Acta Math., 180 (1998), 31–67

Enveloppe polynomiale d'un compact de longueur finie et chaînes holomorphes à bord rectifiable

par

TIEN CUONG DINH

Université Pierre et Marie Curie
Paris, France

Table des matières

0. Introduction

On note H^m la mesure de Hausdorff (dans $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ ou $\mathbf{CP}^n$). Soit $S\subset\mathbf{C}^n$ un compact. *L'enveloppe polynomiale* de S dans $\mathbf{C}^n$ est définie par $\widehat{S}:=\{z\in\mathbf{C}^n: |P(z)|\leqslant\max_{x\in S}|P(x)|$ pour tout polynôme $P\}$. Le compact S est appelé *polynomialement convexe* si $\widehat{S}=S$. Dans son article [24] Wermer a montré que si S est l'image homéomorphe d'un cercle C de $\mathbf{C}$ par une application holomorphe au voisinage de C, $\widehat{S}\setminus S$ est un sous-ensemble analytique borné (éventuellement vide) de dimension pure 1 de $\mathbf{C}^n\setminus S$ et $\widehat{S}\setminus S\neq\varnothing$ si et seulement si S vérifie la condition du moment (i.e. $\int_S\varphi=0$ pour toute $(1,0)$-forme φ holomorphe dans $\mathbf{C}^n$). Le théorème de Wermer a été généralisé par Bishop [6], Stolzenberg [22] pour une réunion finie de courbes réelles de classe C^1, par Alexander [1], Lawrence [19], pour un compact connexe de longueur finie (i.e. $H^1(S)<\infty$). Dans ce cas $\widehat{S}\setminus S$ définit un courant d'intégration de bidimension (1,1) de $\mathbf{C}^n$ dont le bord est un courant rectifiable de support inclus dans S et de multiplicité $0,1$ en H^1-presque tout point de S. Dans le paragraphe 2 nous donnons un résultat plus général en remplaçant la condition

« S est connexe » par la condition plus faible, appelée A_1 (A_1 : le cône tangentiel de S en H^1-presque tout point est une droite réelle).

Soient X une variété complexe de dimension n, Γ un courant rectifiable de dimension $2p-1$ de X. Γ est appelé *maximalement complexe* s'il est la somme de deux courants de bidimensions $(p,p-1)$ et $(p-1,p)$, i.e. Γ annule toute $(k,2p-1-k)$-forme pour tout $k\neq p,p-1$. On note $\operatorname{supp}\Gamma$ le support de Γ. Une combinaison linéaire localement finie à coefficients entiers de sous-ensembles analytiques de dimension pure p de $X\setminus\operatorname{supp}\Gamma$ s'appelle une *p-chaîne holomorphe* de $X\setminus\operatorname{supp}\Gamma$. Elle définit un courant d'intégration fermé de bidimension (p,p) de $X\setminus\operatorname{supp}\Gamma$. Si cette p-chaîne est de volume $2p$-dimensionnelle localement finie dans X, elle définira un courant d'intégration dans X, non fermé en général. La recherche de conditions nécessaires et suffisantes pour que Γ soit le bord d'une *p-chaîne holomorphe* de $X\setminus\operatorname{supp}\Gamma$ de masse localement finie, au sens des courants de X est appelé *le problème du bord.* Pour que ce problème soit résoluble, Γ est nécessairement fermé et maximalement complexe. Dans $\mathbf{C}^n$, si Γ est une variété réelle orientée fermée de classe C^1, Harvey et Lawson ont prouvé que ce problème est résoluble si et seulement si pour $p>1$ l'espace tangent de Γ en chaque point est *maximalement complexe* (i.e. il contient un sous-espace vectoriel complexe de dimension maximale et ceci est équivalent à dire que le courant Γ est maximalement complexe) et pour $p=1$, Γ vérifie *la condition du moment* (i.e. $(\Gamma,\varphi)=0$ pour toute $(1,0)$-forme φ holomorphe de $\mathbf{C}^n$) [16]. Le théorème de Harvey–Lawson pour $p=1$ est un corollaire du théorème de Wermer–Bishop–Stolzenberg–Alexander–Lawrence [19, théorème 3]. Pour le cas où $p\geqslant 2$ la p-chaîne holomorphe peut être construite comme la réunion des 1-chaînes holomorphes construites pour les courbes réelles d'intersection de Γ avec les sous-espaces complexes de dimension $n-p+1$ de $\mathbf{C}^n$. La propriété de Γ d'être maximalement complexe permet de prouver la condition du moment pour telles courbes réelles, et que la réunion de telles surfaces est un sous-ensemble analytique de dimension p de $\mathbf{C}^n\setminus\operatorname{supp}\Gamma$. Dans le paragraphe 3 nous généralisons le théorème de Harvey–Lawson pour un courant rectifiable, fermé, maximalement complexe dont le support vérifie la condition suivante :

A_{2p-1} : $\operatorname{supp}\Gamma$ est $(H^{2p-1},2p-1)$-rectifiable et le cône tangentiel de $\operatorname{supp}\Gamma$ en H^{2p-1}-presque tout point est un espace réel $(2p-1)$-dimensionnel.

