $(M_j)_{1 \leq j \leq h}$ les h points doubles ordinaires de \tilde{X} . Alors, il existe (cf. [10, III, §9, p. 259]) un schéma relatif Γ de base \mathbf{C} , avec la fibre Γ_1 en 1 égale à X et $(\Gamma_0)_{\text{red}} = \tilde{X}$. De plus, la famille $(\Gamma_\lambda)_\lambda$ forme une famille plate sur \mathbf{C} . Le schéma Γ_0 est la réunion de \tilde{X} et des voisinages infinitésimaux à l'ordre 1 dans \mathbf{P}^3 des points M_j ($1 \leq j \leq h$) de \tilde{X} , comme il est montré dans [18, remarque 2, p. 175]. (Si \mathfrak{m} est l'idéal de M dans $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}$, alors le voisinage infinitésimal à l'ordre 1 de M est défini par l'idéal \mathfrak{m}^2 dans $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}$.)

Résultat. — On montrera au paragraphe III l'équivalence rationnelle

$$[\text{Hilb}^k X] = [\text{Hilb}^k \Gamma_1] \sim \{[\text{Hilb}^k \Gamma_0]\}_k$$

dans $\text{Hilb}^k \mathbf{P}^3$, où $\{\cdot\}_k$ désigne la partie de dimension k d'un cycle (cf. [7, p. 10]).

La partie principale de notre travail (paragraphe II) donne une expression *explicite* de $\{[\text{Hilb}^k \Gamma_0]\}_k$ comme combinaison linéaire de cycles fixés qui ne dépendent ni du degré n de la courbe X ni du nombre h de ses points doubles apparents. Voir le théorème qui suit.

3. Le théorème principal et quelques applications

Les énoncés précis du théorème et du corollaire ci-dessous se trouvent au paragraphe III.

THÉORÈME. — *Pour tout entier $k \geq 0$ il existe des cycles C_{ij} dans le groupe $\text{CH}(\text{Hilb}^k \mathbf{P}^3)$ tels que pour toute courbe lisse X de degré n dans \mathbf{P}^3 avec h points doubles*

apparents, on ait l'égalité des cycles (avec $C_{00}=0$):

$$[\text{Hilb}^k X] = \sum_{0 \leq 2j \leq k} \binom{h}{j} \sum_{0 \leq i \leq k-2j} \binom{n}{i} C_{ij}.$$

Expliquons sur un exemple simple la démonstration du théorème. Dans ce qui suit, $k=3$. Soit $X \subset \mathbf{P}^3$ une courbe de degré $n=3$ avec $h=1$ (cubique lisse). Soit \tilde{X} la projection de X sur un plan P . On déforme la courbe \tilde{X} en trois droites L_1, L_2, L_3 de P , telles que $L_1 \cap L_2$ soit le point double M de \tilde{X} . On notera Γ_0 (resp. $\Delta_1(3)$) le schéma défini comme la réunion de \tilde{X} (resp. des trois droites) et du voisinage infinitésimal à l'ordre 1 dans \mathbf{P}^3 du point M . Alors, on a l'égalité des cycles : $[\text{Hilb}^3 X] = \{[\text{Hilb}^3 \Gamma_0]\}_3 = \{[\text{Hilb}^3 \Delta_1(3)]\}_3$. Mais $\{[\text{Hilb}^3 \Delta_1(3)]\}_3$ est formé des seules composantes adhérences de :

- (1) 3 composantes $\text{Hilb}^3 L_i$ ($1 \leq i \leq 3$) ; on notera plus simplement A leur classe d'équivalence rationnelle ;
- (2) 6 composantes birationnelles à $(\text{Hilb}^2 L_i) \times L_j$ ($1 \leq i, j \leq 3$) ; on notera B leur classe ;
- (3) une composante birationnelle à $L_1 \times L_2 \times L_3$; on notera C sa classe ;
- (4) une « composante » formée des triplets composés d'un doublet d de support M et d'un point simple sur $L_1 \cup L_2$. On notera cette composante D (remarquer que D n'est pas irréductible) ;
- (5) une composante formée des triplets composés d'un doublet d de support M et d'un point simple sur L_3 . On notera cette composante E .

D'où l'égalité des classes d'équivalence rationnelle $[\text{Hilb}^3 X] = 3A + 6B + C + D + E$ dans $\text{Hilb}^3 \mathbf{P}^3$. De cette façon, on justifie en général l'étude des composantes du schéma $\text{Hilb}^k \Gamma_0$.

Une conséquence importante du théorème est le corollaire suivant (voir l'énoncé précis au théorème 6, paragraphe III).

COROLLAIRE. — Soit V une variété complète non singulière ; soit $f: V \rightarrow \text{Hilb}^k \mathbf{P}^N$ un morphisme localement intersection complète et $f^*: \text{CH}(\text{Hilb}^k \mathbf{P}^N) \rightarrow \text{CH}(V)$ le morphisme associé entre groupes de Chow.

Alors, pour tout cycle a de dimension $2k$ dans V et pour toute courbe lisse C de degré n dans \mathbf{P}^N avec h points doubles apparents, le degré du zéro-cycle $a \cdot f^*[\text{Hilb}^k C]$ est de la forme (avec $c_{ij} \in \mathbf{Z}$ et $c_{00}=0$).

$$\deg(a \cdot f^*[\text{Hilb}^k C]) = \sum_{0 \leq j \leq [k/2]} \sum_{0 \leq i \leq k-2j} c_{ij} \binom{h}{j} \binom{n}{i}.$$

Noter que le nombre $\deg(a \cdot f^*[\text{Hilb}^k C])$ donne une définition correcte d'une expression vague comme « nombre d'objets de V qui sont k -sécants à C , tout en vérifiant la

condition a par ailleurs».

Ce résultat permet de trouver de nombreuses formules k -sécantes relatives à une courbe.

Nous donnons dans le paragraphe III une application de ce corollaire, au cas des *coniques* multisécantes à une courbe. C'est le but initial de ce travail !

4. Plan de l'article

Au *paragraphe I* : soit $\Delta_{\mathcal{P}}(N)$ le schéma défini comme la réunion de N droites (contenues dans un plan P), dont $2p$ passent par les p points d'un ensemble fini \mathcal{P} , et du voisinage infinitésimal à l'ordre 1 (dans \mathbf{P}^3) de l'ensemble \mathcal{P} . On construit des cycles $C_{j,\sigma}^k$ dans $\text{Hilb}^k \mathbf{P}^3$ et on montre que la classe d'équivalence rationnelle $[\text{Hilb}^k \Delta_{\mathcal{P}}(N)]$ s'exprime comme combinaison linéaire des cycles $C_{j,\sigma}^k$ (théorème 1).

Le *paragraphe II* est consacré à étudier la classe d'équivalence rationnelle entre les cycles $[\text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}^0]$ dans $\text{Hilb}^k \mathbf{P}^3$, où X^0 est une courbe *plane* quelconque de degré n ayant comme singularités uniquement des croisements normaux, avec $\mathcal{P} \subset \text{Sing } X^0$; $X_{\mathcal{P}}^0$ est la réunion schématique de X^0 et du voisinage infinitésimal à l'ordre 1 (dans \mathbf{P}^3) de \mathcal{P} . Là encore, on montre que $[\text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}^0]$ est combinaison linéaire des cycles $C_{j,\sigma}^k$ (théorème 3). On se ramène pour cela au schéma $\Delta_{\mathcal{P}}(N)$ en déformant X^0 en n droites si $n \geq 2 \text{Card } \mathcal{P}$.

Au *paragraphe III*, on applique les résultats des paragraphes précédents pour exprimer la classe $[\text{Hilb}^k C]$ d'une courbe C de l'espace projectif \mathbf{P}^3 comme combinaison linéaire des cycles $C_{j,\sigma}^k$. Pour cela, on utilise une déformation de C en le schéma $X_{\mathcal{P}}^0$ vu plus haut ; en étudiant la déformation correspondante de $\text{Hilb}^k C$ en $\text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}^0$, on arrive à exprimer $[\text{Hilb}^k C]$ comme combinaison des $C_{j,\sigma}^k$, avec pour coefficients des polynômes *numériques* en n et h . Le corollaire cité plus haut en résulte alors presque immédiatement.

Dans la version originale envoyée au referee, se trouvait une Annexe. Nous avons regroupé dans cette Annexe, tous les calculs auxiliaires qui auraient alourdi le cours du texte. Pour manque de place, nous avons supprimé cette Annexe.

5. Les remerciements

Je remercie vivement Patrick Le Barz, pour m'avoir confié l'étude d'un sujet si passionnant. Je remercie également G. Elencwajg, A. Collino, J. Briançon, J. L. Cathelineau qui ont participé au jury de cette thèse, car leurs remarques ont été précieuses.

Merci enfin au referee dont les critiques ont grandement amélioré ce travail.

I. Les cycles $C_{j,\sigma}^k$

La nature du chapitre est technique. On commence par résoudre un problème de type combinatoire sur des urnes et des tickets. Cela nous permettra de donner une expression très simple aux formules qu'on rencontrera au cours de notre travail. Ensuite, on construit les cycles $C_{j,\sigma}^k$ par lesquels on va exprimer dans le paragraphe III, la classe d'équivalence rationnelle de $\text{Hilb}^k C$ où C est une courbe lisse de \mathbf{P}^3 .

Pour décrire les schémas qu'on rencontrera plus loin, on introduit un schéma, noté \mathfrak{X}_0 , qui nous servira comme modèle local. On étudie alors les k -uplets contenus dans \mathfrak{X}_0 et on donne l'expression de leurs idéaux en coordonnées.

1. Les cycles $C_{j,\sigma}^k$

Par la suite, on aura besoin de résoudre un problème simple, de nature combinatoire que l'on va énoncer de la façon suivante :

Problème 1. — Soit $n \in \mathbf{N}$ et supposons qu'on ait σ_i tickets qui portent le numéro i , pour $1 \leq i \leq n$. Supposons par ailleurs données M urnes. Combien y a-t-il de façons de mettre les σ_i tickets avec le numéro i dans σ_i urnes différentes, en supposant que chaque urne contienne au plus un ticket ? La réponse au problème est fournie par la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — *Le nombre cherché, que l'on notera $P_\sigma(M)$, est une fonction polynôme de M dont la valeur est*

$$P_\sigma(M) = \binom{M}{\sigma_1} \binom{M-\sigma_1}{\sigma_2} \dots \binom{M-(\sigma_1+\sigma_2+\dots+\sigma_{n-1})}{\sigma_n}.$$

(On fait la convention $\binom{M}{0} = 1$.) De plus P_σ est un polynôme numérique, c'est-à-dire $P_\sigma(x) \in \mathbf{Z}$ si $x \in \mathbf{Z}$.

Démonstration. — Facile. On remarquera que $\text{deg } P_\sigma(M) = \sigma_1 + \dots + \sigma_n$.

Notations 1. — Soit $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Pour $\sigma \in \mathbf{N}^{(\mathbf{N}^*)}$, c'est-à-dire σ est une suite $(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$ s'annulant à partir d'un certain rang, posons $s(\sigma) = \sum_{i=1}^{\infty} i\sigma_i$ et $l(\sigma) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i$. On appellera alors *somme* de la suite σ le nombre $s(\sigma)$ et *longueur* de σ le nombre $l(\sigma)$. Evidemment $l(\sigma) \leq s(\sigma)$. Ainsi $\text{deg } P_\sigma(M) = l(\sigma)$. En particulier, on notera $\{e^i\}$ la « base canonique » de $\mathbf{N}^{(\mathbf{N}^*)}$; donc e^i est la suite $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ avec 0 partout sauf à la i -ième place où il y a 1. Dans ce cas, on a $s(e^i) = i$ et $l(e^i) = 1$. Il est commode de poser $e^0 = 0$.

On va généraliser cette définition au cas $\sigma \in \mathbf{Z}^{(\mathbf{N}^*)}$.

Définition 1. — Pour toute suite $\sigma = (\sigma_i)_i \in \mathbf{Z}^{(\mathbf{N}^*)}$ on pose $P_\sigma(M) = 0$ si σ a au moins une composante < 0 , sinon $P_\sigma(M)$ est donné par la valeur de la proposition 1.

Avec un raisonnement combinatoire très simple sur les urnes et les tickets (cf. problème 1) on démontre la proposition suivante, qui généralise la formule

$$\binom{M+1}{k} = \binom{M}{k} + \binom{M}{k-1}.$$

PROPOSITION 2. — Pour toute suite $\sigma \in \mathbf{Z}^{(\mathbf{N}^*)}$ et pour tout $M \in \mathbf{Z}$ on a la formule $P_\sigma(M+1) = P_\sigma(M) + \sum_{i=1}^{\infty} P_{\sigma - e^i}(M)$. (Rappelons que $P_\sigma(M) = 0$ si $\sigma \in \mathbf{Z}^{(\mathbf{N}^*)}$ a au moins une composante < 0 .)

Par ailleurs, on sait [12] que le schéma $\text{Hilb}^k \mathbf{P}^3$ est réductible pour k grand. On donne donc la définition :

Définition 2. — On note $\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$ la composante de $\text{Hilb}^k \mathbf{P}^3$ adhérence des k -uplets simples (c'est-à-dire formés de k points distincts).

Notations 2. — On dessinera \nearrow un doublet de support un point, c'est-à-dire isomorphe à $\text{Spec } \mathbf{C}[\varepsilon] = \mathbf{C}[T]/(T^2)$ où T est une indéterminée.

Remarque 1. — Tout doublet d de \mathbf{C}^3 (ou \mathbf{P}^3) est contenu dans une unique droite, notée $\text{Axe}(d)$. C'est clair si $\text{Supp}(d)$ est formé de deux points. Sinon, dans $\mathcal{O}_d = \mathbf{C}[x, y, z]/I(d)$, qui est de dimension 2, on a deux relations entre les classes $\bar{1}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, qu'on relève à $\mathbf{C}[x, y, z]$; par exemple $\bar{y} = \alpha \bar{x} + \beta \bar{1}$ et $\bar{z} = \gamma \bar{x} + \delta \bar{1}$. Remarquer également que $\text{Hilb}_0^2 \mathbf{P}^3 = \text{Hilb}^2 \mathbf{P}^3$.

Les doublets de \mathbf{P}^3 de support $\{M\}$ s'identifient alors aux droites passant par M . (A une telle droite D , on associe le premier voisinage infinitésimal de M sur D .) Maintenant, définissons précisément les cycles $\mathcal{C}_{j,\sigma}^k$.

Définition 3. — Pour tout $k \in \mathbf{N}$, pour toute suite $\sigma = (\sigma_i)_i \in \mathbf{N}^{(\mathbf{N}^*)}$ et pour tout entier j tel que $s(\sigma) + 2j \leq k$ on note $\mathcal{C}_{j,\sigma}^k \subset \text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$ le cycle suivant : on choisit j points M_1, \dots, M_j dans un plan P de \mathbf{P}^3 . Pour chaque point M_i ($1 \leq i \leq j$) on considère deux droites D_i' et D_i'' du plan P avec $D_i' \cap D_i'' = \{M_i\}$. On se donne aussi $l(\sigma)$ droites L_α ($1 \leq \alpha \leq l(\sigma)$) de P , ne passant par aucun point M_i .

(a) Alors le cycle $\mathcal{C}_{j,\sigma}^k$ est l'adhérence dans $\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$ des k -uplets formés de :

- j doublets d_1, \dots, d_j de support respectivement M_1, \dots, M_j ;
- $k - 2j - s(\sigma)$ points simples distincts sur les droites D_i' et D_i'' ($1 \leq i \leq j$) en dehors des M_i ;
- $s(\sigma)$ points simples distincts placés sur les $l(\sigma)$ autres droites de la façon suivante :

exactement 1 point sur chacune des σ_1 droites L_1, \dots, L_{σ_1} ;
 exactement 2 points sur chacune des σ_2 droites $L_{\sigma_1+1}, \dots, L_{\sigma_2}$, etc.

(b) De plus,

(α) si $j=0$ et $s(\sigma) \neq k$ on pose $\mathcal{C}_{0,\sigma}^k = \emptyset$;

(β) par ailleurs, on étend la définition de $\mathcal{C}_{j,\sigma}^k$ à $\sigma \in \mathbf{Z}(\mathbf{N}^*)$ en convenant $\mathcal{C}_{j,\sigma}^k = \emptyset$ si σ a au moins une composante < 0 .

Remarque 2. — On voit que $\mathcal{C}_{j,\sigma}^k$ n'a aucune raison d'être irréductible ! (Cela résulte de la position arbitraire des $k-2j-s(\sigma)$ points sur les droites D'_i et D''_i .)

Comme complément à la définition précédente on a la proposition suivante :

PROPOSITION 3. — La classe d'équivalence rationnelle $\mathcal{C}_{j,\sigma}^k$ dans $\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$ ne dépend pas du plan P ni du choix dans le plan P des points M_i ($1 \leq i \leq j$), des droites D'_i et D''_i ($1 \leq i \leq j$) et des $l(\sigma)$ autres droites $L_1, \dots, L_{l(\sigma)}$.