Ce résultat répond ainsi à une question posée par King [18] et prolonge le résultat récent de Poly, fait dans le cas où $\operatorname{supp}\Gamma$ est de classe C^1 en dehors d'un fermé de mesure H^{2p-1}-nulle. Pour le cas $p=1$ et $n=2$, nous utilisons le théorème d'unicité 1.7 pour adapter les idées de Harvey–Lawson [16] et de Dolbeault–Henkin [10] afin de construire la 1-chaîne holomorphe, l'idée de Lawrence et le théorème du support de King 1.8 pour prouver la formule de Stokes. Nous combinons la méthode de Harvey–Lawson, Dolbeault–

Henkin et la méthode ci-dessus pour démontrer le cas où $p\geqslant 2$ et $n=p+1$. Le cas général est prouvé par la méthode de projection de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^{n-p+1}$. Nous discuterons aussi dans les paragraphes 2 et 3 un exemple d'Alexander [2] qui nous prouve la nécessité des conditions A_1 et A_{2p-1} dans les résultats cités ci-dessus. Ces conditions sont conservées par une projection ou une coupure linéaire générique. Elles nous permettent d'utiliser le théorème d'unicité 1.7 (une généralisation du théorème de Privalov [14, p. 428]).

Dans un ouvert $(n-p+1)$-linéairement concave de $\mathbf{CP}^n$ (en particulier dans $\mathbf{CP}^n$) le même problème est récemment résolu par Dolbeault et Henkin. Ceci est écrit dans leurs articles [10], [11], dont le résultat contient le théorème de Harvey–Lawson en considérant $\mathbf{C}^n$ comme un ouvert affine de $\mathbf{CP}^n$. Le résultat principal du paragraphe 7 est une généralisation du théorème de Dolbeault–Henkin [11, théorème II] pour un courant Γ rectifiable. Afin de le prouver nous réduisons la démonstration au cas $X\setminus\mathbf{CP}^{n-p}_{\nu^*}$, qui est connu pour $p=1$ (dans ce cas $X=\mathbf{CP}^n$, $X\setminus\mathbf{CP}^{n-1}_{\nu^*}\simeq\mathbf{C}^n$) et pour $p\geqslant 2$ la démonstration ressemble à celle dans $\mathbf{C}^n$. Cette réduction a été introduite par Dolbeault–Poly [12] pour simplifier la démonstration du théorème de Dolbeault–Henkin [10]. Dans ce paragraphe nous donnons aussi des exemples explicites pour prouver la différence entre le problème du bord dans $\mathbf{CP}^n$ et celui dans $\mathbf{C}^n$ (l'idée de ces exemples appartient à Lawson, prouvée implicitement par Fabre).

Je tiens à remercier vivement G. Henkin de m'avoir proposé ce problème ainsi que pour ses nombreux conseils et encouragements.

1. Définitions et lemmes préparatoires

On note H^m la mesure de Hausdorff de dimension m dans $\mathbf{R}^n$ (ou $\mathbf{C}^n$ et $\mathbf{CP}^n$). Soit A un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$. On définit pour tout x de A (voir [13]) :

Le *cône tangentiel* de A en x :

$$\operatorname{Tan}(A,x):=\{v\in\mathbf{R}^n : \forall\varepsilon>0,\ \exists c>0,\ y\in A \text{ tels que} : |y-x|<\varepsilon \text{ et } |v-c(y-x)|<\varepsilon\}.$$

La *densité m-dimensionnelle* de A en x pour la mesure H^m :

$$\Theta^m(H^m\lfloor A,x):=\lim_{r\to 0}\alpha(m)^{-1}r^{-m}H^m(A\cap B(x,r)) \quad \text{si cette limite existe.}$$

La *densité m-dimensionnelle supérieure* de A en x pour la mesure H^m :

$$\Theta^{*m}(H^m\lfloor A,x):=\varlimsup_{r\to 0}\alpha(m)^{-1}r^{-m}H^m(A\cap B(x,r))$$

où $B(x,r):=\{y\in\mathbf{R}^n : |x-y|<r\}$ et $\alpha(m)$ est le volume de la boule unité de $\mathbf{R}^m$.

Le (H^m, m)-*cône tangentiel* de A en x :

$$\mathrm{Tan}^m(H^m \lfloor A, x) := \bigcap\{\mathrm{Tan}(S, x) : S \subset A, \Theta^m(H^m \lfloor A \setminus S, x) = 0\}.$$

Soit X une variété réelle de classe C^∞ ($X = \mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ ou $\mathbf{CP}^n$). L'ensemble $A \subset X$ est *m-rectifiable* s'il est l'image d'un ensemble borné dans $\mathbf{R}^m$ par une application lipchitzienne dans X. L'ensemble A est (H^m, m)-*rectifiable* si $H^m(A) < +\infty$ et il existe des compacts $K_i \subset X$ m-rectifiables tels que $H^m(A \setminus \bigcup_{i=1}^\infty K_i) = 0$.

On note $A_c^m(X)$ l'espace de m-forme C^∞ à support compact, $D'_m(X)$ l'ensemble des courants de dimension m. La *masse* d'un courant $\Gamma \in D'_m(X)$ est définie par :

$$M(\Gamma) := \sup_{\|\varphi\| \leqslant 1} |(\Gamma, \varphi)| \in [0, +\infty].$$

Si $A \subset X$ est un sous-ensemble (H^m, m)-rectifiable, η un m-champ de vecteurs intégrable défini H^m-presque partout sur A, alors on peut définir un courant $\Gamma := H^m \lfloor A \wedge \eta \in D'_m(X)$ de manière suivante :

$$(\Gamma, \varphi) := \int_A (\eta, \varphi)\, dH^m.$$

Ce courant sera de masse $M(\Gamma) := \int_A |\eta|\, dH^m < +\infty$. Si $|\eta(x)| \in \mathbf{Z}$ pour H^m-presque tout $x \in A$, le courant Γ sera appelé *rectifiable*.

Un courant Γ est *normal* si $M(\Gamma) < +\infty$ et $M(d\Gamma) < +\infty$. L'espace des courants normaux est noté par $N_m(X)$, muni de la norme $N(\Gamma) := M(\Gamma) + M(d\Gamma)$.

On définit la *semi-norme plate* de $A_c^m(X)$ par :

$$F(\varphi) := \sup(\|d\varphi\|, \|\varphi\|)$$

et pour Γ :

$$F(\Gamma) := \sup(|(\Gamma, \varphi)| : F(\varphi) \leqslant 1).$$

L'ensemble des *courants plats* noté par $F_m(X)$ est défini par :

$$F_m(X) := \text{la fermeture de } N_m(X) \text{ pour la topologie engendrée par } F.$$

On a :

$$F_m(X) \cap \{\Gamma : M(\Gamma) < +\infty\} = \text{la fermeture de } N_m(X) \text{ pour la topologie engendrée par } M$$

et si $\Gamma \in F_m(X)$ alors $d\Gamma \in F_{m-1}(X)$ [13]. Soient Y une variété réelle C^∞ de dimension $p \leqslant m$ et $f : X \to Y$ une application C^∞, $\Gamma \in F_m(X)$. Alors pour H^p-presque tout $y \in Y$

la tranche $\langle\Gamma, f, y\rangle \in F_{m-p}(X)$ de support inclus dans $\operatorname{supp}\Gamma \cap f^{-1}(y)$ telle que pour toutes $\Psi \in A_c^{m-p}(X)$ et $\Phi \in A_c^0(Y)$ on a :

$$\int_Y \Phi(y)(\langle\Gamma, f, y\rangle, \Psi)\, dH^p(y) = ([\Gamma \lfloor f^*(\Phi\wedge\Omega)], \Psi)$$

où Ω est la forme de volume de Y. Les détails se trouvent dans [13].

Soit X une variété réelle C^∞ de dimension n. *Une carte* de X est un triplé (U, Ψ, Ω) où U est un ouvert de X, Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et Ψ est un difféomorphisme de U dans Ω.

Définition 1.1. — (i) On dit qu'un compact $A\subset\mathbf{R}^n$ vérifie la condition A_m si A est (H^m, m)-rectifiable et le cône tangentiel de A en H^m-presque tout point est un espace vectoriel réel de dimension m.

(ii) On dit qu'un compact $A\subset X$ vérifie la condition A_m s'il existe un nombre fini de cartes (U_k, Ψ_k, Ω_k), $k=1, ..., m$, et des compacts $C_k \subset U_k$ tels que $A=\bigcup_{k=1}^m C_k$, $\Psi(C_k)$ sont (H^m, m)-rectifiables et tels que pour tout k le cône tangentiel $\operatorname{Tan}(\Psi(C_k), x)$ est un espace vectoriel réel de dimension m pour H^m-presque tout $x\in\Psi(C_k)$.

LEMME 1.2. — *La définition* 1.1 (ii) *est indépendante des cartes choisies.*

Preuve. — On considère deux familles finies de cartes (U_i, Ψ_i, Ω_i) avec $i\in I$ et (U_j, Ψ_j, Ω_j) avec $j\in J$ arbitraires vérifiant :

— Pour tout $i\in I$ il existe $j\in J$ vérifiant $U_i\subset U_j$.

— $A\subset\bigcup_{i\in I} U_i$.

Supposons que $C_j\subset U_j$, les compacts vérifiant 1.1 (ii) pour les cartes (U_j, Ψ_j, Ω_j). Soient $U_i' \subset\subset U_i$ tels que $A\subset\bigcup_{i\in I} U_i'$, $\Omega_i' := \Psi(U_i')$. Pour montrer le lemme il suffit de montrer que $K_i := A\cap \bar{U}_i'$ vérifie 1.1 (ii) pour les cartes (U_i, Ψ_i, Ω_i).

Il est clair que $C_i = \bigcup(C_j\cap\bar{U}_i')$. Pour $i\in I$ et $j\in J$ tels que $U_i\subset U_j$, l'application $f_{i,j} := \Psi_j\circ\Psi_i^{-1} : \Omega_i\to\Omega_j$ est différentielle, injective. Par conséquent sur $\bar{\Omega}_i'$ les mesures $\mu_{i,j} := (\Psi_j\circ\Psi_i^{-1})^*(H^m)$ et H^m sont compatibles (i.e. $cH^m < \mu_{i,j}^*(H^m) < CH^m$ pour certains $0<c<C$). Donc l'ensemble $\Psi(C_i)$ est (H^m, m)-rectifiables car il est la réunion finie de compacts $(\mu_{i,j}, m)$-rectifiables. Le morphisme de fibrés tangentiels $Tf_{i,j} : T\Omega_i \to T\Omega_j$ induit par $f_{i,j}$ est aussi différentiable et injectif. Donc si pour H^m-presque tout $x\in C_i\cap\Psi_j^{-1}(C_j)$, $\operatorname{Tan}(\Psi_j(C_i), \Psi_j(x))$ est un espace vectoriel réel de dimension m alors $\operatorname{Tan}(\Psi_i(C_i), \Psi_i(x))$ le sera aussi. Les C_i vérifient alors 1.1 (ii) pour la famille de cartes (U_i, Ψ_i, Ω_i). □

LEMME 1.3 [9, 1.2 (ii)]. — *Si* $A\subset\mathbf{C}^n$ *est un compact, connexe, de longueur finie, alors* A *vérifie la condition* A_1.