Démonstration. — Soit \bar{P} un autre plan et soit $u_1 \in \text{Aut}(\mathbf{P}^3)$ avec $u_1(P) = \bar{P}$. Soit $u: \mathbf{P}^1 \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{P}^3)$ une courbe rationnelle avec $u(0) = \text{id}$ et $u(1) = u_1$. Par ailleurs, à tout $v \in \text{Aut}(\mathbf{P}^3)$ est associé $\tilde{v} \in \text{Aut}(\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3)$. Si on pose $\bar{\mathcal{C}}_\sigma^{k,j} = \tilde{u}_1(\mathcal{C}_\sigma^{k,j})$, on voit qu'on a l'équivalence rationnelle $\mathcal{C}_\sigma^{k,j} \sim \bar{\mathcal{C}}_\sigma^{k,j}$. On est donc ramené à prouver la proposition pour $\bar{P} = P$. Soit $\mathcal{C}_{j,\sigma}^k$ le cycle comme dans la définition 3. Donnons-nous j autres points $(\mu_i)_{1 \leq i \leq j}$, $2j$ autres droites $(\Delta'_i)_{1 \leq i \leq j}$ et $(\Delta''_i)_{1 \leq i \leq j}$ dans P telles que $\Delta'_i \cap \Delta''_i = \{\mu_i\}$ pour tout $1 \leq i \leq j$. Donnons-nous enfin $l(\sigma)$ droites $(\lambda_l)_{1 \leq l \leq l(\sigma)}$. Notons $\mathcal{D}_{j,\sigma}^k$ le cycle correspondant aux points $(\mu_i)_{1 \leq i \leq j}$ et aux droites $(\Delta'_i)_{1 \leq i \leq j}$, $(\Delta''_i)_{1 \leq i \leq j}$, $(\lambda_l)_{1 \leq l \leq l(\sigma)}$ dans la définition 3. On transforme alors le point M_1 en le point μ_1 , la droite D'_1 en la droite Δ'_1 et la droite D''_1 en la droite Δ''_1 , dans une déformation dont la base est \mathbf{P}^1 . Cela en laissant fixes les autres points et droites. Et ainsi de suite jusqu'à M_j en μ_j , D'_j en Δ'_j , D''_j en Δ''_j , chaque transformation considérée transformant *seulement* le point M_i et *seulement* le couple des droites (D'_i, D''_i) . Puis de la même manière on transforme successivement les $l(\sigma)$ droites $(L_l)_{1 \leq l \leq l(\sigma)}$ en les droites $(\lambda_l)_{1 \leq l \leq l(\sigma)}$. En conclusion, via une suite de $j+l(\sigma)$ déformations de base \mathbf{P}^1 on transforme le cycle $\mathcal{C}_{j,\sigma}^k$ en le cycle $\mathcal{D}_{j,\sigma}^k$. D'où l'assertion de l'énoncé.

La proposition 3 nous permet de parler de la classe d'équivalence rationnelle du cycle $\mathcal{C}_{j,\sigma}^k$ dans le groupe $\text{CH}(\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3)$ (définition 2) ; nous la noterons encore $\mathcal{C}_{j,\sigma}^k$ par abus.

2. La forme des k -uplets

Soit P un plan fixé dans l'espace projectif complexe \mathbf{P}^3 . Dans le plan P , on considère un ensemble \mathcal{P} formé de p points en position générale et une courbe X^0 de degré N du plan

P passant par les p points, avec $\mathcal{P} \subset \text{Sing } X^0$. On suppose que les singularités de X^0 sont uniquement des croisements normaux. Notons $\mathcal{P}^{(1)}$ le voisinage infinitésimal à l'ordre 1 (dans \mathbf{P}^3) des points de \mathcal{P} , ce qui correspond à $\text{Spec } \mathbf{C}[x, y, z]/(x, y, z)^2$.

Définition 4. — Avec les notations précédentes, on notera $X_{\mathcal{P}}^0$ le schéma formé de la réunion schématique de la courbe plane X^0 et de $\mathcal{P}^{(1)}$.

On veut par la suite (c'est le coeur de l'article) déterminer les différentes composantes de $\text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}^0$.

Notations 3. — Soit \mathcal{P} un ensemble de p points en position générale dans le plan P . Considérons $2p$ droites passant par ces p points et $N - 2p$ autres droites en position générale (i.e. ni trois des droites concourantes ni deux se coupant sur une des $2p$ droites précédentes). Notons $\Delta(N)$ la courbe réunion de ces N droites. On notera $\Delta_{\mathcal{P}}(N)$ le schéma $(\Delta(N))_{\mathcal{P}}$ défini comme la réunion de $\Delta(N)$ et de $\mathcal{P}^{(1)}$. Ce schéma n'est défini que pour $N \geq 2p$.

N.B. Pour tout schéma X on a : $\text{Hilb}^0 X \neq \emptyset$, puisque c'est $\{\emptyset\}$ (cf. Conventions dans l'Introduction).

Définition 5. — Un schéma de dimension 0 est dit *quasisimple* si c'est une réunion (disjointe) de points simples et de doublets (simples ou isomorphes à $\text{Spec } \mathbf{C}[\varepsilon]$). Il forment un ouvert de $\text{Hilb}^k \mathbf{P}^3$.

Remarque 3. — Un k -uplet quasisimple de \mathbf{P}^3 est évidemment contenu dans $\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$ (définition 2 ; si d est un doublet de support $\{M\}$, déformer d en deux points de $\text{Axe}(d)$, $\text{Axe}(d)$ ayant été défini dans la remarque 1).

Définition 6. — Disons qu'un k -uplet dans $X_{\mathcal{P}}^0$ est *standard* s'il est limite de k -uplets quasi-simples de $X_{\mathcal{P}}^0$ (définition 5 ci-dessus), sinon, on le dit non-standard.

Notations 4. — Nous notons $\text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0 \subset \text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}^0$ le fermé des k -uplets standard de $X_{\mathcal{P}}^0$. On le considère donc, par définition, comme sous-schéma réduit de $\text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}^0$.

Remarque 4. — On a $\text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0 \subset \text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$ d'après la remarque 3.

L'utilité de la définition 6 vient de ce qu'en général, un k -uplet dans $X_{\mathcal{P}}^0$ n'a aucune raison d'être limite de k -uplets *simples* de $X_{\mathcal{P}}^0$. (Considérer d , $d \not\subset P$, un doublet de support un point de $\text{Sing } X^0$.) Mais il sera en général limite de k -uplets quasi-simples de $X_{\mathcal{P}}^0$.

Remarque 5. — Il existe cependant des k -uplets dans $X_{\mathcal{P}}^0$ qui sont *non-standard*. Mais on connaît leurs idéaux et on montrera (proposition 12) qu'ils n'interviennent pas dans les calculs de classes de cycles dont on aura besoin.

Nous sommes intéressés (paragraphe II et III) par des schémas qui sont des courbes planes avec des composantes immergées dans leur lieu singulier. *Le schéma \mathfrak{X}_0 que nous introduisons servira d'étude locale au voisinage des points doubles de nos courbes.* Il a déjà été utilisé dans [19].

Définition 7. — Choisissons un système de coordonnées $[x:y:z:t]$ de \mathbf{P}^3 tel que le plan P ait pour équation $z=0$ dans $\mathbf{P}^3 \setminus H$ (où H est le plan à l'infini $t=0$). On notera \mathfrak{X}_0 le schéma réunion schématique des deux axes des coordonnées Ox et Oy dans le plan $P=\{z=0\}$ et du voisinage infinitésimal à l'ordre 1 (dans \mathbf{P}^3) de l'origine O .

On remarquera que le schéma \mathfrak{X}_0 coïncide avec le schéma $\Delta_{\mathcal{P}}(2)$ où $\mathcal{P}=\{O\}$ (notations 3). Le schéma \mathfrak{X}_0 a pour idéal dans $J_0=(x,y,z)^2 \cap (xy,z)=(xy,xz,yz,z^2)$ car l'idéal d'une réunion est l'intersection des idéaux. Le réduit associé $\mathfrak{X}'_0=(\mathfrak{X}_0)_{\text{red}}$ a pour idéal (xy,z) : c'est la réunion de deux axes des coordonnées. De plus, schématiquement $\mathfrak{X}'_0=\mathfrak{X}_0 \cap P$ car $(xy,z)=J_0+(z)$. (L'idéal d'une intersection est la somme des idéaux.)

La proposition suivante, dont la démonstration est fastidieuse mais élémentaire, nous dit d'abord quel est l'idéal d'un k -uplet contenu dans $\mathfrak{X}'_0=\mathfrak{X}_0 \cap P$.

PROPOSITION 4. — *Soit I l'idéal d'un k -uplet ξ_0 de support $\{O\}$ contenu dans $\mathfrak{X}'_0=\mathfrak{X}_0 \cap P$.*

Alors I a l'une des deux formes :

- (i) (xy, x^a, y^b, z) avec $a+b=k+1$,
- (ii) $(xy, x^a + \beta y^b, z)$ avec $a+b=k$ et $\beta \neq 0$.

Avec des calculs simples en coordonnées locales, on démontre la proposition suivante qui nous donne l'expression de l'idéal d'un k -uplet contenu dans le schéma \mathfrak{X}_0 (et non plus \mathfrak{X}'_0).

PROPOSITION 5. — *Soit I l'idéal d'un k -uplet ξ_0 dans \mathfrak{X}_0 de support $\{O\}$.*

Alors I a l'une des quatre formes :

$$\begin{aligned}
 \text{si } \xi_0 \subset P & \begin{cases} \text{(i) } (xy, x^a, y^b, z) & \text{avec } a+b=k+1, \\ \text{(ii) } (xy, x^a + \beta y^b, z) & \text{avec } a+b=k \text{ et } \beta \neq 0. \end{cases} \\
 \text{si } \xi_0 \not\subset P & \begin{cases} \text{(iii) } (xy, xz, yz, z^2, x^a + cz, y^b + c'z) & \text{avec } a+b=k \\ & (c, c' \text{ quelconques}), \\ \text{(iv) } (xy, xz, yz, z^2, x^a + \beta y^b + \gamma z) & \text{avec } a+b=k-1 \text{ et } \beta \neq 0 \\ & (\gamma \text{ quelconque}). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Remarquer que les cas (iii) et (iv) s'excluent mutuellement, les intersections de ξ_0 avec l'axe des x (resp. y) ne pouvant être identiques toutes les deux.

Toujours fastidieuse mais élémentaire, est la preuve de la proposition suivante :

PROPOSITION 6. — (1) *Des quatre types précédents de k -uplets :*

(a) *les types (i), (ii) et (iii) sont standard dans \mathfrak{X}_0 (définition 6),*

(b) *alors que le type (iv) est non-standard.*

(2) *De plus, un k -uplet standard ξ de \mathfrak{X}_0 peut selon le cas être limite de :*

premier cas : une réunion de $k-k'$ points simples distincts sur un des axes de coordonnées et k' points simples distincts sur l'autre axe, pour $1 \leq k' \leq k$;

deuxième cas : une réunion d'un doublet d_0 de support O ($d_0 \not\subset P$), de k' points simples distincts sur un des axes et $k-(k'+2)$ points simples distincts sur l'autre axe.

Dans chacun des deux cas, les k -uplets standard correspondants forment (pour chaque k') une composante irréductible de dimension k de $\text{Hilb}^k \mathfrak{X}_0$ (cf. aussi la proposition 9). Que dans le deuxième cas la dimension soit k est clair, car d_0 dépend de deux paramètres (puisque'il correspond à une droite de \mathbf{P}^3 passant par O), d'où $k'+k-(k'+2)+2$ paramètres en tout.

Notations 5. — On désigne par $\text{Hilb}_*^k \mathfrak{X}_0$ le fermé (réduit par définition) des k -uplets standard dans \mathfrak{X}_0 . C'est un cas particulier de notations 4, puisque \mathfrak{X}_0 est un cas particulier de X_p^0 .

PROPOSITION 7. — *Le schéma $\text{Hilb}_*^k \mathfrak{X}_0$ est génériquement réduit le long de chacune des composantes (toutes de dimension k) du fermé $\text{Hilb}_*^k \mathfrak{X}_0$.*

Démonstration. — Soit $\xi \in \text{Hilb}_*^k \mathfrak{X}_0$ un k -uplet standard de \mathfrak{X}_0 . D'après la proposition 6 précédente il peut se présenter deux cas : ou ξ est limite d'une réunion de k points simples distincts, ou ξ est limite d'une réunion d'un doublet de support O non contenu dans le plan P et $k-2$ points simples distincts. Dans le premier cas, la proposition 7 est évidente. Donc, il suffit de regarder le deuxième cas, pour lequel on peut se ramener à $\xi = d_0$, avec d_0 doublet de support O , non contenu dans $\mathfrak{X}'_0 = \mathfrak{X}_0 \cap P$. Soit alors I_0 l'idéal d'un tel doublet d_0 . L'idéal I_0 est de la forme $I_0 = (z^2, x + \lambda z, y + \mu z)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$. Une carte de $\text{Hilb}^2 \mathbf{C}^3$ en d_0 est donc (u, u', a, a', b, b') correspondant à l'idéal

$$I = (z^2 + uz + u', x + \lambda z + az + a', y + \mu z + bz + b').$$

(voir par exemple [13, p. 302]). D'après [8, propositions 0.5 et 0.6], le germe de $\text{Hilb}^2 \mathfrak{X}_0$ en d_0 est défini par les équations $u = u' = a = a' = b = b' = 0$. On voit ainsi que $\text{Hilb}^2 \mathfrak{X}_0$ est, au voisinage de d_0 , non-singulier, donc réduit.

PROPOSITION 8. — *Soit ξ un k -uplet non-standard dans \mathfrak{X}_0 . Alors ξ est limite dans $\text{Hilb}_*^k \mathfrak{X}_0$ de k -uplets de \mathfrak{X}_0 qui sont réunion disjointe de $k-3$ points simples distincts de O et d'un triplet (non-standard) $\mathfrak{X}_0 \cap P'$ où P' est un plan distinct de P , passant par O .*

Démonstration. — On se ramène à $\text{Supp } \xi = O$. D'après les propositions 5 et 6, l'idéal de ξ est de la forme $I = (xy, xz, yz, z^2, x^a + \beta y^b + \gamma z)$ avec $k = a + b + 1$ et $\beta \neq 0$. On pose pour $s \neq 0$

$$I_s = (xy, xz, yz, z^2, x(x^{a-1} - s^{a-1}) + \beta y(y^{b-1} - s^{b-1}) + \gamma z).$$

(En convenant $x^{a-1} - s^{a-1} = 1$ si $a = 1$; de même pour b .)

Alors, on voit par un calcul simple mais élémentaire que $I_s = I' \cap I'' \cap I'''$ où

— $I' = (x^{a-1} - s^{a-1}, y, z)$ est l'idéal de $a - 1$ points simples sur l'axe des x ;

— $I'' = (y^{b-1} - s^{b-1}, x, z)$ est l'idéal de $b - 1$ points simples sur l'axe des y ;

— $I''' = (s^{a-1}x + \beta s^{b-1}y - \gamma z) + \mathfrak{m}^2$ est l'idéal du triplet non-standard intersection du plan d'équation $s^{a-1}x + s^{b-1}y - \gamma z = 0$ avec le premier voisinage infinitésimal dans \mathbf{P}^3 de l'origine (d'idéal \mathfrak{m}).

On a $I_s \rightarrow I$ si $s \rightarrow 0$ car I_s est bien un idéal de longueur constante k (comme l'idéal I), car $(a - 1) + (b - 1) + 3 = a + b + 1 = k$, d'où la *platitude* de la déformation (voir Introduction, §2).

Comme conséquence de la proposition précédente on a la

PROPOSITION 9. — *Les k -uplets non-standard forment des composantes irréductibles de dimension $k - 1$ de $\text{Hilb}^k \mathfrak{X}_0$.*

Démonstration. — Soit τ le triplet $\tau = \mathfrak{X}_0 \cap P'$ où P' est un plan passant par O , ne contenant ni l'axe Ox , ni l'axe Oy . On va voir que τ n'est pas limite dans $\text{Hilb}^3 \mathfrak{X}_0$ de triplets quasisimples. En effet, τ ne peut être limite de triplets simples de \mathfrak{X}_0 , car on aurait τ contenu dans P' . Par ailleurs, si $\xi'_t \cup \xi''_t$ est un triplet formé de la réunion d'un point simple ξ'_t situé sur l'axe des x par exemple et d'un doublet ξ''_t de support O , alors le triplet τ est nécessairement dans un plan d'équation $\alpha(t)y + \beta(t)z = 0$, car on sait (remarque 1) que ξ''_t est contenu dans une droite passant par O . Un tel plan ne peut pas tendre vers le plan P' d'équation $x + \beta y + \gamma z = 0$. Or la proposition 8 montre qu'un k -uplet général ξ non-standard de \mathfrak{X}_0 est donné par la réunion de $a - 1$ points simples sur l'axe des x , de $b - 1$ points simples sur l'axe des y et du triplet $\tau = \mathfrak{X}_0 \cap P'$ où P' est un plan passant par O .

On voit donc qu'un tel ξ n'est pas limite de k -uplets quasisimples de \mathfrak{X}_0 (donc n'est pas limite de k -uplets standard). On obtient donc ainsi, suivant a et b différentes composantes irréductibles de $\text{Hilb}^k \mathfrak{X}_0$. Qu'elles soient de dimension $k - 1$ est clair, car un k -uplet générique d'une composante est réunion de $a + b - 2 = k - 3$ points simples et d'un triplet τ qui dépend de deux paramètres seulement ; en effet τ est déterminé par le plan P' passant par O .

Notations 6. — On notera $\text{Hilb}_{\text{nst}}^k \mathfrak{X}_0$ la réunion des composantes de la proposition 9.

Définition 8. — Soit X un schéma. Soit $X_1 \cup \dots \cup X_n$ la décomposition de X_{red} en composantes irréductibles X_i ($1 \leq i \leq n$). On note l_i la longueur de \mathcal{O}_{X_i, ξ_i} où ξ_i est le point générique de X_i . Alors la classe fondamentale de X notée $[X]$ est définie par $[X] = \sum l_i [X_i]$. En particulier $l_i = 1$ si X est *génériquement réduit le long de* X_i ([7, p. 15]).

Rappelons que pour un cycle α , on désigne par $\{\alpha\}_k$ la partie de dimension k ([7, p. 10]). Un corollaire immédiat des propositions 7 et 9 et de la définition 8 est la proposition suivante.

PROPOSITION 10. — *Soit \mathfrak{X}_0 le schéma introduit plus haut (définition 7). Alors pour tout entier k on a l'égalité des cycles $\{[\text{Hilb}^k \mathfrak{X}_0]\}_k = [\text{Hilb}_*^k \mathfrak{X}_0]$ dans $\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$. (Pour $k=0$ rappelons la convention faite : $\text{Hilb}^0 \mathfrak{X}_0 = \{\emptyset\}$.)*

Démonstration. — Comme on a déjà remarqué, $\text{Hilb}_*^k \mathfrak{X}_0$ est une réunion de composantes irréductibles, toutes de dimension k . De plus (proposition 7) $\text{Hilb}^k \mathfrak{X}_0$ est *génériquement réduit le long* de chacune de ces composantes. Par contre $\text{Hilb}_{\text{nst}}^k \mathfrak{X}_0$ (k -uplets non-standard) est formé des composantes irréductibles de dimension $k-1$ de $\text{Hilb}^k \mathfrak{X}_0$ (proposition 9), d'où l'égalité de l'énoncé.