Preuve. — D'après le théorème de Federer [13, 3.2.9], $\mathrm{Tan}^1(H^1\lfloor A,x)$ est une droite réelle pour H^1-presque tout $x\in A$. Soit $x\in A$ et $v\in\mathrm{Tan}(A,x)$ avec $|v|=1$. Pour montrer que v appartient à $\mathrm{Tan}^1(H^1\lfloor A,x)$, il suffit d'après Federer [13, p. 252] de montrer que si petit soit $\varepsilon>0$, la densité supérieure $\Theta^{*1}(H^1\lfloor A\cap C_\varepsilon)$ est strictement positive, où C_ε est le cône de sommet x, dirigé par le vecteur v, défini par :

$$C_\varepsilon := \{u\in\mathbf{R}^n : |v-c(u-x)|<\varepsilon \text{ pour un certain } c>0\}.$$

On fixe $0<\varepsilon<1$. On peut trouver une suite de points (x_k) de $A\cap C_\varepsilon$ du type $x_k=x+r_kv_k$ avec $r_k>0$, $\lim_{k\to\infty} r_k=0$ et $|v_k|=1$, $\lim_{k\to\infty} v_k=v$. Soit S_k le cône tronqué $C_\varepsilon\cap B(x,2r_k)$. En examinant les arcs tracés dans A joignant x_k à x, on constate que $H^1(A\cap S_k)\geqslant d(x_k,bC_\varepsilon)$, d'où $\Theta^{*1}(H^1\lfloor A\cap C_\varepsilon)\geqslant\frac{1}{4}\varepsilon$. □

LEMME 1.4. — *Soit A un compact de $\mathbf{C}^n$ vérifiant A_m. Alors :*

(i) *Pour $H^{2(n-k)k}$-presque toute projection $\Pi\in G(k,n)$ de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^k$,* $\mathrm{Tan}(A,x)\cap\Pi^{-1}(\Pi(x))$ *est un espace réel de dimension $m-2k$ de sorte que $\Pi^{-1}(x)\cap A$ vérifie la condition A_{m-2k} pour H^{2k}-presque tout $x\in\mathbf{C}^k$, où $1\leqslant 2k<m$.*

(ii) *Pour $H^{2(n-k)k}$-presque toute projection $\Pi\in G(k,n)$ de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^k$,* $\Pi(\mathrm{Tan}(A))$ *est un espace réel de dimension m pour H^m-presque tout $x\in A$ de sorte que $\Pi(A)$ vérifie la condition A_m, où $m\leqslant 2k\leqslant 2n$.*

Preuve. — On note $z:=(z_1,z_2,\dots,z_n)$ les coordonnées de $z\in\mathbf{C}^n$ avec $z_j=x_j+ix_{n+j}$, où $x_l\in\mathbf{R}$ pour $l=1,2,\dots,2n$.

Il suffit de considérer pour (i) le cas où $k=1$, $m>2$ et pour (ii) le cas où $k=n-1$, $m\leqslant 2n-2$. La rectifiabilité de $\Pi^{-1}(x)\cap A$ dans (i) est montrée dans [13, 3.2.22], la rectifiabilité de $\Pi(A)$ dans (ii) est évidente. D'après Federer [13, théorème 3.2.29], il existe une famille dénombrable de variétés réelles $\{X_j\}$ de classe C^1 de dimension m ($X_j\subset\mathbf{C}^n$), telle que $H^m(A\setminus\bigcup_{i=1}^\infty X_j)=0$. Il suffit de considérer le cas où $A\in C^1$, défini comme l'intersection des zéros des fonctions réelles $f_1,f_2,\dots,f_{2n-m}$, qui sont définies dans un ouvert de $\mathbf{C}^n$ où

$$\mathrm{rang}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_l}\right)_{\substack{j=1,\dots,2n-m\\ l=1,\dots,2n}}=2n-m.$$

On remarque en plus que $\mathrm{Tan}^m(H^m\lfloor A,z)$ est un espace vectoriel réel de dimension m pour H^m-presque tout $x\in A$ [13, 3.2.9]. Cet espace coïncide donc avec $\mathrm{Tan}(A,z)$.

(i) On considère les projections Π_α du type $\Pi_\alpha:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}$, $\Pi_\alpha(z)=z_1+\alpha_2z_2+\alpha_3z_3+\dots+\alpha_nz_n$, où $(\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\mathbf{C}^{n-1}$ avec $\alpha_j=\beta_j+i\eta_{n+j}$, $\eta_l\in\mathbf{R}$, $l=2,\dots,n,n+2,\dots,2n$.

On pose :

$$
\begin{aligned}
&X := A\times \mathbf{C}^{n-1} \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{n-1} \quad \text{muni de la mesure } H^m\times H^{2n-2} \text{ notée } H^{2n+m-2},\\
&B := \{(z,\alpha)\in X \text{ tel que } \dim(\mathrm{Tan}(A,z)\cap \Pi_\alpha^{-1}(\Pi_\alpha(z))) \geqslant m-1\},\\
&B_z := B\cap(\{z\}\times \mathbf{C}^{n-1}) \quad \text{pour tout } z\in A,\\
&M_z := \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_l}\right)_{\substack{j=1,\dots,2n-m\\ l=1,\dots,2n}},\\
&N_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_n & 0 & -\beta_{n+2} & -\beta_{n+3} & \dots & -\beta_{2n}\\ 0 & \beta_{n+2} & \beta_{n+3} & \dots & \beta_{2n} & 1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_n \end{pmatrix},\\
&P_{z,\alpha} := \begin{pmatrix} M_z \\ N_\alpha \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Il reste à montrer que $H^{2n+m-2}(B)=0$.

On a :

$$
\begin{aligned}
B &= \{(z,\alpha)\in X \text{ tel que } \mathrm{rang}(P_{z,\alpha}) \leqslant 2n-m+1\},\\
B_z &= \{(z,\alpha)\in B \text{ tel que } \mathrm{rang}(P_{z,\alpha}) \leqslant 2n-m+1\}.
\end{aligned}
$$

Il est clair que B est fermé dans X et pour tout $z\in A$, B_z est un sous-espace vectoriel réel, strictement inclus dans $\{z\}\times\mathbf{C}^{n-1}\simeq\mathbf{R}^{2n-2}$ et donc $H^{2n-2}(B_z)=0$. D'après le théorème de Lebesgue on a $H^{2n+m-2}(B)=0$. D'où (i).

(ii) On considère les projections Π_α du type $\Pi_\alpha\colon \mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^{n-1}$, $\Pi_\alpha(z)=(z_1+\alpha_2 z_n, z_2+\alpha_3 z_n, \dots, z_{n-1}+\alpha_n z_n)$, où $(\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\mathbf{C}^{n-1}$ avec $\alpha_j=\beta_j+i\eta_{n+j}$, $\eta_l\in\mathbf{R}$, $l=2,\dots,n$, $n+2,\dots,2n$. On pose :

$$
\begin{aligned}
&X := A\times \mathbf{C}^{n-1} \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{n-1} \quad \text{muni de la mesure } H^m\times H^{2n-2} \text{ notée } H^{2n+m-2},\\
&B := \{(z,\alpha)\in X \text{ tel que } \mathrm{Tan}(A,z)\cap \Pi_\alpha^{-1}(\Pi_\alpha(z)) = \{z\}\},\\
&B_z := B\cap(\{z\}\times \mathbf{C}^{n-1}) \quad \text{pour tout } z\in A,\\
&M_z := \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_l}\right)_{\substack{j=1,\dots,2n-m\\ l=1,\dots,2n}},\\
&N_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \beta_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta_{n+2}\\ 0 & 1 & \dots & 0 & \beta_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta_{n+3}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & \beta_n & 0 & 0 & 0\dots & 0 & -\beta_{2n} \end{pmatrix},\\
&P_{z,\alpha} := \begin{pmatrix} M_z \\ N_\alpha \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Il reste à montrer que $H^{2n+m-2}(B)=0$.

On a :

$$B=\{(z,\alpha)\in X \text{ tel que } \operatorname{rang}(P_{z,\alpha})<2n\},$$
$$B_z=\{(z,\alpha)\in B \text{ tel que } \operatorname{rang}(P_{z,\alpha})<2n\}.$$

Il est clair que B est fermé dans X et pour tout $z\in A$, B_z est un sous-espace vectoriel réel, strictement inclus dans $\{z\}\times\mathbf{C}^{n-1}\simeq\mathbf{R}^{2n-2}$ et donc $H^{2n-2}(B_z)=0$. D'après le théorème de Lebesgue on a $H^{2n+m-2}(B)=0$. D'où (ii). □

LEMME 1.5. — *Soit $A\subset\mathbf{C}^n$ un ensemble $(H^{2p-1},2p-1)$-rectifiable. Alors pour $H^{2p(n-p)}$-presque toute projection $\Pi\in G(p,n)$, il existe un sous-ensemble $E_\Pi\subset A$, $H^{2p-1}(\Pi(E_\Pi))=0$, tel que la restriction $\Pi|_{A\setminus E_\Pi}$ soit injective.*

Preuve. — D'après Federer [13] il existe des variétés réelles $(2p-1)$-dimensionnelles $K_j\subset\mathbf{C}^n$ de classe C^1 telles que $H^{2p-1}(A\setminus\bigcup_{j=1}^\infty K_j)=0$. Il suffit donc de considérer le cas où A est de classe C^1. Dans un ouvert de Zariski de $G(p,n)$, une projection linéaire Π est paramétrée par une matrice

$$M=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ p+1\leqslant j\leqslant n}}$$

de manière suivante :

$$\Pi_i(z):=z_i+\sum_{j=p+1}^n a_{i,j}z_j$$

pour tout $i=1,2,\dots,p$.

Soient $N:=\{(\alpha,\beta)\in A\times A:\alpha\neq\beta\}$ et I la matrice identité d'ordre p. L'ensemble de M tel que Π ne vérifie pas 1.5 est l'ensemble de M tel que :

$$N_M:=\{(\alpha,\beta)\in N:(IM)\alpha=(IM)\beta\}$$

est de mesure $H^{2p(n-p)}$ positive.

Soient $P:=N\times G(p,n-p)$ muni d'une mesure $H^{4p-2}\times H^{2p(n-p)}=:H^{2p(n-p+2)-2}$, $Q:=\{(\alpha,\beta,M)\in P:(\alpha,\beta)\in N_M\}$ et $Q_\alpha:=\{(\beta,M):(\alpha,\beta,M)\in Q\}$. Il suffit de prouver que $H^{2p(n-p+2)-2}(Q)=0$ ou d'après le théorème de Lebesgue il suffit de prouver que pour tout $\alpha\in A$ on a $H^{2p(n-p+1)-1}(Q_\alpha)=0$. Ceci est clair car Q_α admet une structure d'une variété réelle de classe C^1 et de dimension $2p(n-p)-1$. □

LEMME 1.6. — *Soit $\Omega\subset\mathbf{C}$ un domaine dont le bord $b\Omega$ est $(H^1,1)$-rectifiable. Soit $E\subset b\Omega$ un compact, $H^1(E)>0$, tel que pour tout $x\in E$, $\operatorname{Tan}(b\Omega,x)$ soit une droite réelle.*

Alors il existe un domaine de Jordan $\Omega'\subset\Omega$ à bord H^1-rectifiable tel que $H^1(b\Omega'\cap E)>0$ et tel que $b\Omega'\cap\Omega$ soit de classe C^∞.