3. Les k -uplets de $X_{\mathcal{P}}^0$

Revenons au schéma X^0 défini au début du numéro 2 de la manière suivante. Comme toujours soit P un plan fixé dans \mathbf{P}^3 . Dans le plan P considérons un ensemble \mathcal{P} formé de p points et une courbe X^0 de degré N passant par les p points de \mathcal{P} , avec $\mathcal{P} \subset \text{Sing } X^0$. On suppose que les singularités de X^0 sont uniquement des croisements normaux. Notons $\mathcal{P}^{(1)}$ le voisinage infinitésimal à l'ordre 1 (dans \mathbf{P}^3) de \mathcal{P} . On note $X_{\mathcal{P}}^0$ le schéma formé de la réunion schématique de X^0 et de $\mathcal{P}^{(1)}$. Les résultats trouvés sur \mathfrak{X}_0 dans le numéro 2 se généralisent à $X_{\mathcal{P}}^0$ (propositions 12 et 13 ci-dessous). D'abord on a la

PROPOSITION 11. — *Soit $X_{\mathcal{P}}^0$ le schéma défini ci-dessus. Pour tout point M de \mathcal{P} , il existe un voisinage transcendant de M dans $X_{\mathcal{P}}^0$ analytiquement isomorphe à un voisinage transcendant de O dans \mathfrak{X}_0 .*

Démonstration. — Dans le plan P , soit (x, y) des coordonnées centrées en M telles que les deux branches de X^0 aient pour équations locales (analytiques) : $y - \varphi(x) = 0$ et $x - \psi(y) = 0$. En faisant le changement de coordonnées $X = y - \varphi(x)$ et $Y = x - \psi(y)$ et en rappelant que $X_{\mathcal{P}}^0$ est la réunion schématique de X^0 et de $\mathcal{P}^{(1)}$, on obtient que l'idéal de $X_{\mathcal{P}}^0$ au voisinage de O est $((X, z) \cap (Y, z)) \cap (X, Y, z)^2$ car l'idéal d'une réunion est l'intersection des idéaux. Cet idéal n'est rien d'autre que l'idéal (XY, Xz, Yz, z^2) de \mathfrak{X}_0 .

Le résultat suivant généralise les propositions 7 et 9 et la démonstration en est analogue.

PROPOSITION 12. — (i) Les k -uplets standard dans $X_{\mathcal{P}}^0$ forment des composantes irréductibles de dimension k et le schéma $\text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}^0$ est génériquement réduit le long de ces composantes.

(ii) Les k -uplets non-standard dans $X_{\mathcal{P}}^0$ forment des composantes irréductibles de $\text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}^0$ de dimension strictement inférieure à k (précisément comprise entre $k-p$ et $k-1$ où $p = \text{Card } \mathcal{P}$).

Notations 7. — On notera $\text{Hilb}_{\text{nst}}^k X_{\mathcal{P}}^0$ la réunion des composantes de $\text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}^0$ formées de k -uplets non standard de $X_{\mathcal{P}}^0$.

Le résultat suivant généralise la proposition 10. Il résulte de ce que les composantes de $\text{Hilb}_{\text{nst}}^k X_{\mathcal{P}}^0$ sont de dimension inférieure à k (proposition 12), alors que celles de $\text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0$ sont de dimension k .

PROPOSITION 13. — Pour tout entier $k \geq 0$ on a l'égalité des cycles $\{[\text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}^0]\}_k = [\text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0]$ dans $\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$.

Rappelons (cf. notations 3) que le schéma $\Delta_{\mathcal{P}}(N)$ est défini comme la réunion de $2p$ droites passant par les points de \mathcal{P} , $N-2p$ droites et du voisinage infinitésimal à l'ordre 1 (dans \mathbf{P}^3) des points de \mathcal{P} . Comme corollaire de la proposition précédente (appliqué à X^0 formée de la réunion des N droites) on a :

COROLLAIRE 1. — Soit $\Delta_{\mathcal{P}}(N)$ le schéma défini plus haut. Alors pour tout entier $k \geq 0$ on a l'égalité des cycles $\{[\text{Hilb}^k \Delta_{\mathcal{P}}(N)]\}_k = [\text{Hilb}_*^k \Delta_{\mathcal{P}}(N)]$ dans $\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$.

4. L'opération Δ^m

Soit S un schéma réduit (qui dans la suite sera un ouvert de \mathbf{P}^1 ou bien un point). Soit $\Delta \subset \mathbf{P}^3$ une droite et soit $W \subset \text{Hilb}^k \mathbf{P}^3 \times S$ un sous-schéma, vu comme schéma relatif sur S . Le schéma W peut éventuellement être non réduit, mais sa structure nilpotente n'interviendra pas dans le résultat. On va définir un sous-schéma réduit $\Delta^m W \subset \text{Hilb}^k \mathbf{P}^3 \times S$. Mais d'abord une remarque :

Remarque 6. — La réunion $\eta \cup \delta$ d'un k -uplet η et d'un m -uplet δ dans un schéma X n'est pas forcément un $(k+m)$ -uplet, comme on le voit déjà avec des uplets simples ayant un point en commun. Cependant si η et δ sont *disjoints*, $\eta \cup \delta$ est un $(k+m)$ -uplet.

Notations 8. — Soit $W \subset \text{Hilb}^k \mathbf{P}^3 \times S$ un sous-schéma.

(i) Dans le schéma $W \times \text{Hilb}^m \Delta \subset \text{Hilb}^k \mathbf{P}^3 \times S \times \text{Hilb}^m \Delta$, soit $D^{k,m}$ l'ouvert des (η, t, δ) vérifiant $\eta \cap \delta = \emptyset$. (Il est dense car on peut toujours « déplacer » δ le long de Δ .)

(ii) On a une application rationnelle « union » : $u : W \times \text{Hilb}^m \Delta \dots \rightarrow \text{Hilb}^{k+m} \mathbf{P}^3$ définie seulement sur $D^{k,m}$ (remarque précédente) par $u(\eta, t, \delta) = \eta \cup \delta$.

(iii) Soit

$$\Gamma^{k,m} \subset W \times \text{Hilb}^m \Delta \times \text{Hilb}^{k+m} \mathbf{P}^3 \subset \text{Hilb}^k \mathbf{P}^3 \times S \times \text{Hilb}^m \Delta \times \text{Hilb}^{k+m} \mathbf{P}^3$$

l'adhérence (réduite par définition) du graphe de u et soit $q_2: \Gamma^{k,m} \rightarrow \text{Hilb}^{k+m} \mathbf{P}^3 \times S$ la projection naturelle.

(iv) On pose $\Delta^m W = q_2(\Gamma^{k,m}) \subset \text{Hilb}^{k+m} \mathbf{P}^3 \times S$.

Remarque 7. — (i) Comme q_2 est propre (car $\text{Hilb}^k \mathbf{P}^3$ et $\text{Hilb}^m \Delta$ sont propres), $\Delta^m W$ est un sous-schéma de $\text{Hilb}^{k+m} \mathbf{P}^3 \times S$, réduit par définition d'une image propre de sous-schéma.

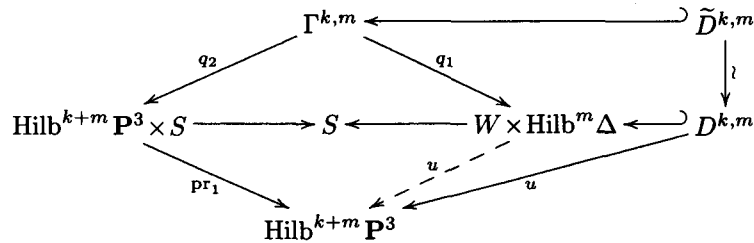
(ii) En particulier $\Delta^0 W = W_{\text{red}}$ (se rappeler $\text{Hilb}^0 \Delta = \{\emptyset\}$).

LEMME 1. — On reprend les notations 8 précédentes. Soient 0 dans S et ξ_0 dans $\text{Hilb}_0^{k+m} \mathbf{P}^3$. Si $(\xi_0, 0)$ appartient à $\Delta^m W \subset \text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3 \times S$, alors il existe un voisinage V de 0 dans \mathbf{C} et une courbe analytique $\gamma: V \rightarrow \text{Hilb}^{k+m} \mathbf{P}^3 \times S$ telle que en posant $\xi = \text{pr}_1 \circ \gamma$ et $s = \text{pr}_2 \circ \gamma$, on ait :

(a) $\xi(0) = \xi_0$,

(b) si $t \neq 0$, alors $\xi(t) = \eta(t) \cup \delta(t)$ avec $\delta(t)$ dans $\text{Hilb}^m \Delta$ et $(\eta(t), s(t))$ dans W avec $\eta(t) \cap \delta(t) = \emptyset$. En particulier, $\eta(t)$ est dans la fibre $W_{s(t)}$ de W sur S .

Preuve. — Soit $q_1: \Gamma^{k,m} \rightarrow W \times \text{Hilb}^m \Delta$ la projection naturelle. Noter que q_1 réalise un isomorphisme d'un ouvert dense $\tilde{D}^{k,m}$ de $\Gamma^{k,m}$ avec $D^{k,m}$. D'où un diagramme commutatif :



Supposons donc $(\xi_0, 0)$ dans $\Delta^m W$. Par définition (notations 8) on a $(\xi_0, 0) = q_2(\gamma'_0)$ où $\gamma'_0 \in \Gamma^{k,m}$. Mais comme $\tilde{D}^{k,m}$ est un ouvert dense de $\Gamma^{k,m}$, il existe une courbe analytique $\gamma': V \rightarrow \Gamma^{k,m}$ (où V est un voisinage de 0 dans \mathbf{C}) avec $\gamma'(0) = \gamma'_0$ et $\gamma'(t) \in \tilde{D}^{k,m}$ si $t \neq 0$. Comme on a :

$$\tilde{D}^{k,m} \subset \Gamma^{k,m} \subset \text{Hilb}^k \mathbf{P}^3 \times S \times \text{Hilb}^m \Delta \times \text{Hilb}^{k+m} \mathbf{P}^3,$$

on écrit pour tout $t \neq 0$: $\gamma'(t) = (\eta(t), s(t), \delta(t), \eta(t) \cup \delta(t))$. Notons alors $\gamma = q_2 \circ \gamma': V \rightarrow \text{Hilb}^{k+m} \mathbf{P}^3 \times S$, d'où $s = \text{pr}_2 \circ \gamma$. Posons $\xi = \text{pr}_1 \circ \gamma$; comme les restrictions de $\text{pr}_1 \circ q_2$ et $u \circ q_1$

à $\tilde{D}^{k,m}$ sont égales, on a donc (pour $t \neq 0$) : $\xi(t) = \text{pr}_1 q_2 \gamma'(t) = u q_1(t) \gamma'(t) = u(\eta(t), s(t))$, $\delta(t) = \eta(t) \cup \delta(t)$ comme on le voulait. Ceci termine la démonstration du lemme.

COROLLAIRE 2. — Soit $\Omega(k, m) \subset \text{Hilb}^{k+m} \mathbf{P}^3 \times S$ l'ensemble des $(\eta \cup \delta, t)$ où (η, t) est dans $W \subset \text{Hilb}^k \mathbf{P}^3 \times S$, δ est dans $\text{Hilb}^m \Delta$ et $\eta \cap \delta = \emptyset$. Alors $\Delta^m W$ est égal à l'adhérence $\overline{\Omega(k, m)}$ de $\Omega(k, m)$ dans $\text{Hilb}^{k+m} \mathbf{P}^3 \times S$.

Preuve. — On a $\Omega(k, m) \subset \Delta^m W$ puisque $(\eta \cup \delta, t) = q_2(\eta, t, \delta, \eta \cup \delta)$ d'où $\overline{\Omega(k, m)} \subset \Delta^m W$ puisque $\Delta^m W$ est fermé. Réciproquement, le lemme 1 montre $\Delta^m W \subset \overline{\Omega(k, m)}$ car pour $(\xi_0, 0) \in \Delta^m W$, le couple $(\xi_0, 0)$ est limite de $(\eta(t) \cup \delta(t), s(t))$.

Remarque 8. — Ce corollaire prouve, si $W \subset \text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3 \times S$ (définition 2), que l'on a l'inclusion $\Delta^m W \subset \text{Hilb}_0^{k+m} \mathbf{P}^3 \times S$.

PROPOSITION 14. — Soient Δ_1, Δ_2 deux droites sécantes de \mathbf{P}^3 et O leur point d'intersection. On suppose que pour tout $(\eta, t) \in W \subset \text{Hilb}^k \mathbf{P}^3 \times S$, le point O n'est pas sur η . Alors on a l'égalité $\Delta_1^{m_1} \Delta_2^{m_2} W = \Delta_2^{m_2} \Delta_1^{m_1} W$ de sous-schémas (réduits) dans $\text{Hilb}^{k+m_1+m_2} \mathbf{P}^3 \times S$.

Preuve. — Soit

$$\Omega(k, m_1, m_2) \subset \text{Hilb}^{k+m_1+m_2} \mathbf{P}^3 \times S$$

l'ensemble formé des $(\eta \cup \delta_1 \cup \delta_2, t)$ où $\delta_i \in \text{Hilb}^{m_i} \Delta_i$, où $(\eta, t) \in W$ avec $\eta \cap \delta_i = \emptyset$. Alors $\Delta_1^{m_1} \Delta_2^{m_2} W$ comme $\Delta_2^{m_2} \Delta_1^{m_1} W$, est l'adhérence de $\Omega(k, m_1, m_2)$ dans $\text{Hilb}^{k+m_1+m_2} \mathbf{P}^3 \times S$ par le corollaire 2.

PROPOSITION 15. — On reprend les notations de la définition 3, de notations 1 et 8 avec S égal un point. Alors si Δ est une droite de P ne passant par aucun des M_1, \dots, M_j on a $\Delta^m C_{j,\sigma}^k = C_{j,\sigma+e^m}^{k+m}$.

Preuve. — Résulte aussitôt du corollaire 2 et de la définition 3. (Naturellement, pour $m=0$, on utilise la convention $e^0=0$ de notations 1.)

Remarque 9. — Dans la suite, on utilisera surtout la construction de $\Delta^m W$ dans le cas particulier suivant. Soit $Z \subset \mathbf{P}^3 \times S$ un sous-schéma (non nécessairement réduit) et soit $W = \text{Hilb}^k Z/S \subset \text{Hilb}^k \mathbf{P}^3 \times S$ le schéma de Hilbert relatif de Z/S . Par construction même, on voit alors l'inclusion

$$\Delta^m \text{Hilb}^k Z/S \subset \text{Hilb}^{k+m} Z'/S \subset \text{Hilb}^{k+m} \mathbf{P}^3 \times S$$

où $Z' = Z \cup (\Delta \times S)$. Noter qu'on aurait aussi bien pu écrire $(\text{Hilb}^{k+m} Z'/S)_{\text{red}}$ dans les inclusions précédentes, puisque $\Delta^m W$ est réduit par définition.

5. Expression de la classe $[\text{Hilb}_*^k \Delta_{\mathcal{P}}(N)]$ en fonction des cycles $\mathcal{C}_{j,\sigma}^k$

Le but est maintenant d'exprimer la classe $[\text{Hilb}_*^k \Delta_{\mathcal{P}}(N)]$ (où $\Delta_{\mathcal{P}}(N)$ a été introduit dans notations 3) comme combinaison linéaire des cycles $\mathcal{C}_{j,\sigma}^k$ définis en §1. Précisément on a le théorème :

THÉORÈME 1. — *En posant $p = \text{Card } \mathcal{P}$, pour tout k et N entiers, $k \geq 0$ et $N \geq 2p$, on a l'égalité des cycles de $\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$:*

$$[\text{Hilb}_*^k \Delta_{\mathcal{P}}(N)] = \sum_{\substack{j,\sigma \\ 2j+s(\sigma) \leq k}} \binom{p}{j} P_{\sigma}(N-2j) \mathcal{C}_{j,\sigma}^k$$

où P_{σ} est le polynôme numérique donné par la proposition 1.

Exemple 1. — Soit $k=3$, $N=5$, $\text{Card } \mathcal{P}=2$. Vu que $2j+s(\sigma) \leq 3$ on a deux cas seulement à considérer : le cas $j=0$ et le cas $j=1$.

Le cas $j=0$. Dans ce cas, on doit avoir $s(\sigma) = \sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3$ (cf. notations 1) sinon $\mathcal{C}_{j,\sigma}^k = \emptyset$ par définition (définition 3 (α)). Pour $s(\sigma)=3$ on a trois suites à considérer : la suite $\sigma' = (3, 0, \dots, 0, \dots)$, la suite $\sigma'' = (1, 1, 0, \dots, 0, \dots)$ et la suite $\sigma''' = (0, 0, 1, 0 \dots 0, \dots)$.

Le cas $j=1$. Dans ce cas, peut être $s(\tau)=0$ ou bien $s(\tau)=1$. Pour $s(\tau)=0$, on a une seule suite à considérer la suite $\tau' = e^0 = (0, 0, \dots, 0, \dots)$ (notations 1). Pour $s(\tau)=1$, on a encore une seule suite à considérer : la suite $\tau'' = e^1 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$.

Alors dans cet exemple le théorème 1 nous donne :

$$[\text{Hilb}_*^3 \Delta_{\mathcal{P}}(5)] = \binom{2}{0} P_{\sigma'}(5) \mathcal{C}_{0,\sigma'}^3 + \binom{2}{0} P_{\sigma''}(5) \mathcal{C}_{0,\sigma''}^3 + \binom{2}{0} P_{\sigma'''}(5) \mathcal{C}_{0,\sigma'''}^3 + \binom{2}{1} P_{\tau'}(3) \mathcal{C}_{1,\tau'}^3 + \binom{2}{1} P_{\tau''}(3) \mathcal{C}_{1,\tau''}^3$$

ce qu'on notera symboliquement

$$[\text{Hilb}_*^3 \Delta_{\mathcal{P}}(5)] = 10 \left[\begin{array}{c} / \ / \ / \\ \bullet \ / \ / \ / \\ \bullet \end{array} \right] + 20 \left[\begin{array}{c} / \ / \\ \bullet \ / \ / \\ \bullet \end{array} \right] + 5 \left[\begin{array}{c} / \ / \\ \bullet \ / \ / \\ \bullet \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} \times \times \times \\ \bullet \times \times \times \\ \bullet \end{array} \right] + 5 \left[\begin{array}{c} \times \times \times \\ \bullet \times \times \times \\ \bullet \end{array} \right]$$

en utilisant des dessins qui parlent mieux à l'imagination que la notation générale $\mathcal{C}_{j,\sigma}^k$.