Preuve. — Soient U la composante connexe non bornée de $\mathbf{C}\backslash b\Omega$, Γ la composante connexe de $b\Omega$ contenant bU. D'après Federer [13, 3.2.29] il existe des courbes réelles $\{\gamma_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ de classe C^1 telles que $H^1(b\Omega\backslash\bigcup\gamma_j)=0$. On peut supposer que $E\subset\gamma_1$ et que γ_1 va vers ∞ et sépare le plan en deux parties. En remplaçant Ω par une composante connexe convenable de $\Omega\backslash\gamma_1$ on peut supposer sans perdre en généralité que $E\subset bU$. Soit Q la composante connexe de $\mathbf{C}\backslash\Gamma$ qui contient Ω. Alors Q est simplement connexe. Soient D le disque unité de $\mathbf{C}$ et g une application biholomorphe de D dans Q. D'après le théorème de Pommerenke–Alexander [21], [3], g se prolonge continûment à $\bar{D}$, et d'après Lawrence [19, Theorem 2], $g'\in H_1$ et H^1-presque tout point de $g(bD)$ admet une ou deux préimages. On pose $T:=g^{-1}(E)$. On a $H^1(E)\leqslant\int_T|g'(e^{it})|\,dt$, d'où $H^1(T)>0$. Soit $F\subset T$ un fermé, $H^1(F)>0$, tel que chaque point de $g(F)$ admet une unique préimage. On a $H^1(g(F))=\int_F|g'(e^{it})|\,dt$. Si $g'=0$ H^1-presque partout sur F, d'après Smirnov [14, p. 409], la fonction $g'(z)$ tend vers 0 quand z tend vers z_0 le long des arcs non tangentiels pour H^1-presque tout $z_0\in F$; d'après le théorème de Privalov [14, p. 428] on a $g'=0$ sur D ; c'est impossible. Par conséquent $H^1(g(F))>0$.

Pour tout $\zeta_0\in F$ on pose

$$u(\zeta,\zeta_0):=\arg\frac{g(\zeta)-g(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}$$

défini et continue sur $\bar{D}\backslash\{\zeta_0\}$. L'image par g d'un petit arc de bD contenant ζ_0 est une courbe réelle continue et incluse dans bQ; de plus, $\operatorname{Tan}(bQ,g(\zeta_0))$ est une droite réelle (ceci est valable pour H^1-presque tout $\zeta_0\in F$), donc $\arg(g(\zeta)-g(\zeta_0))$ est borné au voisinage de ζ_0, et puis $u(\zeta,\zeta_0)$ l'est aussi. Comme $g\in H_1$, l'application $u(\zeta,\zeta_0)$ se prolonge continûment sur bD pour H^1-presque tout $\zeta_0\in F$, et donc l'application g est conforme en ζ_0.

Pour H^1-presque tout $\zeta_0\in F$ et $k\in\mathbf{N}$ on définit le cône tronqué en z_0 :

$$S_{z_0}^{(k)}:=\{z\in D:|z|>1-1/k,\ \exists c>0 \text{ tel que}: |z_0+c(z-z_0)|<\tfrac{7}{8}\},$$
$$F^M:=\{z_0\in F:|g'(z_0)|\leqslant M\}$$

et

$$F_k^M:=\{z_0\in F^M: S_{z_0}^{(k)}\cap g^{-1}(b\Omega)=\varnothing \text{ et } |g'(z)|\leqslant 2M \text{ pour tout } z\in S_{z_0}^{(k)}\}.$$

Comme $g\in H_1$, il existe $M\gg0$ tel que $H^1(F^M)>0$. On sait que pour une fonction g telle que g' soit de type H_1, $g'(z_0)$ est la limite de $g'(z)$ quand z tend vers z_0 le long des arcs non tangentiels pour H^1-presque tout $z_0\in bD$ (théorème de Smirnov [14, p. 409]).

D'après l'hypothèse, on a $\lim_{k\to\infty} F_k^M = F^M$, donc il existe $N\in\mathbf{N}$ tel que pour tout $k\geqslant N$ on a $H^1(F_k^M)>0$. Soit $L\subset F_N^M$, $H^1(L)>0$, un fermé tel que L soit inclus dans un arc l continu, ouvert de bD avec $H^1(l)\ll 1/N$. On écrit l'ouvert $bD\setminus L$ de bD sous la forme $L:=\bigcup_{j=0}^m l_j$, où les l_j sont des arcs ouverts connexes de bD de sommets (a_j, b_j) et l_0 est de longueur maximale parmi les l_j. On considère le domaine $R\subset D$ borné par :

— le bord bD de D,

— les rayons Oa_0, Ob_0,

— le cercle $\{z\in\mathbf{C}:|z|=1-1/N\}$,

— les petits arcs $(a_j, b_j)^{\smile}$ des cercles C_j, passant par a_j, b_j, tels que les angles entre C_j et bD soient $80°$.

Par construction, ce domaine est un domaine de Jordan à bord rectifiable et $R\cap g^{-1}(bQ)=\varnothing$. Le domaine $g(R)$ est aussi de Jordan et $g(R)\cap bQ=\varnothing$ car $g|_{D\cup F}$ est injective. Il est de plus à bord rectifiable car g' est bornée dans $\bar{R}$ par $2M$. Par construction, $b(g(R))\cap\Omega$ est C^∞ par morceaux et $H^1(bg(R)\cap E)>0$. On peut modifier cet ensemble pour obtenir un domaine Ω', qui vérifie le lemme. □

Soient Ω un ouvert de $\mathbf{C}$, x un point de $b\Omega$ tel que $\mathrm{Tan}(b\Omega, x)$ soit une droite réelle. Un arc dans Ω de point terminal x est dit *non tangentiel* si, dans un voisinage de x, il est inclus dans un angle plus petit que $180°$, de sommet x et de bissectrice orthogonale à $b\Omega$.

Le théorème d'unicité suivant est un corollaire du lemme précédent et du théorème d'unicité de Privalov [14, p. 428], qui a la même formulation pour un domaine de Jordan à bord rectifiable dans $\mathbf{C}$:

THÉORÈME 1.7 [9, théorème 2.1]. — *Soient Ω un ouvert connexe de bord $(H^1,1)$-rectifiable de $\mathbf{C}$, f une fonction holomorphe sur Ω. Supposons qu'il existe un ensemble $E\subset b\Omega$, $H^1(E)>0$, tel que pour tout $x_0\in E$, $\mathrm{Tan}(b\Omega, x_0)$ soit une droite réelle et $f(x)$ tende vers 0 quand x tend vers x_0 le long des arcs non tangentiels. Alors $f=0$ sur Ω.*

LEMME 1.8 (théorème du support de King [17, p. 218], [19, p. 412]). — *Soit $T\in F_k(\mathbf{R}^n)$, $M(T)<+\infty$, dont le support est (H^k,k)-rectifiable. Alors il existe un k-champ de vecteurs ξ intégrable, défini H^k-presque partout sur $\operatorname{supp} T$ tel que $T=H^k\lfloor \operatorname{supp} T\wedge\xi$.*

LEMME 1.9 (Hadamard). — *Soient A un anneau intègre et $G(w)=\sum_{-\infty}^m F_j w^j$, $F_j\in A$, une série formelle. Alors, les deux conditions suivantes sont équivalantes :*

(i) *$G(w)$ représente une fraction rationnelle $P(w)/Q(w)$ avec $P,Q\in A[w]$ des polynômes en w et $\deg Q\leqslant q$.*

(ii) *Pour tout multi-indice $(k_1,k_2,\ldots,k_{q+1})$ d'entiers positifs on a $\det a^{k_1,\ldots,k_{q+1}}=0$,* *où*

$$a^{k_1,\dots,k_{q+1}} := \begin{pmatrix} F_{-k_1} & F_{-k_1-1} & \dots & F_{-k_1-q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{-k_{q+1}} & F_{-k_{q+1}-1} & \dots & F_{-k_{q+1}-q} \end{pmatrix}.$$

2. Enveloppe polynomiale d'un compact de longueur finie

En 1971 Alexander a donné une généralisation du théorème de Wermer–Bishop–Stolzenberg. Ce théorème d'Alexander dit que si Γ est un compact connexe H^1-rectifiable dans $\mathbf{C}^n$ (plus généralement Γ est inclus dans un compact connexe H^1-rectifiable de $\mathbf{C}^n$) alors $\widehat{\Gamma}\backslash\Gamma$ est un sous-ensemble analytique borné (éventuellement vide) de dimension pure 1 de $\mathbf{C}^n\backslash\Gamma$ [1]. Plus tard, en 1986, il a montré que la connexité de Γ n'est pas supprimable [2], puis en 1988 il a prouvé que si Γ est une courbe de Jordan $H^2(\widehat{\Gamma})<+\infty$ [4]. Répondant aux questions posées par Alexander le résultat récent de Lawrence [19, théorème 3] dit que si Γ est un compact connexe, H^1-rectifiable dans $\mathbf{C}^n$, $\widehat{\Gamma}$ définit un courant d'intégration $[\widehat{\Gamma}\backslash\Gamma]$ de bidimension $(1,1)$ de $\mathbf{C}^n$, de masse finie. De plus, le courant 1-dimensionnel $d[\widehat{\Gamma}\backslash\Gamma]$ est un courant rectifiable, dont le support est inclus dans Γ, avec la multiplicité $0,1$ en H^1-presque tout point de Γ.

Notre résultat principal de ce paragraphe est le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. — *Soit $\Gamma\subset\mathbf{C}^n$ un compact vérifiant A_1. Alors $\widehat{\Gamma}\backslash\Gamma$ est un sous-ensemble analytique borné (éventuellement vide) de dimension pure 1 de $\mathbf{C}^n\backslash\Gamma$, qui définit un courant d'intégration $[\widehat{\Gamma}\backslash\Gamma]$ de bidimension $(1,1)$, de masse finie de $\mathbf{C}^n$. De plus, le courant 1-dimensionnel $d[\widehat{\Gamma}\backslash\Gamma]$ est un courant rectifiable, dont le support est inclus dans Γ, avec la multiplicité $0,1$ en H^1-presque tout point de Γ.*

Remarque 2.2. — (i) D'après 1.3 si Γ est connexe le théorème précédent se réduit au théorème de Wermer–Bishop–Stolzenberg–Alexander–Lawrence [19, théorème 3].