On aura besoin en paragraphe II (propositions 20, 21) d'un résultat plus fort que le théorème 1 ; c'est le théorème 2 ci-dessous.

Notations 9. — Soient $m_1, \dots, m_a \in \mathbf{N}$ des nombres entiers fixés.

(i) Si k est un entier, on pose : $k' = k + m_1 + \dots + m_a$.

(ii) On rappelle que e^i est la suite $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ avec 0 partout sauf à la place i où il y a 1 et que $e^0 = 0$. Alors on pose : $e' = e^{m_1} + \dots + e^{m_a}$ dans $\mathbf{Z}^{(\mathbf{N}^*)}$.

THÉORÈME 2. — Soient $m_1, \dots, m_a \in \mathbb{N}$ des nombres entiers et soient $\Delta_1, \dots, \Delta_a$ des droites du plan P en position générale (non concourantes 3 à 3).

Alors en posant $p = \text{Card } \mathcal{P}$, pour tous $k \geq 0$ et $N \geq 2p$ entiers, on a l'égalité des cycles de $\text{Hilb}_0^{k'} \mathbb{P}^3$

$$[\Delta_1^{m_1} \dots \Delta_a^{m_a} \text{Hilb}_*^k \Delta_{\mathcal{P}}(N)] = \sum_{\substack{j, \sigma \\ 2j+s(\sigma) \leq k}} \binom{p}{j} P_{\sigma}(N-2j) C_{j, \sigma+e'}^{k'}$$

Le théorème 1 est un cas particulier du Théorème 2; en effet lorsque tous les m_i sont nuls, on a $\Delta_1^{m_1} \dots \Delta_a^{m_a} \text{Hilb}_*^k \Delta_{\mathcal{P}}(N) = (\text{Hilb}_*^k \Delta_{\mathcal{P}}(N))_{\text{red}}$ par la remarque 7 (ii) et $\text{Hilb}_*^k \Delta_{\mathcal{P}}(N)$ est réduit par définition (notations 4).

Démonstration du théorème 2. — Rappelons (notations 3) que le schéma $\Delta_{\mathcal{P}}(N)$ est réunion de :

- (i) le premier voisinage infinitésimal dans \mathbb{P}^3 d'un ensemble \mathcal{P} de p points dans P ;
- (ii) $2p$ droites D'_β et D''_β de P passant par ces p points ($1 \leq \beta \leq p$);
- (iii) $N - 2p$ autres droites L_α de P ($1 \leq \alpha \leq N - 2p$).

Soit alors $\eta \in \Delta_1^{m_1} \dots \Delta_a^{m_a} \text{Hilb}_*^k \Delta_{\mathcal{P}}(N)$.

Premier cas : Supposons η schématiquement contenu dans P ; alors par le corollaire 2 (appliqué avec $S = \text{Spec}(\mathbb{C})$) et par la définition de Hilb_*^k , on a $\eta = \lim \xi_\epsilon$ où ξ_ϵ est un k' -uplet simple $\xi'_\epsilon \cup \xi''_\epsilon$ avec :

- ξ'_ϵ un k -uplet dans $\Delta_{\mathcal{P}}(N) \cap P$ et
- ξ''_ϵ un $(m_1 + \dots + m_a)$ -uplet tel que $\xi''_\epsilon \subset \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_a$.

De plus, on peut supposer que les k points de ξ'_ϵ sont placés sur les N droites $D'_\beta, D''_\beta, L_\alpha$ constituant $\Delta_{\mathcal{P}}(N) \cap P$ de la façon suivante : on trouve exactement σ_i fois i points de ξ'_ϵ sur une de ces droites.

Si on pose $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots)$ alors (notations 1), on a $s(\sigma) = \sum_i i \sigma_i = k$. D'après la définition 3, il vient donc $\xi'_\epsilon \in C_{0, \sigma}^{k'}$; d'où $\eta \in C_{0, \sigma+e'}^{k'}$, toujours par la définition 3, ou encore par la proposition 15. Par la proposition 1, on a $P_\sigma(N)$ composantes dans

$$\Delta_1^{m_1} \dots \Delta_a^{m_a} \text{Hilb}_*^k \Delta_{\mathcal{P}}(N)$$

rationnellement équivalents au cycle $C_{0, \sigma+e'}^{k'}$; en effet, on choisit des points sur N droites, au lieu de tickets dans N urnes!

Deuxième cas : Supposons le k' -uplet η non contenu schématiquement dans P ; le support de η ne peut être formé de k' points distincts. D'après la remarque 9 (avec $S = \text{Spec}(\mathbb{C})$), on a $\eta \in \text{Hilb}^{k+m}(\Delta_{\mathcal{P}}(N)) \cup \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_a$.

Comme $\eta \subset \Delta_{\mathcal{P}}(N) \cup \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_a$ et $\eta \not\subset P$, le support de η rencontre forcément \mathcal{P} . Numérotons les éléments de \mathcal{P} en $\{M_1, \dots, M_p\}$ et ramenons-nous à $\mathcal{P} \cap \text{Supp}(\eta) =$

$\{M_1, \dots, M_j\}$ (avec $1 \leq j \leq p$). Comme $\eta \in \Delta_1^{m_1} \dots \Delta_a^{m_a} \text{Hilb}_*^k \Delta_{\mathcal{P}}(N)$, on a comme précédemment $\eta = \lim(\xi'_\varepsilon \cup \xi''_\varepsilon)$ avec

- ξ'_ε un k -uplet standard de $\Delta_{\mathcal{P}}(N)$, donc ξ'_ε est encore limite de doublets de supports $\{M_1\}, \dots, \{M_j\}$ et de points simples ;
- ξ''_ε est limite de $m_1 + \dots + m_a$ points simples sur les droites $\Delta_1, \dots, \Delta_a$.

Plus précisément, η appartient à l'adhérence du cycle dont les k' -uplets sont formés de :

- (i) j doublets d_1, \dots, d_j de supports $\{M_1\}, \dots, \{M_j\}$;
- (ii) s points sur les $N - 2j$ droites L_α, D'_β et D''_β ($j+1 \leq \beta \leq p$) de $\Delta_{\mathcal{P}}(N)$, de façon à ce qu'on ait fait σ_i fois exactement i points sur une de ces droites ;
- (iii) $k - 2j - s$ points sur les $2j$ droites D'_β et D''_β ($1 \leq \beta \leq j$) qui passent par M_1, \dots, M_j ;
- (iv) enfin $m_1 + \dots + m_a$ points sur les droites $\Delta_1, \dots, \Delta_a$.

Si on pose $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots)$, il vient $s(\sigma) = \sum_i i\sigma_i = s \leq k - 2j$. On voit alors (définition 3) $\xi'_\varepsilon \in \mathcal{C}_{j,\sigma}^k$ d'où $\eta \in \mathcal{C}_{j,\sigma+e'}^{k'}$ (proposition 15). Mais il y a $\binom{p}{j}$ façons de choisir les j points M_1, \dots, M_j parmi les p points de \mathcal{P} et par la proposition 1, il y a $P_\sigma(N - 2j)$ façons de placer $s(\sigma)$ points sur les $N - 2j$ droites restant dans $\Delta_{\mathcal{P}}(N)$ de manière qu'on ait σ_i fois i points sur une droite.

Conclusion : Lorsque j varie entre 0 et p et la suite σ parmi les suites telles que $s(\sigma) \leq k - 2j$ on obtient toutes les composantes de $\Delta_1^{m_1} \dots \Delta_a^{m_a} \text{Hilb}_*^k \Delta_{\mathcal{P}}(N)$. D'où la formule cherchée :

$$[\Delta_1^{m_1} \dots \Delta_a^{m_a} \text{Hilb}_*^k \Delta_{\mathcal{P}}(N)] = \sum_{\substack{j,\sigma \\ 2j+s(\sigma) \leq k}} \binom{p}{j} P_\sigma(N - 2j) \mathcal{C}_{j,\sigma+e'}^{k'}$$

Ceci termine la démonstration du théorème 2.

II. La classe $[\text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0]$

Au paragraphe I nous avons construit les cycles $\mathcal{C}_{j,\sigma}^k$ et nous avons montré que la classe $[\text{Hilb}_*^k \Delta_{\mathcal{P}}(N)]$ s'exprime comme combinaison linéaire des cycles $\mathcal{C}_{j,\sigma}^k$ (théorème 1). On veut généraliser ce résultat, du cas d'une réunion de droites $\Delta(N)$, au cas d'une courbe plane quelconque X^0 , ayant comme singularités uniquement des croisements normaux, avec $\mathcal{P} \subset \text{Sing } X^0$. Pour éviter des confusions, on note cette fois n et non N , le degré de X_0 .

On s'aperçoit qu'il faut distinguer deux cas : le cas $n \geq 2 \text{ Card } \mathcal{P}$ et le cas $n < 2 \text{ Card } \mathcal{P}$. Dans le premier cas, pour exprimer $[\text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0]$ (où $X_{\mathcal{P}}^0 = X^0 \cup \mathcal{P}^{(1)}$, cf. définition 4) comme combinaison linéaire des cycles $\mathcal{C}_{j,\sigma}^k$, il sera suffisant de déformer la courbe X^0 en n droites et, une fois montrée l'équivalence rationnelle entre les cycles $[\text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0]$ et $[\text{Hilb}_*^k \Delta_{\mathcal{P}}(n)]$

dans $\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$, on obtient la formule cherchée grâce aux résultats du paragraphe I. En vue de traiter le deuxième cas, dans lequel on ne peut pas déformer directement la courbe X^0 (avec les conditions imposées) on démontre un résultat plus fort, à savoir l'expression de $[\Delta_1^{m_1} \dots \Delta_a^{m_a} \text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0]$ (notations 8) comme combinaison linéaire des cycles $C_{j,\sigma}^k$. Cela permet, dans le deuxième cas ($n < 2 \text{Card } \mathcal{P}$), par une double récurrence, d'arriver au résultat voulu.

6. Le schéma $X_{\mathcal{P}}/\mathbf{C}$

Soit P un plan fixé dans \mathbf{P}^3 . Soit \mathcal{P} un ensemble fini de points dans P et $\mathcal{P}^{(1)}$ son premier voisinage infinitésimal dans \mathbf{P}^3 . Soient X^0 et X^1 deux courbes du même degré n dans P passant par les points de \mathcal{P} . On suppose que $\mathcal{P} \subset \text{Sing } X^0 \cap \text{Sing } X^1$ et que toutes les singularités de X^0 et X^1 sont des points doubles ordinaires, les quatre tangentes y étant distinctes. De plus, on suppose qu'un point singulier de l'une (en dehors de \mathcal{P}) ne peut être que régulier pour l'autre. On se donne $\Delta_1, \dots, \Delta_a$ des droites du plan P en position générale (non concourant 3 à 3) coupant transversalement les courbes X^0 et X^1 en des points lisses.

Choisissons un système de coordonnées inhomogènes (x, y, z) de \mathbf{P}^3 tel que P ait pour équation $z=0$. Notons $f_0=0$ et $f_1=0$ les équations qui définissent respectivement X^0 et X^1 dans P .

Définition 9. — On notera X le schéma dans $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{C}$ défini par les équations (t étant la coordonnée de \mathbf{C}) $f(x, y, t) = t f_1(x, y) + (1-t) f_0(x, y) = 0$ et $z=0$.

Définition 10. — Notons $X_{\mathcal{P}}/\mathbf{C}$ le schéma relatif sur \mathbf{C} défini comme sous-schéma de $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{C}$ de la manière suivante : $X_{\mathcal{P}} = X \cup (\mathcal{P}^{(1)} \times \mathbf{C})$.

Définition 11. — Notons $\pi: \mathbf{P}^3 \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ la projection naturelle sur \mathbf{C} . La fibre $(X_{\mathcal{P}})_{t_0}$ du schéma $X_{\mathcal{P}}$ en $t_0 \in \mathbf{C}$ est définie de la manière suivante (intersection schématique) : $(X_{\mathcal{P}})_{t_0} = X_{\mathcal{P}} \cap \pi^{-1}(t_0)$. On la note $X_{\mathcal{P}}^{t_0}$ pour la commodité.

LEMME 2. — Pour la fibre $X_{\mathcal{P}}^{t_0}$ de $X_{\mathcal{P}}$ en t_0 on a $X_{\mathcal{P}}^{t_0} = X^{t_0} \cup (\mathcal{P}^{(1)} \times \{t_0\})$.

Donc la fibre $X_{\mathcal{P}}^0$ coïncide bien avec $X_{\mathcal{P}}^0$ défini au paragraphe I (définition 4).

Démonstration. — Dans la suite, on identifiera $\mathcal{P}^{(1)} \times \{t_0\}$ à $\mathcal{P}^{(1)}$. Pour rendre les calculs moins fastidieux, prouvons l'assertion dans le cas $t_0=0$. On se place au voisinage d'un point $O \in \mathcal{P}$ avec des coordonnées (x, y, z) inhomogènes centrées en O . Par la définition 11 la fibre $X_{\mathcal{P}}^0$ est égale à $X_{\mathcal{P}} \cap \pi^{-1}(0)$.

Rappelons que si Y et Y' sont deux sous-schémas alors l'idéal $I(Y \cap Y')$ de l'intersection est par définition la somme $I(Y) + I(Y')$ des idéaux de Y et Y' . Par ailleurs, l'idéal

$I(Y \cup Y')$ de la réunion est par définition l'intersection $I(Y) \cap I(Y')$ des idéaux. Donc on a $I(X_{\mathcal{P}}^0) = I(X_{\mathcal{P}}) + I(\pi^{-1}(0))$ dans $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{C}$. D'après la définition 11 l'égalité précédente donne

$$I(X_{\mathcal{P}}^0) = (I(X) \cap I(\mathcal{P}^{(1)} \times \mathbf{C})) + I(\pi^{-1}(0)). \quad (1)$$

Si (x, y, z) est l'idéal de l'origine dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^3}$ alors l'idéal de $\mathcal{P}^{(1)}$ est $(x, y, z)^2$. L'idéal $I(X)$ est donné d'après la définition 10 par $I(X) = (f, z)$ et l'idéal $I(\pi^{-1}(0))$ est donné par $I(\pi^{-1}(0)) = (t)$, d'où dans $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{C}$:

$$I(X_{\mathcal{P}}^0) = ((f, z) \cap (xy, xz, yz, x^2, y^2, z^2)) + (t). \quad (2)$$

Maintenant il faut remarquer que f appartient à l'idéal $(x, y, z)^2$ car on a supposé qu'on a une singularité au point O pour X^0 et pour X^1 ; l'égalité (1) donne ainsi: $I(X_{\mathcal{P}}^0) = (f, xz, yz, z^2, t)$. Vu que $f = f_0 + t(f_1 - f_0)$ on conclut alors $I(X_{\mathcal{P}}^0) = (f_0, xz, yz, z^2, t)$. Par ailleurs l'idéal de $X^0 \cup \mathcal{P}^{(1)} \subset \mathbf{P}^3 \times \{0\}$ comme on a dit ci-dessus est donné localement en O par $I(X^0 \cup \mathcal{P}^{(1)}) = I(X^0) \cap I(\mathcal{P}^{(1)})$ d'où $I(X^0 \cup \mathcal{P}^{(1)}) = (f_0, z) \cap (xy, xz, yz, x^2, y^2, z^2) = (f_0, xz, yz, z^2)$. Donc dans $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{C}$, on a

$$I(X^0 \cup \mathcal{P}^{(1)}) = (f_0, xz, yz, z^2, t). \quad (3)$$

En regardant (2) et (3) on trouve que $X_{\mathcal{P}}^0 = X^0 \cup \mathcal{P}^{(1)}$ et le lemme 2 est montré.

Introduisons maintenant une propriété très utile.

Définition 12. — Soit Z un schéma et $Y \subset Z \times U$ un sous-schéma, où U est un ouvert de \mathbf{P}^1 . On dit que Y possède la propriété (H) si pour tout $t_0 \in U$, tout $x_{t_0} \in Y_{t_0}$ est dans l'adhérence de $Y - Y_{t_0}$.

PROPOSITION 16. — Soit Z un schéma, $U \subset \mathbf{P}^1$ un ouvert et $Y \subset Z \times U$ un sous-schéma réduit, de dimension pure. Alors :

(i) Y est plat sur U si et seulement si Y possède la propriété (H).

(ii) Dans ce cas on a l'équivalence rationnelle $[Y_t] \sim [Y_{t'}]$ entre cycles de Z associés aux fibres schématiques en t et t' .

Démonstration. — (i) Comme Y est réduit, la propriété (H) est équivalente à dire que la projection $p = \text{pr}_2|_Y: Y \rightarrow U$ est plate ([10, III, Proposition 9.7]).

(ii) Comme Y est de dimension pure, p possède une dimension relative ([10, III, corollaire 9.6] et [7, p. 429]); on applique alors [7, théorème 1.7] avec $\alpha = [t] - [t']$.

Remarque 10. — Si $Y \subset Z \times U$ et $Y' \subset Z' \times U$ sont réduits et de dimension pure vérifiant la propriété (H) et si $Y \times_U Y'$ est réduit et de dimension pure, alors il vérifie

aussi la propriété (H). En effet il suffit de vérifier la platitude sur U , ce qui résulte de [10, Proposition 9.2 (b) et (c)].

Soit alors U un ouvert non vide de \mathbf{P}^1 et soit $Z \subset \mathbf{P}^3 \times U$ un sous-schéma *non réduit a priori*. Soit $W = \text{Hilb}^k Z/U \subset \text{Hilb}^k \mathbf{P}^3 \times U$ le schéma de Hilbert relatif de Z sur U (voir Introduction, §2). La construction §I.4 (voir remarque 9) permet de définir le schéma (réduit) $\Delta^m W = \Delta^m \text{Hilb}^k Z/U \subset \text{Hilb}^{k+m} \mathbf{P}^3 \times U$. Pour étudier ses fibres au-dessus de U , on aura besoin du lemme suivant, dont la démonstration est fastidieuse mais facile.

LEMME 3. — Soit (x, y) les coordonnées de \mathbf{C}^2 , soit Δ l'axe des y et soit Z_s une courbe d'équation $y = \varphi_s + x\psi_s(x)$ où φ_s et $\psi_s(x)$ sont des fonctions analytiques (resp. de s et (s, x)). On suppose $\varphi_0 = 0$ et $\psi_0(x) = 0$ de sorte que Z_0 est l'axe des x . Soit ξ_0 un $(k+m)$ -uplet de support $\{0\}$. On suppose qu'il existe une fonction analytique $s(t)$ de $t \neq 0$ telle que ξ_0 est limite dans $\text{Hilb}^{k+m} \mathbf{P}^3$ de ξ_t ($t \rightarrow 0$) où $\xi_t = \delta_t \cup \zeta_t$, $\delta_t \cap \zeta_t = \emptyset$, δ_t étant un m -uplet contenu dans Δ et ζ_t un k -uplet contenu dans $Z_{s(t)}$, δ_t et ζ_t dépendant analytiquement de t ($\neq 0$). Alors l'idéal $I(\xi_0)$ de ξ_0 est de l'une de trois formes :

- (i) $I(\xi_0) = (xy, x^{k+1}, y^m)$,
- (ii) $I(\xi_0) = (xy, x^k, y^{m+1})$,
- (iii) $I(\xi_0) = (xy, \gamma y^m + x^k)$, avec $\gamma \neq 0$.

Soit donc toujours U un ouvert non vide de \mathbf{P}^1 et $Z \subset \mathbf{P}^3 \times U$ un sous-schéma non réduit a priori. Soit $P \subset \mathbf{P}^3$ un plan et $\Delta \subset P$ une droite.

Hypothèse. — On supposera dorénavant que pour tout $t \in U$, la fibre Z_t est une courbe de \mathbf{P}^3 (éventuellement non réduite), qui dans un voisinage de Δ est contenue dans P et rencontre transversalement Δ en des points non singuliers.

PROPOSITION 17. — Avec les notations et l'hypothèse précédentes, on a pour tout $t_0 \in U$ l'égalité d'ensembles $(\Delta^m \text{Hilb}^k Z/U)_{t_0} = \Delta^m(\text{Hilb}^k(Z_{t_0}))$ dans $\text{Hilb}^{k+m} \mathbf{P}^3$.

Preuve. — Avant de donner la démonstration, remarquons bien que dans le membre de droite, la construction Δ^m (voir §I.4) est faite avec $S = \{t_0\}$ tandis que dans le membre de gauche, elle est faite avec $S = U$. Noter aussi que le membre de gauche étant une fibre, a une structure nilpotente a priori.

Soit $\xi_0 \in (\Delta^m \text{Hilb}^k Z/U)_{t_0}$, c'est-à-dire ξ_0 est un élément de $(\Delta^m \text{Hilb}^k Z/U) \cap p^{-1}(t_0)$ où $p: \text{Hilb}^{k+m} \mathbf{P}^3 \times U \rightarrow U$ est la projection canonique. On se ramène à $t_0 = 0$. D'après le lemme 1 (appliqué à $W = \text{Hilb}^k Z/U \subset \text{Hilb}^k \mathbf{P}^3 \times U$) il existe une courbe analytique $\gamma: V \rightarrow \text{Hilb}^k \mathbf{P}^3 \times U$ telle que en posant $\xi = \text{pr}_1 \circ \gamma$ et $s = \text{pr}_2 \circ \gamma$ on ait :

- (i) $\xi(0) = \xi_0$,
- (ii) si $t \neq 0$, $\xi(t) = \delta(t) \cup \zeta(t)$ où $\delta(t) \in \text{Hilb}^m \Delta$, $\eta(t) \in (\text{Hilb}^k Z/U)_{s(t)} = \text{Hilb}^k(Z_{s(t)})$ et $\delta(t) \cap \zeta(t) = \emptyset$.

Si l'application $s: V \rightarrow U$ est constante ($=0$) c'est terminé: $\xi_0 \in \Delta^m \text{Hilb}^k(Z_0)$ car $\zeta(t) \subset Z_0$. Supposons donc l'application $s: V \rightarrow U$ non constante. On se ramène au cas où $\text{Supp } \xi_0$ est un seul point M de $Z_0 \cap \Delta$. Choisissons un système local de coordonnées de P centré en M tel que Δ soit $\{x=0\}$ et Z_0 soit $\{y=0\}$. Par hypothèse Z_s coupe transversalement Δ , donc Z_s a pour équation (pour s voisin de 0) $y = \varphi_s + x\psi_s(x)$ où φ_s et ψ_s sont analytiques (resp. en s et en (s, x)). On peut alors appliquer le lemme 3 et donc l'idéal de $\xi_0 \in (\Delta^m \text{Hilb}^k Z/U)_0$ est de l'une des trois formes: (xy, x^{k+1}, y^m) ou (xy, x^k, y^{m+1}) ou $(xy, \gamma y^m + x^k)$, $\gamma \neq 0$. Les trois déformations suivantes (pour $u \in \mathbf{C}$) montrent alors que ξ_0 est limite de $k+m$ points distincts, dont k sur Z_0 et m sur Δ :

$$(xy, x(x^k - u), y(y^{m-1} - u)); \quad (xy, x(x^{k-1} - u), y(y^m - u)); \quad (xy, \gamma y^m + x^k - u).$$

Ainsi $\xi_0 \in \Delta^m \text{Hilb}^k(Z_0)$.

Réciproquement, l'inclusion $\Delta^m \text{Hilb}^k(Z_0) \subset (\Delta^m \text{Hilb}^k Z/U)_0$ est évidente, car si ξ est dans $\Delta^m \text{Hilb}^k(Z_0)$, alors $\xi = \lim[\delta(t) \cup \zeta(t)]$ avec $\delta(t) \subset \Delta$, $\zeta(t) \subset Z_0 \subset Z$; donc $\xi \in \Delta^m \text{Hilb}^k(Z/U)$. La proposition 17 est donc complètement démontrée.

Soient Δ_i ($1 \leq i \leq a$) des droites (non concourantes 3 à 3) fixées dans le plan P . Soit U un schéma et soit Z/U un sous-schéma relatif de $\mathbf{P}^3 \times U$ tel que pour tout $t \in U$, la fibre Z_t de Z en t soit une courbe, qui au voisinage de Δ_i est contenue dans P , et coupe Δ_i transversalement en des points non singuliers. De plus, on suppose $Z_t \cap \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ pour $t \in U$ et $1 \leq i < j \leq a$.

On va appliquer la construction de §I.4 à $W = \text{Hilb}^k(Z/U)$ de manière à obtenir le schéma réduit $Y = \Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}^k(Z/U)$. (D'après la proposition 14, l'ordre des droites n'a pas d'importance.)

PROPOSITION 18. — Soit U un ouvert de \mathbf{C} . Avec les notations précédentes pour tout $t_0 \in U$, on a l'égalité entre les ensembles:

$$(\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}^k Z/U)_{t_0} = \Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}^k(Z_{t_0})$$

dans $\text{Hilb}^{k'} \mathbf{P}^3$ où $k' = k + m_1 + \dots + m_a$.

Preuve. — On donne la démonstration pour $a=2$. L'inclusion \supset est évidente comme pour la proposition 17. Dans l'autre sens, si $\xi_0 \in (\Delta_2^{m_2}(\Delta_1^{m_1} \text{Hilb}^k Z/U))_{t_0}$ on écrit $\xi_0 = \xi_{01} \cup \xi_{02} \cup \xi'$ avec $\text{Supp } \xi_{0i} \subset \Delta_i \cap Z_{t_0}$ ($i=1, 2$), $(\text{Supp } \xi') \cap \Delta_i \cap Z_{t_0} = \emptyset$, et ξ_{01}, ξ_{02}, ξ' disjoints. Puis, on applique la proposition 17 à ξ_{01}, ξ_{02} respectivement.

Nous allons maintenant appliquer ce qui précède au cas où le schéma relatif Z/U est le schéma $X_{\mathcal{P}}/U$ (définition 10) l'ouvert $U \subset \mathbf{C}$ étant défini un peu plus bas. Rappelons que les courbes X^0 et X^1 passent par les points de l'ensemble fini \mathcal{P} et ont comme

singularités des points doubles ordinaires. Les droites $\Delta_1, \dots, \Delta_a$ de P sont en *position générale* c'est-à-dire trois quelconques entre elles sont non concourantes. On les a choisies aussi transverses à X^0 et X^1 en des points non singuliers.

Remarque 11. — Notons toujours $\text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}$ les k -uplets standard de $X_{\mathcal{P}}$. Comme conséquence de la proposition 12, on remarquera que $\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}$ est réunion de $\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}$ et de composantes de dimension strictement inférieure à k' (où $k' = k + m_1 + \dots + m_a$).

La proposition suivante, qu'on montrera plus bas, est fondamentale pour tout ce qui suit. (On renvoie aux définitions 9, 10, 11.)

PROPOSITION 19. — *Avec les hypothèses faites sur le schéma $X_{\mathcal{P}}$ et les droites $\Delta_1, \dots, \Delta_a$, il existe un ouvert U de \mathbf{C} (contenant 0) tel que pour tout $t \in U$ et pour tout entier $k \geq 0$ on ait l'équivalence rationnelle entre cycles de $\text{Hilb}_0^{k'} \mathbf{P}^3$*

$$[\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0] \sim [\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^t].$$

Remarque 12. — On se servira surtout de la Proposition 19 dans le cas $m_1 = m_2 = \dots = m_a = 0$. On aura en fait besoin de ce résultat plus fort pour une récurrence sur k (proposition 21).

Soit $U \in \mathbf{C}$ l'ouvert défini de la manière suivante : $t \in U$ si et seulement si X^t n'a que de points doubles ordinaires comme singularités et les droites Δ_i sont transverses à X^t en des points non-singuliers. L'ouvert U contient 0 et 1 par hypothèse. Grâce au théorème de Bertini (appliqué sur l'éclaté de P en \mathcal{P} au pinceau sans point base défini par X^0 et X^1), on peut même supposer que pour tout $t \in U \setminus \{0, 1\}$, X^t est non-singulière en dehors de \mathcal{P} .

LEMME 4. — *Le sous-schéma réduit $Y = \Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}/U$ de $\text{Hilb}_0^{k'} \mathbf{P}^3 \times U$ vérifie la propriété (H) (définition 12).*

Preuve. — Soient $t_0 \in U$ et

$$\xi_0 \in (\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}/U)_{t_0} \quad \text{ou encore} \quad \xi_0 \in \Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}^{t_0}$$

par la proposition 18. On peut donc écrire $\xi_0 = \xi_0' \cup \xi_0'' \cup \xi_0''' \cup \xi_0^{(iv)} \cup \eta_1 \cup \dots \cup \eta_\alpha$ où

- $\text{Supp } \xi_0' \subset \mathcal{P}$;
- ξ_0'' a pour support des points de $\text{Sing } X_{\mathcal{P}}^{t_0}$ qui ne sont pas contenus dans \mathcal{P} ($\xi_0'' = \emptyset$ si $t \neq 0$ ou $t \neq 1$, car alors X^t est non singulière en dehors de \mathcal{P}) ;
- ξ_0''' a pour support des points de $X_{\mathcal{P}}^{t_0} \cap \Delta_\alpha$ ($1 \leq \alpha \leq a$) ;

— $\xi_0^{(iv)}$ a pour support des points non singuliers de X^{t_0} qui ne sont sur aucune des droites Δ_α ;

— $\text{Supp } \eta_\alpha \subset \Delta_\alpha \setminus X^{t_0}$ ($1 \leq \alpha \leq a$).

Pour montrer la propriété (H) pour Y , on va utiliser l'isomorphisme (au-dessus de U) de Y au voisinage de ξ_0 , avec un produit $Y' \times Y'' \times Y''' \times Y^{(iv)} \times Z_\alpha$ dans un voisinage $(\xi'_0, \xi''_0, \xi'''_0, \xi_0^{(iv)}, \eta_\alpha)$; voir remarque II dans le §2 de l'Introduction. On doit exhiber une déformation de ξ_0 pour montrer que ξ_0 est dans l'adhérence $\overline{Y - Y_{t_0}}$ de $Y - Y_{t_0}$ (on utilisera, comme $Y - Y_{t_0}$ est un ouvert de Zariski de Y , que l'adhérence de Zariski est confondue avec l'adhérence transcendante).

On peut supposer que le support de tous ces uplets est *un point* et on écrit : $\text{Supp } \xi'_0 = \{M_0\}$, $\text{Supp } \xi''_0 = \{N_0\}$, $\text{Supp } \xi'''_0 = \{Q_0\}$, $\text{Supp } \xi_0^{(iv)} = \{R_0\}$. Fixons les uplets η_α pendant la déformation qu'on cherche. Donc, il reste à exhiber une déformation dans les quatre cas suivants (de façon à prouver $\xi_{t_0} = \lim \xi_t$, $\xi_t \in Y_t$, $t \neq t_0$) :

Premier cas : dans un voisinage du point M_0 . Soit $\varphi=0$ l'équation de la singularité de X^{t_0} en M_0 avec φ dans les germes de fonctions analytiques de deux variables $\mathbf{C}\{x, y\}$ (où (x, y, z) est un système de coordonnées locales en M_0 avec $P = \{Z=0\}$). Quitte à effectuer une transformation de coordonnées, on peut même supposer $\varphi = xy$. Donc, on peut supposer que l'idéal de $X_{\mathcal{P}}^{t_0}$ en M_0 est : (xy, xz, yz, z^2) . Alors pour tout $s = t - t_0$ petit et $g \in \mathbf{C}\{x, y\}$ (où g est l'équation de X^1), $\varphi + sg$ s'écrit comme un produit $F_s G_s$ où $F_s, G_s \in \mathbf{C}\{x, y\}$ sont les équations des deux branches de la déformation X^t de X^{t_0} . Noter que comme $M_0 \in X^0 \cap X^1$, M_0 reste fixe dans cette déformation. Etant donné que X^t est la réunion dans \mathbf{P}^3 des deux branches d'idéal respectivement (F_s, z) et (G_s, z) , il s'ensuit que l'idéal $I(X)$ de X dans l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3 \times \mathbf{C}, (M_0, t_0)}$ est $I(X) = (F_s, z) \cap (G_s, z)$, d'où l'idéal $I(X_{\mathcal{P}})$ de $X_{\mathcal{P}}$ au voisinage de (M_0, t_0) : $I(X_{\mathcal{P}}) = I(X \cup \mathcal{P}) = I(X) \cap I(\mathcal{P}) = I(X) \cap (x, y, z)^2$. En faisant un changement de coordonnées locales $X = F_s(x, y)$, $Y = G_s(x, y)$, $z = z$, $t = t$, on obtient $I(X_{\mathcal{P}}) = (XY, Xz, Yz, z^2)$. Cet idéal étant indépendant de t , il s'ensuit que le schéma relatif $X_{\mathcal{P}}/\mathbf{C}$ est localement un produit dans un voisinage d'un point $(M_0, t_0) \in \mathbf{P}^3 \times \mathbf{C}$. Ainsi Y' est au voisinage de (ξ'_0, t_0) isomorphe à un produit et donc $\xi'_0 \in Y' \setminus Y'_{t_0}$. (On remarquera que les Δ_α n'interviennent pas dans ce cas.) Rappelons enfin que si Z/S est isomorphe à un produit, $\text{Hilb}^k Z/S$ l'est aussi.

Deuxième cas : dans un voisinage du point N_0 . Dans ce cas le théorème de Bertini permet, on l'a vu, de supposer $t_0 = 0$ ou $t_0 = 1$. Supposons $t_0 = 0$. Soit N_0 un point du plan P tel que $N_0 \in \text{Sing } X^0$ et $N_0 \notin \mathcal{P}$. Rappelons que $X_{\mathcal{P}}$ est défini de la manière suivante dans $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{C}$: $X_{\mathcal{P}} = X \cup (\mathcal{P}^{(1)} \times \mathbf{C})$ où X est défini par les équations $f(x, y, t) = tf_1(x, y) + (1-t)f_0(x, y) = 0$ et $z = 0$. En faisant $t = 0$, on obtient l'équation de $X_{\mathcal{P}}^0$: $f(x, y, 0) = f_0(x, y) = 0$. Ensuite, dans un voisinage de N_0 , on peut choisir un autre système de coordonnées analytiques locales de P tel que $N_0 = (0, 0)$ et $f_0(x, y) = xy = 0$. Soit ξ''_0 un k -uplet

de support N_0 contenu dans $X_{\mathcal{P}}^0$. On veut montrer qu'on peut déformer ξ_0'' dans $X_{\mathcal{P}}^t$. Etant donné que $f_0=xy$, alors l'équation locale de $X_{\mathcal{P}}^t$ devient : $tf_1+(1-t)f_0=xy+t(f_1-xy)=0$ où $f_1(0,0)\neq 0$, car X^1 n'est pas supposée passer par N_0 (N_0 est un point singulier de X^0 non dans \mathcal{P}). Donc f_1-xy est une unité u de $\mathbf{C}\{x,y\}$ et l'équation locale de $X_{\mathcal{P}}^t$ devient $xy/(f_1-xy)+t=0$. On peut donc écrire l'équation $XY-t=0$ quitte à transformer xy/u en XY et t en $-t$.

Donc, après changement de coordonnées analytiques locales on peut dire que $X_{\mathcal{P}}^t$ est donné par l'équation $xy=t$. Maintenant si ξ_0'' est un k -uplet quelconque de $X_{\mathcal{P}}^0$ de support $\{N_0\}$, d'après la proposition 4 sur la forme des k -uplets, ξ_0'' a pour idéal

(i) (xy, x^a, y^b) avec $k=a+b-1$,

ou bien

(ii) $(xy, x^a+\beta y^b)$ avec $k=a+b$ et $\beta\neq 0$.

Dans le cas (i), on voit facilement que $(xy, x^a, y^b)=\lim_{\varepsilon\rightarrow 0} I_{\varepsilon}$ où I_{ε} est l'idéal $(xy, x(x^{a-1}-\varepsilon), y(y^{b-1}-\varepsilon))$ de la réunion de $a-1$ points simples sur l'axe des x , $b-1$ points simples sur l'axe des y et de l'origine N_0 . Ces points sont eux-mêmes limite de points dans $X_{\mathcal{P}}^t$: si $u\neq 0$, on a $(u,0)=\lim_{t\rightarrow 0}(u, t/u)$ pour $(0,u)$ avec $u\neq 0$. De même $N_0=(0,0)=\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\lim_{t\rightarrow 0}(\varepsilon, t/\varepsilon)$. Dans le cas (ii), on voit facilement que $(xy, x^a+\beta y^b)=\lim_{\varepsilon\rightarrow 0} I_{\varepsilon}$ où I_{ε} est l'idéal $(xy, x^a+\beta y^{k-a}-\varepsilon)$ est l'idéal de k points simples ; d'où la même conclusion que dans le cas (i). On a ainsi montré $\xi_0''\in\overline{Y''}\setminus Y_0''$.

Troisième cas : dans un voisinage du point Q_0 . Soit toujours $t_0\in U$ et soit Q_0 un point de $X_{\mathcal{P}}^{t_0}\cap\Delta_{\alpha}$ (où α est fixé entre 1 et a). Dans un voisinage de Q_0 , on peut choisir un système de coordonnées analytiques locales (x,y) dans P tel que $Q_0=(0,0)$, $X_{\mathcal{P}}^{t_0} : \{y=0\}$, $\Delta_{\alpha} : \{x=0\}$. Rappelons que l'équation de $X_{\mathcal{P}}$ dans P est : $f(x,y,t)=tf_1(x,y)+(1-t)f_0(x,y)=0$. Vu le choix de nouvelles coordonnées locales que nous avons fait, l'équation de $X_{\mathcal{P}}$ dans un voisinage de Q_0 devient

$$\tilde{f}(x,y,t)=\tilde{f}(x,y,t_0)+(t-t_0)\alpha(x,y,t)=y+(t-t_0)\alpha(x,y,t)=0. \tag{*}$$

Du fait que $\tilde{f}(0,0,t_0)=0$ et $(\partial\tilde{f}/\partial y)(0,0,t_0)=1\neq 0$, le théorème des fonctions implicites montre que l'équation (*) définit une et une seule fonction $\varphi_t(x)$ analytique en t et en x telle que $\tilde{f}(x,\varphi_t(x),t)=0$ pour tout x dans un voisinage de Q_0 . L'équation $y=\varphi_t(x)$ représente alors le schéma $X_{\mathcal{P}}^t$ dans un voisinage de Q_0 .

Soit ξ_0''' un $(k+m_{\alpha})$ -uplet de support $\{Q_0\}$. Par le corollaire 2, ξ_0''' est limite ($\varepsilon\rightarrow 0$) d'un k -uplet ζ_{ε}' dans $X_{\mathcal{P}}^{t_0}$ et d'un m_{α} -uplet ζ_{ε}'' dans Δ_{α} avec $\zeta_{\varepsilon}'\cap\zeta_{\varepsilon}''=\emptyset$, ζ_{ε}' et ζ_{ε}'' ne contenant pas Q_0 . Comme toujours, il faut prouver que ξ_0''' est limite d'un $(k+m_{\alpha})$ -uplet η_t formé d'un k -uplet ζ_t' dans $X_{\mathcal{P}}^t$ ($t\neq t_0$) et d'un m_{α} -uplet ζ_t'' dans Δ_{α} . Etant donné que nos uplets sont contenus dans des courbes lisses, on peut déjà se ramener à des uplets simples et donc au cas où $\text{Supp } \zeta_{\varepsilon}'=\{S_{\varepsilon}\}$ et $\text{Supp } \zeta_{\varepsilon}''=\{T_{\varepsilon}\}$, où S_{ε} (resp. T_{ε}) est un point

de l'axe de x (resp. y) distinct de Q_0 . Alors le point simple S_ε de coordonnées $(x_\varepsilon, 0)$ est limite du point $S_{t,\varepsilon}$ de coordonnées $(x_\varepsilon, \varphi_t(x_\varepsilon))$ car $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t(x_\varepsilon) = 0$. On obtient ainsi $\zeta'_\varepsilon = \lim_{t \rightarrow 0} \zeta'_{t,\varepsilon}$. Evidemment, si on prend $\zeta''_{t,\varepsilon} = \zeta''_\varepsilon$, il s'ensuit que $\lim_{t \rightarrow 0} (\zeta'_{t,\varepsilon} \cup \zeta''_{t,\varepsilon}) = \zeta'_\varepsilon \cup \zeta''_\varepsilon$. L'étude du troisième cas est complète : $\xi'''_0 \in \overline{Y'''' \setminus Y'''_0}$. Remarquer qu'on ne pouvait appliquer la proposition 17, puisque on voulait $t \neq t_0$.

Quatrième cas : dans un voisinage du point R_0 . Soit (x, y) des coordonnées analytiques centrées en R_0 , avec l'axe des x tangent à X^{t_0} en R_0 . L'équation locale de X^t est $y = \varphi_t(x)$ (où φ est une fonction analytique en t et en x). Comme le support du l -uplet $\xi_0^{(iv)}$ est $\{R_0\}$ son idéal est $I(\xi_0^{(iv)}) = (x^l, y - \varphi_{t_0}(x))$. Il est évidemment limite (si $t \rightarrow t_0$) de $I_t = (x^l, y - \varphi_t(x))$. On a donc montré $\xi_0^{(iv)} \in \overline{Y^{(iv)} \setminus Y_0^{(iv)}}$.

Conclusion : du fait qu'on a un isomorphisme (au-dessus de U) d'un voisinage de ξ_0 dans Y avec un voisinage de $(\xi'_0, \xi''_0, \xi'''_0, \xi_0^{(iv)}, \eta_\alpha)$ dans $Y' \times Y'' \times Y''' \times Y^{(iv)} \times Z_\alpha$ on a prouvé que $\xi_0 \in \overline{Y \setminus Y_{t_0}}$ (encore une fois, l'adhérence transcendante est la même que l'adhérence de Zariski). Donc Y vérifie la propriété (H) et ceci termine la démonstration du lemme 4.

Pour la démonstration de la proposition 19 on aura besoin encore d'un lemme. Précisément :

LEMME 5. — *Considérons $Y/U = \Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}/U$ (qui est réduit, rappelons-le, par construction même). Alors les fibres schématiques de Y sont génériquement réduites le long des composantes de dimension $k' = k + m_1 + \dots + m_a$.*

Preuve. — En effet, un k' -uplet général de Y_t est formé (proposition 18) de m_i points généraux sur Δ_i ($1 \leq i \leq \alpha$) et d'un k -uplet dans $X_{\mathcal{P}}^t$ (disjoint des Δ_i). On est donc ramené à montrer l'assertion pour les fibres schématiques de $(\text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}/U)_{\text{red}}$. Mais de l'inclusion de schémas $(\text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}/U)_{\text{red}} \subset \text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}/U$ résulte l'inclusion schématique des fibres

$$((\text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}/U)_{\text{red}})_t \subset (\text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}/U)_t = \text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}^t,$$

la dernière égalité, par définition même du schéma de Hilbert relatif (voir introduction). Or, $\text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}^t$ est génériquement réduit le long de ses composantes de dimension k (proposition 12 (i)). A fortiori $((\text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}/U)_{\text{red}})_t$ est génériquement réduit, puisque son réduit est le même que celui de $\text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}^t$; en effet, pour deux sous-schémas A et B d'un schéma T on a $(A \cap B)_{\text{red}} = A_{\text{red}} \cap B_{\text{red}}$. Ici, dans $T = \text{Hilb}^k \mathbf{P}^3 \times U$, pour $A = \text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}/U$ et $B = p^{-1}(t)$, on trouve $(\text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}^t)_{\text{red}} = (((\text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}^t/U)_{\text{red}})_t)_{\text{red}}$. Ceci prouve le lemme 5.

Démonstration de la proposition 19. — Maintenant, comme Y vérifie (H), par le lemme 4 on a l'équivalence rationnelle entre fibres schématiques de Y : $[Y_0] \sim [Y_t]$ d'où $\{[Y_0]\}_{k'} \sim \{[Y_t]\}_{k'}$, où $k' = k + m_1 + \dots + m_a$. Or, par le lemme 5, la fibre Y_0 (resp. Y_t) est

génériquement réduite le long des composantes de dimension k' . D'où

$$\{[Y_0]\}_{k'} = \{[(Y_0)_{\text{red}}]\}_{k'} = \{[\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}^0]\}_{k'} = [\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0]$$

(la deuxième égalité résultant de la proposition 18 et la troisième de la remarque 11). Idem avec $\{[Y_t]\}_{k'}$. La proposition 19 est donc montrée.

7. Le schéma $\text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0$

Reprenons les notations du numéro 6. Soit \mathcal{P} un ensemble fini de p points de P et soient X^0 et X^1 deux courbes de même degré dans P passant par les points de \mathcal{P} , ayant comme singularités des points doubles ordinaires en \mathcal{P} (c'est-à-dire on suppose que $\mathcal{P} \subset \text{Sing } X^0 \cap \text{Sing } X^1$). De plus, on suppose que les autres singularités de X^0 et de X^1 sont également des points doubles ordinaires, et qu'un point singulier de l'une (en dehors de \mathcal{P}) ne peut être que régulier pour l'autre. On suppose également $\deg X^0 = \deg X^1 = n \geq 2p$ où $p = \text{Card } \mathcal{P}$.

Dans le paragraphe I, on a défini (notations 3) le schéma $\Delta_{\mathcal{P}}(N)$ de la manière suivante. Soit \mathcal{P} un ensemble de p points en position générale (trois à trois non alignés) dans le plan P . Considérons $2p$ (où $p = \text{Card } \mathcal{P}$) droites par ces p points et $N - 2p$ autres droites. Notons $\Delta(N)$ l'ensemble formé par ces N droites et $\mathcal{P}^{(1)}$ le voisinage infinitésimal de \mathcal{P} . Nous avons noté $\Delta_{\mathcal{P}}(N)$ le schéma défini comme la réunion de $\Delta(N)$ et de $\mathcal{P}^{(1)}$. On veut appliquer la proposition 19 au cas suivant : $t=1$, $X_{\mathcal{P}}^1 = \Delta_{\mathcal{P}}(n)$ où $n = \deg X^0$ et $n \geq 2p$ ($p = \text{Card } \mathcal{P}$), dans le but d'exprimer la classe $[\text{Hilb}_*^k X^0]$ comme combinaison linéaire des cycles $C_{j,\sigma}^k$ définis dans le paragraphe I (définition 3).

Voici donc le résultat annoncé dans l'introduction de ce chapitre. Rappelons que si k est un entier, on pose $k' = k + m_1 + \dots + m_a$, que si $e^{m_a} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, le 1 à la m -ième place, alors $e' = e^{m_1} + \dots + e^{m_a}$.

PROPOSITION 20. — Soit $X_{\mathcal{P}}^0$ la fibre du schéma $X_{\mathcal{P}}$ en 0. Notons $n = \deg X^0$ et supposons $n \geq 2p$ où $p = \text{Card } \mathcal{P}$. Soient m_1, \dots, m_a des entiers naturels. Alors, pour tout entier $k \geq 0$, on a, dans $\text{Hilb}_0^{k'} \mathbf{P}^3$, l'égalité des classes d'équivalence rationnelle :

$$[\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0] = \sum_{\substack{j,\sigma \\ 2j+s(\sigma) \leq k}} \binom{p}{j} P_{\sigma}(n-2j) C_{j,\sigma+e'}^{k'}$$

où P_{σ} est le polynôme introduit dans le paragraphe I.

Démonstration. — Comme on disait plus haut, on applique la proposition 19 au cas suivant : $t=1$ et $X_{\mathcal{P}}^1 = \Delta_{\mathcal{P}}(n)$ (qui est défini car $n \geq 2p$). D'après la proposition 19, on a l'égalité entre classes d'équivalence rationnelle dans $\text{Hilb}_0^{k'} \mathbf{P}^3$:

$$[\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_2^{m_2} \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0] = [\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_2^{m_2} \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}_*^k \Delta_{\mathcal{P}}(n)].$$

D'après le théorème 2 du paragraphe I on a l'égalité

$$[\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}_*^k \Delta_{\mathcal{P}}(n)] = \sum_{\substack{j, \sigma \\ 2j+s(\sigma) \leq k}} \binom{p}{j} P_{\sigma}(n-2j) C_{j, \sigma}^{k'} ;$$

d'où l'assertion de la proposition 20.

COROLLAIRE 3. — Soit X^0 une courbe plane et $X_{\mathcal{P}}^0 = X^0 \cup \mathcal{P}^{(1)}$. Notons $n = \text{deg } X^0$ et supposons $n \geq 2p$ où $p = \text{Card } \mathcal{P}$. Alors, pour tout entier $k \geq 0$, on a, dans $\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$, l'égalité des classes d'équivalence rationnelle :

$$[\text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0] = \sum_{\substack{j, \sigma \\ 2j+s(\sigma) \leq k}} \binom{p}{j} P_{\sigma}(n-2j) C_{j, \sigma}^k.$$

Démonstration. — Il suffit de prendre les m_{α} nuls dans la proposition 20, puis de se rappeler $e^0 = 0$ et $\Delta^0 W = W_{\text{red}}$ (remarque 7(ii)). Or ici $W = \text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0$ est réduit par définition (notations 4).

Maintenant, on va généraliser la proposition 20 au cas $n = \text{deg } X^0 < 2p = 2 \text{ Card } \mathcal{P}$. On s'aperçoit que dans ce cas on ne peut pas déformer la courbe $X_{\mathcal{P}}^0$ avec $n = \text{deg } X^0$, en la réunion de $2p$ droites passant par les points M_i où $\mathcal{P} = \{M_1, \dots, M_p\}$ et $n - 2p$ droites par ailleurs ! On va arriver cependant à exprimer pour tout $k \in \mathbf{N}$, le cycle $[\text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0]$ comme combinaison linéaire des cycles $C_{j, \sigma}^k$ en faisant une récurrence sur k . La proposition 21 a donc pratiquement le même énoncé que la proposition 20. Mais d'abord, un lemme.

LEMME 6. — Dans $\text{Hilb}_0^{k'} \mathbf{P}^3$ (définition 2) on a l'égalité des classes

$$[\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}_*^k Y_{\mathcal{P}}^0] = \sum_{i=0}^k [\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \Delta^i \text{Hilb}_*^{k-i} Y_{\mathcal{P}}^0]. \tag{1}$$

Preuve. — Soit $\xi \in \Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}_*^k Y_{\mathcal{P}}^0$. Alors on a : $\xi = \lim(\xi_0 \cup \xi_1 \cup \dots \cup \xi_{\alpha})$ où :

- ξ_0 est un k -uplet standard de $Y_{\mathcal{P}}^0 = X_{\mathcal{P}}^0 \cup \Delta$;
- ξ_{α} sont des m_{α} -uplet de Δ_{α} ($1 \leq \alpha \leq a$).

Alors, on a : $\xi_0 = \lim(\xi'_0 \cup \xi''_0)$ où

- ξ'_0 est un réunion de doublets d_1, \dots, d_i de support un point de \mathcal{P} ;
- ξ''_0 est une réunion de points simple m_1, \dots, m_{k-2i} avec

$$\begin{cases} m_j \in X^0 \setminus \Delta, & 1 \leq j \leq k-2i-r, \\ m_j \in \Delta \setminus X^0, & k-2i-r < j \leq k-2i. \end{cases}$$

Donc $\xi \in \Delta^r \text{Hilb}_*^{k-r} X_{\mathcal{P}}^0$ pour $r=0, \dots, k$ d'où $\xi \in \Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \Delta^r \text{Hilb}_*^{k-r} Y_{\mathcal{P}}^0$. On a donc prouvé l'égalité d'ensembles

$$\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}_*^k Y_{\mathcal{P}}^0 = \bigcup_{i=0}^k \Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}_*^{k-i} Y_{\mathcal{P}}^0.$$

D'où l'assertion du lemme 6, puisque les schémas sont réduits par définition (remarque 7).

PROPOSITION 21. — Soit $X_{\mathcal{P}}^0$ la fibre du schéma $X_{\mathcal{P}}$ en 0. Supposons $n = \deg X^0 \leq 2p$ où $p = \text{Card } \mathcal{P}$. Alors, pour tout entier $k \geq 0$ on a, dans $\text{Hilb}_0^{k'} \mathbf{P}^3$, l'égalité des classes d'équivalence rationnelle :

$$[\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0] = \sum_{\substack{j, \sigma \\ 2j+s(\sigma) \leq k}} \binom{p}{j} P_{\sigma}(n-2j) C_{j, \sigma+e'}^{k'}. \quad (*)$$

Démonstration. — On démontre la proposition 21 par récurrence sur k . Pour $k=0$, vu la convention $\text{Hilb}^0(X) = \{\emptyset\}$, si X est un schéma, il s'agit de voir $[\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \{\emptyset\}] = C_{0, e'}^{m_1 + \dots + m_a}$ où $e' = e^{m_1} + \dots + e^{m_a}$. Par construction même du cycle $C_{0, e'}^{m_1 + \dots + m_a}$ (définition 3) on a l'égalité.

On suppose vraie l'assertion de la proposition 21 pour $k-1, k-2, \dots, 2, 1$. Passons au stade k . Comme $n \leq 2p$, posons $l = 2p - n$. Nous allons montrer le résultat pour k , par récurrence sur l . Le cas $l=0$ est connu (proposition 20). Passons du stade l au stade $l+1$. Dans le plan P , considérons une autre droite Δ , choisie générale par rapport à X^0 (coupant X^0 transversalement en des points non-singuliers) et par rapport à $\Delta_1, \dots, \Delta_a$. Notons Y^0 le schéma suivant : $Y^0 = Y_{\mathcal{P}}^0 \cup \Delta$. Alors, $Y_{\mathcal{P}}^0 = X_{\mathcal{P}}^0 \cup \Delta$.

Le terme de gauche dans la formule (1) du lemme 6 est le même que le terme de gauche dans l'énoncé de la proposition 21, appliquée au cas $Y_{\mathcal{P}}^0$. Etant donné que $2p - (\deg Y^0) = 2p - (n+1) = (2p - n) - 1 = l - 1$, par hypothèse de récurrence (sur l'entier l) l'assertion (*) de la proposition 21 est valable pour Y^0 . Soit, comme ici $\deg Y^0 = n+1$:

$$[\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}_*^k Y_{\mathcal{P}}^0] = \sum_{\substack{j, \sigma \\ 2j+s(\sigma) \leq k}} \binom{p}{j} P_{\sigma}(n+1-2j) C_{j, \sigma+e'}^{k'}$$

(où $k' = k + m_1 + \dots + m_a$ et $e' = e^{m_1} + \dots + e^{m_a}$).

Par la formule $P_{\sigma}(M+1) = P_{\sigma}(M) + \sum_{i=1}^{\infty} P_{\sigma-e^i}(M)$ (proposition 2), on a

$$P_{\sigma}(n+1-2j) = P_{\sigma}(n-2j) + \sum_{i=1}^{\infty} P_{\sigma-e^i}(n-2j).$$

Donc

$$\begin{aligned}
 [\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}_*^k Y_{\mathcal{P}}^0] &= \sum_{\substack{j, \sigma \\ 2j+s(\sigma) \leq k}} \binom{p}{j} P_{\sigma}(n-2j) C_{j, \sigma+e'}^{k'} \\
 &+ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{j, \sigma \\ 2j+s(\sigma) \leq k}} \binom{p}{j} P_{\sigma-e^i}(n-2j) C_{j, \sigma+e'}^{k'}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Mais par ailleurs, cette fois par l'hypothèse de récurrence (sur k) au stade $k-r$, appliquée aux $a+1$ droites $\Delta, \Delta_1, \dots, \Delta_a$, on a, pour $r \geq 1$:

$$[\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \Delta^r \text{Hilb}_*^{k-r} X_{\mathcal{P}}^0] = \sum_{\substack{j, \sigma \\ 2j+s(\sigma) \leq k-r}} \binom{p}{j} P_{\sigma}(n-2j) C_{j, \sigma+e^r+e'}^{k'}. \tag{2}$$

(Noter qu'ici $(k-r)'$ donne $k-r+m_a+\dots+m_1+1=k'$.)

Le lemme 6 donne la différence suivante :

$$[\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0] = [\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}_*^k Y_{\mathcal{P}}^0] - \sum_{r=1}^k [\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \Delta^r \text{Hilb}_*^{k-r} X_{\mathcal{P}}^0].$$

Si l'on remplace (1) et (2) par leurs valeurs, cette différence est :

$$\begin{aligned}
 [\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0] &= \left(\sum_{\substack{j, \sigma \\ 2j+s(\sigma) \leq k}} \binom{p}{j} P_{\sigma}(n-2j) C_{j, \sigma+e'}^{k'} \right. \\
 &+ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{j, \sigma \\ 2j+s(\sigma) \leq k}} \binom{p}{j} P_{\sigma-e^i}(n-2j) C_{j, \sigma+e'}^{k'} \left. \right) \\
 &- \sum_{r=1}^k \sum_{\substack{j, \sigma \\ 2j+s(\sigma) \leq k-r}} \binom{p}{j} P_{\sigma}(n-2j) C_{j, \sigma+e^r+e'}^{k'}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Pour $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$ on a défini (paragraphe I) la somme $s(\sigma)$ de σ en posant $s(\sigma) = \sum_{i=1}^{\infty} i\sigma_i$ d'où la formule évidente $s(\sigma+e^m) = s(\sigma) + m$. Alors, si on pose (ce qui est possible car $\sigma \in \mathbf{Z}(\mathbf{N}^*)$) $\tau = \sigma - e^i$ on a $s(\sigma) = s(\tau) + i$. Maintenant, si on remplace σ et $s(\sigma)$ dans les deux derniers termes du membre de droite de (3) on obtient :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{j, \sigma \\ 2j+s(\sigma) \leq k}} \binom{p}{j} P_{\sigma-e^i}(n-2j) C_{j, \sigma+e'}^{k'} - \sum_{r=1}^k \sum_{\substack{j, \sigma \\ 2j+s(\sigma) \leq k-r}} \binom{p}{j} P_{\sigma}(n-2j) C_{j, \sigma+e^r+e'}^{k'} \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{j, \tau \\ 2j+s(\tau) \leq k-i}} \binom{p}{j} P_{\tau}(n-2j) C_{j, \tau+e^i+e'}^{k'} - \sum_{r=1}^k \sum_{\substack{j, \sigma \\ 2j+s(\sigma) \leq k-r}} \binom{p}{j} P_{\sigma}(n-2j) C_{j, \sigma+e^r+e'}^{k'}.
 \end{aligned}$$

Et si l'on fait $i=r$ et $\tau=\sigma$ on s'aperçoit que cette dernière différence est nulle; on remarque qu'en effet i varie entre 1 et k , car pour $i>k$ on a $k-i<0$, d'où $s(\tau)<0$; dont τ a au moins une composante <0 , et par définition $P_\tau(M)=0$. D'où, toujours par (3) (où, on vient de le voir, les deux derniers termes s'annulent) on a l'égalité des classes d'équivalence rationnelle dans $\text{Hilb}_0^{k'} \mathbf{P}^3$:

$$[\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0] = \sum_{\substack{j,\sigma \\ 2j+s(\sigma)\leq k}} \binom{p}{j} P_\sigma(n-2j) C_{j,\sigma+e'}^{k'}$$

et la récurrence sur l est complète. La proposition 21 est donc démontrée.

Maintenant, on peut résumer les propositions 20 et 21 dans une seule proposition qui nous permet entre autres d'exprimer la classe $[\text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0]$ comme combinaison linéaire des cycles $C_{j\sigma}^k$.

PROPOSITION 22. — Soient a droites $\Delta_1, \dots, \Delta_a$ en position générale dans P . Soit $X_{\mathcal{P}}^0$ la fibre du schéma $X_{\mathcal{P}}$ en 0. Soit $n=\text{deg } X^0$ et $p=\text{Card } \mathcal{P}$ (n et p quelconques). Alors pour tout entier $k \geq 0$ on a dans $\text{Hilb}_0^{k'} \mathbf{P}^3$ l'égalité des classes d'équivalence rationnelle :

$$[\Delta_a^{m_a} \dots \Delta_1^{m_1} \text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0] = \sum_{\substack{j,\sigma \\ 2j+s(\sigma)\leq k}} \binom{p}{j} P_\sigma(n-2j) C_{j,\sigma+e'}^{k'}$$

Comme corollaire (avec $m_1=m_2=\dots=m_a=0$), en utilisant la remarque 7(ii), notation 4 et la proposition 13, on a le théorème principal du paragraphe II :

THÉORÈME 3. — Soit $X_{\mathcal{P}}^0$ la fibre du schéma $X_{\mathcal{P}}$ en 0 (c'est-à-dire $X_{\mathcal{P}}^0$ est la réunion d'une courbe X^0 du plan P , passant par les p points de \mathcal{P} , et du voisinage infinitésimal $\mathcal{P}^{(1)}$ des points de \mathcal{P}). Soit $n=\text{deg } X^0$ et $p=\text{Card } \mathcal{P}$ (n et p quelconques).

Alors, pour tout entier $k \geq 0$ on a dans $\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$ l'égalité des classes d'équivalence rationnelle :

$$\{[\text{Hilb}^k X_{\mathcal{P}}^0]\}_k = [\text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0] = \sum_{\substack{j,\sigma \\ 2j+s(\sigma)\leq k}} \binom{p}{j} P_\sigma(n-2j) C_{j,\sigma}^k$$

où $\{\cdot\}_k$ désigne la partie de dimension k d'un cycle et où P_σ désigne le polynôme numérique introduit en §I.1.

III. La classe $[\text{Hilb}^k C]$

Dans ce paragraphe, on veut appliquer les résultats des paragraphes précédents pour exprimer la classe $[\text{Hilb}^k C]$ du schéma des k -uplets d'une courbe lisse $C \subset \mathbf{P}^3$, comme

combinaison linéaire des cycles $C_{j,\sigma}^k$ définis au paragraphe I. Comme corollaire de ce résultat, on obtient un théorème qui permet :

(i) de justifier la méthode fonctionnelle (cf. Introduction de cet article),

et plus précisément

(ii) d'affirmer que les formules énumératives k -sécantes dans le cas d'une courbe C de degré n et de genre g dans \mathbf{P}^3 , sont des polynômes en n et g de degré au plus k en n et $[\frac{1}{2}k]$ en g (où $[\cdot]$ désigne la partie entière).

8. Le schéma $\text{Hilb}^k C$

Dans tout ce qui suit, C est une courbe lisse de \mathbf{P}^3 , non nécessairement connexe, de degré n avec h points doubles apparents, c'est-à-dire h est le nombre de croisements normaux d'une projection X^0 de C sur un plan générique P de \mathbf{P}^3 par un point général ω . (Autrement dit h est le nombre de cordes de C par ω .) En vue de connaître le schéma $\text{Hilb}^k C$ ou plutôt la classe $[\text{Hilb}^k C]$ dans $\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$ (définition 2) on cherche un schéma Y tel que :

(i) on ait l'égalité $[\text{Hilb}^k C] = [\text{Hilb}^k Y]$ des classes d'équivalence rationnelle dans $\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$,

(ii) on puisse donner une expression simple, explicite, de la classe $[\text{Hilb}^k Y]$.

On verra que la recherche d'un tel schéma Y et la connaissance de la classe $[\text{Hilb}^k Y]$ sont très liés à l'étude de la classe $[\text{Hilb}_*^k X_{\mathcal{P}}^0]$ faite dans le paragraphe précédent. On commence en rappelant le résultat suivant.

PROPOSITION 23. — Avec les notations ci-dessus, il existe un sous-schéma réduit et irréductible Γ de $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{C}$, plat sur \mathbf{C} avec $\Gamma_1 = C$ et $(\Gamma_0)_{\text{red}} = X^0$; de plus Γ_0 est la réunion de X^0 et des voisinages infinitésimaux à l'ordre 1 (dans \mathbf{P}^3) des points doubles de X^0 . Si on note $\mathcal{P} = \{M_i\}_{1 \leq i \leq h}$ l'ensemble des points doubles de X^0 et $\mathcal{P}^{(1)}$ le premier voisinage infinitésimal de \mathcal{P} alors on a l'égalité (au sens des schémas) $\Gamma_0 = X^0 \cup \mathcal{P}^{(1)}$.

En effet, (cf. [10, III, Exemple 9.8.3]) le schéma Γ/\mathbf{C} est par définition l'adhérence dans $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{C}$ du sous-schéma de $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{C}^*$ image du plongement de $C \times \mathbf{C}^*$ dans $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{C}^*$ défini par $([x:y:z:t], \lambda) \mapsto ([x:y:\lambda z:t], \lambda)$.

Le schéma Γ_0 est donc un cas particulier de schéma $X_{\mathcal{P}}^0$ (définition 4), avec $\mathcal{P} = \text{Sing } \Gamma_0$ et $p = \text{Card } \mathcal{P} = h$. Dans [18, p. 175], on montre que $\Gamma_0 = X^0 \cup \mathcal{P}^{(1)}$.

En vue d'étudier le schéma relatif $\text{Hilb}^k \Gamma/\mathbf{C}$, on définit d'abord le schéma relatif \mathfrak{X}/\mathbf{C} , par la définition suivante.

Définition 13. — Dans $\mathbf{C}_{x,y,z}^3 \times \mathbf{C}_\lambda$ on considère la réunion \mathfrak{X} des deux plans affines d'équations $x = z + \lambda = 0$ et $y = z - \lambda = 0$.

On considère \mathfrak{X} comme un schéma relatif sur \mathbf{C} par la projection $(x, y, z, \lambda) \mapsto \lambda$. L'idéal $I(\mathfrak{X})$ de \mathfrak{X} est alors $I(\mathfrak{X}) = (x, z + \lambda) \cap (y, z - \lambda)$ car l'idéal d'une réunion est l'intersection des idéaux. D'où, comme $x, y, z + \lambda, z - \lambda$, sont des coordonnées de \mathbf{C}^4 , on a $I(\mathfrak{X}) = (x, z + \lambda) \cap (y, z - \lambda) = (x, z + \lambda) \cdot (y, z - \lambda) = (xy, x(z - \lambda), y(z + \lambda), z^2 - \lambda^2)$. La fibre \mathfrak{X}_λ dans \mathbf{C}^3 est alors la réunion des deux droites disjointes d'équations : $x = z + \lambda = 0$ et $y = z - \lambda = 0$, que l'on notera respectivement $D_{-\lambda}$ et D_λ . La fibre \mathfrak{X}_0 de \mathfrak{X} en 0 a pour idéal $I(\mathfrak{X}_0) = (xy, xz, yz, z^2)$ dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^3}$. Ce schéma \mathfrak{X}_0 est la réunion schématique des deux axes de coordonnées dans le plan $\{z=0\}$ et du voisinage infinitésimal à l'ordre 1 (dans \mathbf{P}^3) de l'origine 0 ; c'est le schéma \mathfrak{X}_0 déjà étudié dans le paragraphe I (cf. définition 7).

Remarque 13. — Dans [19, p. 124], on montre que le schéma $\text{Hilb}^k \Gamma / \mathbf{C}$ n'est pas plat sur \mathbf{C} ; par contre le schéma $\text{Hilb}^k \Gamma / \mathbf{C}^*$ est plat sur \mathbf{C}^* , puisque Γ / \mathbf{C}^* est isomorphe à un produit $C \times \mathbf{C}^*$ (par construction de Γ), donc $\text{Hilb}^k \Gamma / \mathbf{C}^* \simeq \text{Hilb}^k C \times \mathbf{C}^*$.

La proposition suivante se trouve dans [11].

PROPOSITION 24 (Hartshorne). — *Soit M un schéma ; soit S une courbe lisse et S^* un ouvert. Si Z est un sous-schéma réduit de $M \times S^*$, plat sur S^* , alors l'adhérence \bar{Z} dans $M \times S$ est plate sur Z .*

Notation 10. — On notera Z le sous-schéma $\text{Hilb}^k \Gamma / \mathbf{C}^*$ de $\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3 \times \mathbf{C}^*$.

On va appliquer la proposition 24 au schéma Z défini ci-dessus.

PROPOSITION 25. — *Si on pose $M = \text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$, $S = \mathbf{C}$, $S^* = \mathbf{C}^*$ et $Z = \text{Hilb}^k \Gamma / \mathbf{C}^* \subset \text{Hilb}^k \Gamma / \mathbf{C}$ alors on conclut que \bar{Z} est plat sur \mathbf{C} .*

Démonstration. — Z est isomorphe au produit $\text{Hilb}^k C \times \mathbf{C}^*$ (cf. remarque 13) et donc Z est plat sur \mathbf{C}^* . De plus, Z est réduit car $\text{Hilb}^k C$ est lisse, donc réduit.

On va énoncer un résultat important, dont la démonstration, élémentaire, est fastidieuse encore une fois.

THÉORÈME 4. — *Soit ξ_0 un k -uplet dans la fibre \mathfrak{X}_0 de \mathfrak{X} (définition 7) en 0, de support l'origine. Alors (en utilisant la classification de ξ_0 donnée par la proposition 5) ξ_0 est limite de k -uplets ξ_λ dans les fibres \mathfrak{X}_λ avec $\lambda \neq 0$ si et seulement si l'idéal de ξ_0 est de l'une des trois formes :*

- (i) (xy, x^a, y^b, z) avec $a + b = k + 1$,
- (ii) $(xy, x^a + \beta y^b, z)$ avec $a + b = k$ et $\beta \neq 0$,
- (iii) $(xy, xz, yz, z^2, x^a + cz, y^b + c'z)$ avec $a + b = k$ (c et c' quelconques).

Autrement dit, si et seulement si ξ_0 est standard (proposition 6).

Comme conséquence du théorème 4, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 26. — *Un k -uplet $\xi_0 \in \text{Hilb}^k \Gamma_0$ (où Γ_0 est la fibre en 0 de Γ/\mathbf{C}) est dans la fibre $(\bar{Z})_0$ de \bar{Z} si et seulement si il est standard dans Γ_0 .*

Preuve. — Soit $\xi_0 \subset \Gamma_0$ de support M , l'un des points-doubles de Γ_0 . D'après ([18, proposition 1]), on a un isomorphisme (analytique) $(\Gamma, M) \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{X}, 0)$ de germes de schémas relatifs au-dessus de \mathbf{C} . Par ailleurs, par définition de \bar{Z} , on a $\xi_0 \subset (\bar{Z})_0$ si et seulement si ξ_0 est limite de k -uplets $\xi_\lambda \subset \Gamma_\lambda$ avec $\lambda \neq 0$. Le théorème 4 montre alors (via l'isomorphisme ci-dessus) que c'est équivalent à ξ_0 standard dans Γ_0 .

Comme corollaire de la proposition 25, on a la

PROPOSITION 27. — *On a dans $\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$ l'équivalence rationnelle*

$$[\text{Hilb}^k C] \sim [\text{Hilb}_*^k \Gamma_0].$$

Preuve. — (i) On a $((\bar{Z})_0)_{\text{red}} = (\text{Hilb}_*^k \Gamma_0)_{\text{red}}$ par la proposition 26 (et notations 4). Par ailleurs on a les inclusions de schémas $Z = \text{Hilb}^k \Gamma/\mathbf{C}^* \subset \text{Hilb}^k \Gamma/\mathbf{C}$, et comme $\text{Hilb}^k \Gamma/\mathbf{C}$ est fermé dans $\text{Hilb}^k \mathbf{P}^3 \times \mathbf{C}$ on a l'inclusion schématique $\bar{Z} \subset \text{Hilb}^k \Gamma/\mathbf{C}$. En particulier, on a l'inclusion schématique :

(ii) $(\bar{Z})_0 \subset (\text{Hilb}^k \Gamma/\mathbf{C})_0 = \text{Hilb}^k \Gamma_0$. Comme $\text{Hilb}^k \Gamma_0$ est génériquement réduit le long de chacune des composantes de $\text{Hilb}_*^k \Gamma_0$ (cf. remarque 13 et proposition 14 (i)), a fortiori $(\bar{Z})_0$ est génériquement réduit aussi, vu (i) et l'inclusion (ii).

On en déduit l'égalité des cycles de $\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$: $[(\bar{Z})_0] = [\text{Hilb}_*^k \Gamma_0]$. Or le schéma \bar{Z} est plat sur \mathbf{C} , de dimension relative 1. D'après [7, théorème 1.7], on a l'équivalence rationnelle dans $\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$: $[(\bar{Z})_1] = [(\bar{Z})_0]$. Mais

$$[(\bar{Z})_0] = [\text{Hilb}_*^k \Gamma_0] \quad \text{et} \quad (\bar{Z})_1 = Z_1 = (\text{Hilb}^k \Gamma/\mathbf{C}^*)_1 = \text{Hilb}^k \Gamma_1 = \text{Hilb}^k C$$

d'où le résultat. D'après le théorème principal (théorème 3) du paragraphe II on a, puisque $p=h$ dans notre cas :

THÉORÈME 5. — *Pour tout entier $k \geq 0$ il existe des cycles $C_{j,\sigma}^k$ de $\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$ tels que pour toute courbe lisse $C \subset \mathbf{P}^3$ de degré n avec h points doubles apparents on ait l'égalité des classes d'équivalence rationnelle dans $\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$:*

$$[\text{Hilb}^k C] = \sum_{\substack{j,\sigma \\ 2j+s(\sigma) \leq k}} \binom{h}{j} P_\sigma(n-2j) C_{j,\sigma}^k.$$

(où les P_σ sont les polynômes numériques donnés par la définition 1).

Démonstration. — On a vu à la proposition 23 que le schéma Γ_0 coïncide avec le schéma $X_{\mathcal{P}}^0$ pour $\mathcal{P} = \text{Sing } \Gamma_0$, donc $\text{Card } \mathcal{P} = h$. D'après la proposition 27 et le théorème 3, il vient l'égalité de l'énoncé.

Une conséquence importante du théorème 5 est le

COROLLAIRE 4. — Soit V une variété complète non singulière ; soit $f: V \rightarrow \text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$ un morphisme localement intersection complète et $f^*: \text{CH}(\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3) \rightarrow \text{CH}(V)$ le morphisme associé entre groupes de Chow. Alors pour tout cycle a de dimension $2k$ dans V et pour toute courbe lisse C de degré n dans \mathbf{P}^3 avec h points doubles apparents, le degré du zéro-cycle $a \cdot f^*[\text{Hilb}^k C]$ est de la forme

$$\text{deg}(a \cdot f^*[\text{Hilb}^k C]) = \sum_{0 \leq j \leq [k/2]} \binom{h}{j} Q_{k-2j}(n)$$

où Q_m est un polynôme numérique de degré $\leq m$. ($[\cdot]$ désigne la partie entière.)

Démonstration. — C'est une conséquence du théorème 5 et du fait que f^* est un morphisme de groupes. On pose

$$Q_{k-2j}(n) = \sum_{s(\sigma) \leq k-2j} P_\sigma(n-2j) \text{deg}(a \cdot f^* C_{j,\sigma}^k);$$

or $\text{deg } P_\sigma = l(\sigma) \leq s(\sigma) \leq k-2j$ (notations 1).

Remarques 14. — (i) On remarque que $Q_k(0) = 0$. En effet, pour $j=0$ et $n=0$ on a $Q_k(0) = \sum_{s(\sigma) \leq k} P_\sigma(0) \text{deg}(a \cdot f^* C_{0,\sigma}^k) = 0$ car $P_\sigma(0) = 0$: si $\sigma \neq 0$, notons $r = \min\{i \in \mathbf{N}^* : \sigma_i \neq 0\}$, alors $P_\sigma(M) = \binom{M}{\sigma_r} \binom{M-\sigma_r}{\sigma_{r+1}} \dots$ et donc $P_\sigma(0) = 0$. Si par contre $\sigma = e^0 = 0$, on a : $C_{0,0}^k = \emptyset$ (définition 3 (b)).

(ii) Les polynômes $Q_r(n)$ sont des polynômes numériques, c'est-à-dire $Q_r(z) \in \mathbf{Z}$ si $z \in \mathbf{Z}$, d'où (cf. [10, chapitre I, p. 49]) il existe $c_{ij} \in \mathbf{Z}$ tels que

$$Q_{k-2j}(n) = \sum_{0 \leq i \leq k-2j} c_{ij} \binom{n}{i}.$$

D'après la remarque (i) on a $c_{00} = Q_k(0) = 0$, car $\binom{0}{0} = 1$ (cf. Conventions à la définition 1). Donc on peut écrire le degré du zéro-cycle $a \cdot f^*[\text{Hilb}^k C]$ sous la forme

$$\text{deg}(a \cdot f^*[\text{Hilb}^k C]) = \sum_{0 \leq j \leq [k/2]} \sum_{0 \leq i \leq k-2j} c_{ij} \binom{h}{j} \binom{n}{i}$$

avec $c_{ij} \in \mathbf{Z}$ et $c_{00} = 0$.

Le corollaire 3 se généralise à \mathbf{P}^N de la façon suivante :

THÉORÈME 6. — Soit V une variété complète non singulière ; soit $f: V \rightarrow \text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^N$ (où $N \leq 3$) un morphisme localement intersection complète et $f^*: \text{CH}(\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^N) \rightarrow \text{CH}(V)$ le morphisme associé entre groupes de Chow. Alors pour tout cycle a de dimension $2k$

dans V et pour toute courbe lisse C de degré n dans \mathbf{P}^N avec h points doubles apparents (par la projection d'un \mathbf{P}^{N-3}), le degré du zéro-cycle $a \cdot f^*[\text{Hilb}^k C]$ est de la forme

$$\deg(a \cdot f^*[\text{Hilb}^k C]) = \sum_{0 \leq j \leq [k/2]} \binom{h}{j} R_{k-2j}(n),$$

où les R_m sont des polynômes numériques de degré $\leq m$.

Démonstration. — Soit $p: \mathbf{P}^N \rightarrow \mathbf{P}^3$ la projection par un \mathbf{P}^{N-3} disjoint de C . Soit \hat{C} la courbe dans \mathbf{P}^3 projection de C ; elle est de degré \hat{n} avec \hat{h} points doubles apparents. On remarque que $n = \hat{n}$ et $h = \hat{h}$. Soit $\varphi: \text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3 \hookrightarrow \text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^N$ l'injection canonique et $\varphi_*: \text{CH}(\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3) \rightarrow \text{CH}(\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^N)$ le morphisme (« image directe ») associé entre groupes de Chow. Alors on a (cf. théorème 5)

$$[\text{Hilb}^k \hat{C}] = \sum_{\substack{j, \sigma \\ 2j + s(\sigma) \leq k}} \binom{h}{j} P_\sigma(n-2j) C_{j, \sigma}^k.$$

Le procédé de Hartshorne, (cf. [10, chapitre III, p. 259]) qu'on a déjà utilisé (cf. proposition 23), montre qu'on a l'égalité $[\text{Hilb}^k C] = \varphi_*[\text{Hilb}^k \hat{C}]$ dans $\text{CH}(\text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^N)$, car \hat{C} n'acquiert pas de singularité par projection de C . D'où le degré du zéro-cycle :

$$\begin{aligned} \deg(a \cdot f^*[\text{Hilb}^k C]) &= \deg \sum_{0 \leq j \leq [k/2]} \sum_{s(\sigma) \leq k-2j} \binom{h}{j} P_\sigma(n-2j) a \cdot f^* \varphi_* C_{j, \sigma}^k \\ &= \sum_{0 \leq j \leq [k/2]} \binom{k}{j} R_{k-2j}(n) \end{aligned}$$

où l'on pose $R_{k-2j}(n) = \sum_{s(\sigma) \leq k-2j} P_\sigma(n-2j) \deg(a \cdot f^* \varphi_* C_{j, \sigma}^k)$.

Remarque 15. — On appellera *méthode fonctionnelle* (cf. Introduction à ce travail) la méthode qui consiste à supposer que toute formule k -sécante pour une courbe lisse $C \subset \mathbf{P}^N$ est *a priori* fonction seulement des invariants projectifs de la courbe : le degré de C et le nombre de points doubles apparents de C sur un \mathbf{P}^2 général de \mathbf{P}^N . Le théorème 6 permet :

(i) de justifier la méthode fonctionnelle, c'est-à-dire d'affirmer que les formules énumératives, relativement au cas d'une courbe C de degré n avec h points doubles apparents dans \mathbf{P}^N sont fonction seulement de n et h ;

(ii) de donner l'expression d'une formule k -sécante à une courbe. Plus précisément, le théorème 6 montre qu'une formule k -sécante est un polynôme en n et h de degré au plus k en n et $[\frac{1}{2}k]$ en h .

9. Applications énumératives du théorème 6

Voyons une application concrète du théorème 6. D'autres applications énumératives du théorème 6 seront données dans un autre travail. Cherchons par exemple le nombre de coniques qui rencontrent une courbe lisse C (de degré n dans \mathbf{P}^3 avec h points doubles apparents) en k points et qui vérifient d'autres conditions par ailleurs. Construisons d'abord la variété V pour laquelle on utilisera le théorème 6. Dans tout ce qui suit on suppose $1 \leq k \leq 8$. Soit $\mathcal{U} \subset \mathbf{P}^3 \times \check{\mathbf{P}}^3$ le plan universel (ou tautologique) défini de la manière suivante : $(M, P) \in \mathcal{U} \Leftrightarrow M \in P$. On le considère comme schéma relatif sur $\check{\mathbf{P}}^3$. Soit $\text{Hilb}^k(\mathcal{U}/\check{\mathbf{P}}^3)$ de dimension totale $2k+3$, le schéma de Hilbert relatif, lisse sur $\check{\mathbf{P}}^3$ (en effet $(\mathcal{U}/\check{\mathbf{P}}^3)$ est une fibration de fibre \mathbf{P}^2 , donc $\text{Hilb}^k(\mathcal{U}/\check{\mathbf{P}}^3)$ est une fibration de fibre $\text{Hilb}^k \mathbf{P}^2$, qui est non-singulière ([6])). Par ailleurs, soit K l'espace des coniques de \mathbf{P}^3 (de dimension 8) et $p: K \rightarrow \check{\mathbf{P}}^3$ le morphisme qui envoie une conique Γ sur son plan ; c'est une fibration de fibre \mathbf{P}^5 .

Définition 14. — Notons V la variété $p^*\text{Hilb}^k(\mathcal{U}/\check{\mathbf{P}}^3)$ formée des triplets (P, Γ, ξ) où Γ est une conique du plan P et $\xi \subset P$ un k -uplet. On a $\dim V = 2k+8$.

Remarque 16. — V est une variété non-singulière. Pour le voir, considérons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} V = p^*\text{Hilb}^k(\mathcal{U}/\check{\mathbf{P}}^3) & \longrightarrow & \text{Hilb}^k(\mathcal{U}/\check{\mathbf{P}}^3) \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \pi \\ K & \xrightarrow{p} & \check{\mathbf{P}}^3 \end{array}$$

Alors γ est un morphisme lisse par changement de base, car π est lisse ; or K est non-singulier d'où V non-singulière. Notons $f: V \rightarrow \text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$ le morphisme $(P, \Gamma, \xi) \mapsto \xi$.

Remarque 17. — En fait f est à valeurs dans l'ouvert non-singulier (cf. [6]) $\text{Hilb}_s^k \mathbf{P}^3 \subset \text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$ des k -uplets superficiels de \mathbf{P}^3 (c'est-à-dire des k -uplets ξ tels que $\dim_M T\xi \leq 2$ pour tout $M \in \text{Supp } \xi$).

Définition 15. — Dans $V = p^*\text{Hilb}^k(\mathcal{U}/\check{\mathbf{P}}^3)$ soit $\text{Coc}^k \mathbf{P}^3$ la sous-variété d'incidence, de dimension $k+8$, des (P, Γ, ξ) tels que $\xi \subset \Gamma$ au sens des schémas (« Coc » pour k -uplets « coconiques »). Soit $j: \text{Coc}^k \mathbf{P}^3 \hookrightarrow V$ l'injection canonique.

On appliquera le théorème 6 à la situation suivante :

- $V = p^*\text{Hilb}^k(\mathcal{U}/\check{\mathbf{P}}^3)$;
- $f: (P, \Gamma, \xi) \mapsto \xi \in \text{Hilb}_0^k \mathbf{P}^3$;
- $a = j_*(1) \cdot \gamma^*(\alpha)$ où $\alpha \in A^{8-k}(K)$.

Dans ces conditions on peut retrouver les formules relatives aux coniques k -sécantes ($1 \leq k \leq 8$) à une courbe lisse de \mathbf{P}^3 (Berzolari et Severi). Voyons un exemple.

Exemple 2. — Cherchons le nombre des coniques 8-sécantes à une courbe lisse C (de degré n avec h points doubles apparents) dans \mathbf{P}^3 . On pose $a = j_*(1)$. Alors d'après le théorème 6 le degré du zéro-cycle $a \cdot f^*[\text{Hilb}^8 C]$ (où f est le morphisme défini ci-dessus) est de la forme :

$$\deg(a \cdot f^*[\text{Hilb}^8 C]) = \binom{h}{4} P_0(n) + \binom{h}{3} P_2(n) + \binom{h}{2} P_4(n) + h P_6(n) + P_8(n)$$

(où les P_i sont des polynômes numériques en n de degré $\leq i$). Le degré de ce 0-cycle représente le « nombre de coniques 8-sécantes à C ». Par des calculs assez élémentaires, on trouve alors explicitement (cf. [26, p. 788]) :

$$\begin{aligned} \deg(a \cdot f^*[\text{Hilb}^8 C]) &= \binom{h}{3} \left[\binom{n}{2} - 6n + 21 \right] + \binom{h}{2} \left[-2 \binom{n}{4} + 16 \binom{n}{2} - 56n + 126 \right] \\ &+ h \left[3 \binom{n}{6} + 21 \binom{n}{5} - 32 \binom{n}{4} + 15 \binom{n}{3} + 30 \binom{n}{2} - 98n + 189 \right] \\ &+ 8 \binom{n}{8} - 91 \binom{n}{7} - 75 \binom{n}{6} + 100 \binom{n}{5} - 80 \binom{n}{4} + 57 \binom{n}{3} - 39 \binom{n}{2} + 20n. \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] BERZOLARI, L., Sulle coniche appoggiate in più punti a date curve algebriche (1). *Rend. del R. Istit. Lomb. di Sci. e Lett. (2)*, 33 (1900), 664–674.
- [2] — Sulle coniche appoggiate in più punti a date curve algebriche (2). *Rend. del R. Istit. Lomb. di Sci. e Lett. (2)*, 33 (1900), 809–821.
- [3] BRIANÇON, J., Description de $\text{Hilb}^n \mathbf{C}\{x, y\}$. *Invent. Math.*, 41 (1977), 45–89.
- [4] CASTELNUOVO, G., Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 3 (1889), 27–37.
- [5] CAYLEY, A., On the skew surfaces, otherwise scrolls. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 153 (1863), 453–483; *Collected Mathematical Papers*, Vol. 5, pp. 168–220.
- [6] FOGARTY, J., Algebraic families on an algebraic surface. *Amer. J. Math.*, 90 (1968), 511–521.
- [7] FULTON, W., *Intersection Theory*. *Ergeb. Math. Grenzgeb. (3)*, 2. Springer-Verlag, 1984.
- [8] GRANGER, M., Géométrie des schémas de Hilbert ponctuels. *Mém. Soc. Math. France*, 8 (1983), 1–76.
- [9] GROTHENDIECK, A., Les schémas de Hilbert. *Séminaire Bourbaki*, exposé 221. IHP, Paris, 1961.
- [10] HARTSHORNE, R., *Algebraic Geometry*. *Graduate Texts in Math.*, Springer-Verlag, 1977.
- [11] — Connectedness of the Hilbert scheme. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 29 (1966), 5–48.
- [12] IAROBINO, A., Reducibility of the families of 0-dimensional schemes on a variety. *Invent. Math.*, 15 (1978), 145–188.
- [13] — Hilbert scheme of points: Overview of last ten years, dans *Proc. Sympos. Pure Math.*, 46:2. Bowdoin, 1987.

- [14] KLEIMAN, S., Chasles' enumerative theory of conics: a historical introduction, dans *Studies in Algebraic Geometry* (A. Seidenberg, ed.), pp. 117–138. MAA Stud. Math., 20. Math. Assoc. America, Washington, D.C., 1980.
- [15] — Problem 15: Rigorous foundation of Schubert's enumerative calculus, dans *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*, pp. 445–482. Proc. Sympos. Pure Math., 28. Amer. Math. Soc., Providence, 1976.
- [16] LARRI, G., La classe rationnelle des schémas de Hilbert des courbes planes ou gauches. Thèse, Univ. Nice, 1986.
- [17] LE BARZ, P., Validité de certaines formules de géométrie énumérative. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 289 (1979), 755–758.
- [18] — Formules multisécantes pour les courbes gauches quelconques, dans *Enumerative Geometry and Classical Algebraic Geometry*, pp. 165–197. Progr. Math., 24. Birkhäuser, 1981.
- [19] — Platitude et non-platitude de certains sous-schémas de $\text{Hilb}^k \mathbf{P}^N$. *J. Reine Angew. Math.*, 348 (1984), 116–134.
- [20] — Quelques calculs dans les variétés d'alignements. *Adv. in Math.*, 64 (1987), 87–117.
- [21] — Formules pour les trisécantes des surfaces algébriques. *Enseign. Math.*, 33 (1987), 1–66.
- [22] MALLAVIBARRENA, R., Validité de la formule classique des trisécantes stationnaires. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 303 (1986), 799–802.
- [23] ROSSELLO, F., Calcul de grups de Chow, I: Aplicacions. Thèse, Barcelona, 1989.
- [24] SCHUBERT, J., *Kalkül der abzählenden Geometrie*. Springer-Verlag, 1979.
- [25] SEMPLE, J. G. & ROTH, L., *Introduction to Algebraic Geometry*. Oxford at the Clarendon Press, 1949.
- [26] SEVERI, F., Ricerche sulle coniche secanti delle curve gobbe. *Atti R. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, 35 (1900), 526–541.
- [27] — Sopra le coniche che toccano o segano una o più curve gobbe. *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, 36 (1900), 74–93.
- [28] — Riflessioni intorno ai problemi numerativi concernenti le curve algebriche. *Rend. del R. Istit. Lomb. di Sci. e Lett. (2)*, 54 (1921), 243–254.
- [29] — *Memorie Scelte*, Vol. I, a cura di Beniamino Segre. Bologna, 1950.
- [30] VASSALLO, V., Justification de la méthode fonctionnelle pour les courbes gauches. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 303 (1986), 299–302.
- [31] VERDIER, J.L., Le théorème de Riemann–Roch pour les variétés algébriques éventuellement singulières, dans *Lecture Notes in Math.*, 514. Springer-Verlag, 1976; *Séminaire Bourbaki*, exposés 453–470, 1974/1975.

VALERIO VASSALLO

Université des Sciences et Technologies de Lille
 URA D751 C.N.R.S. – U.F.R. de Mathématiques
 F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
 France
 vassallo@gat.univ-lille1.fr

Reçu le 7 août 1989

Révisé le 22 mars 1993