(ii) D'après Alexander la condition A_1 dans le théorème 2.1 n'est pas supprimable (voir 3.2 (iii)).

Note. — A la suite de la prépublication de cet article, G. M. Lawrence m'a communiqué le manuscrit [20], où il démontre le théorème ci-dessus indépendamment.

Pour la démonstration de ce théorème, on utilise les lemmes suivants :

LEMME 2.3 (Alexander [1]). — *Soit $L\subset\mathbf{C}$ un compact, $H^1(L)<+\infty$. Soit Ω_0 la composante connexe non bornée de $\mathbf{C}\backslash L$. Alors pour toute composante connexe Ω de $\mathbf{C}\backslash L$ il existe une suite de composantes connexes $\Omega_{i_1},\Omega_{i_2},\dots,\Omega_{i_m}$ de $\mathbf{C}\backslash L$ telle que*

$\Omega_{i_1}=\Omega_0$, $\Omega_{i_m}=\Omega$ et telle que $\Omega_{i_k},\Omega_{i_{k+1}}$ soient adjacentes, i.e. $H^1(b\Omega_{i_k}\cap b\Omega_{i_{k+1}})>0$ pour tout $k=0,1,...,m-1$.

LEMME 2.4 (Stolzenberg [22, lemme 5]). — *Soit Y un compact de $\mathbf{C}^n$ et f un polynôme. Si $x\in\mathbf{C}$ est un point du bord de la composante connexe non bornée de $\mathbf{C}\setminus f(Y)$ et $M:=\{z\in\widehat{Y}: f(z)=x\}$ alors $M=(M\cap Y)\widehat{\ }$.*

THÉORÈME 2.5 (Stolzenberg [22]). — *Soient $K\subset\mathbf{C}^n$ une réunion finie d'arcs fermés de classe C^1 (i.e. les images dans $\mathbf{C}^n$ de l'intervalle $[0,1]$ par des applications C^1) et $X\subset\mathbf{C}^n$ un sous-ensemble polynomialement convexe. Alors $(K\cup X)\widehat{\ }\setminus(K\cup X)$ est un sous-ensemble analytique (éventuellement vide) de dimension pure 1 de $\mathbf{C}^n\setminus(K\cup X)$.*

LEMME 2.6 (principe de module maximum local de Rossi [22]). — *Si $T\subset\widehat{Y}\subset\mathbf{C}^n$ et σ est le bord topologique de T dans $\widehat{Y}$ alors $T\subset(\sigma\cup(T\cap Y))\widehat{\ }$.*

LEMME 2.7 (Alexander [1, lemme 2]). — *Soient Ω un domaine de Jordan de $\mathbf{C}$ à bord rectifiable, K un compact de $b\Omega$, $H^1(K)>0$, Q un compact polynomialement convexe de $\mathbf{C}^n$, f un polynôme de $\mathbf{C}^n$, s un entier positif. Supposons que $Q=(f^{-1}(b\Omega)\cap Q)\widehat{\ }$ et que pour tout $\lambda\in K$, $f^{-1}(\lambda)\cap Q$ ait au plus s points. Alors $f^{-1}(\Omega)\cap Q$ est un sous-ensemble analytique (éventuellement vide) de dimension pure 1 de $f^{-1}(\Omega)$.*

LEMME 2.8. — *Soient Γ un compact de $\mathbf{C}^n$, $H^1(\Gamma)<+\infty$, et f un polynôme de $\mathbf{C}^n$ tels que $f(\Gamma)\subset\mathbf{C}$ vérifie la condition A_1. Soient Ω_1,Ω_2 deux composantes connexes adjacentes de $\mathbf{C}\setminus f(\Gamma)$ (i.e. $H^1(b\Omega_1\cap b\Omega_2)>0$). Supposons que $\widehat{\Gamma}\cap f^{-1}(\Omega_i)$ soit un sous-ensemble analytique de dimension pure 1 de $f^{-1}(\Omega_i)$ pour $i=1$. Alors c'est aussi vrai pour $i=2$.*

Preuve. — Cette démonstration est une modification de celle d'Alexander [1, lemme 6] dont le lemme 1.6 est l'argument principal. Soit $E\subset b\Omega_1\cap b\Omega_2$ un compact tel que $H^1(E)>0$ et tel que $\mathrm{Tan}(f(\Gamma),x)$ soit une droite réelle pour tout $x\in E$. Comme $H^1(\Gamma)<+\infty$, on peut supposer que tout point de E admet au plus s_1 préimages par l'application $f: f^{-1}(E)\cap\Gamma\to E$ où $s_1\in\mathbf{Z}$. Il existe d'après 1.6 deux domaines de Jordan $\Omega_i'\subset\Omega_i$ tels que $H^1(b\Omega_i'\cap E)>0$ pour $i=1,2$. On peut trouver les Ω_i' tels que $b\Omega_1'\cap E= b\Omega_2'\cap E$ (voir la démonstration du lemme 1.6). On note $K:=b\Omega_1'\cap E=b\Omega_2'\cap E$. Soit U la composante connexe non bornée de $\mathbf{C}\setminus(\bar{\Omega}_1'\cup\bar{\Omega}_2')$. Alors $Z:=\mathbf{C}\setminus U$ est polynomialement convexe dans $\mathbf{C}$. Par hypothèse $f^{-1}(\Omega_1)$ est un sous-ensemble analytique de dimension pure 1 donc $f: f^{-1}(\Omega_1)\cap\widehat{\Gamma}\to\Omega_1$ est un revêtement ramifié de s_2 feuillets. D'après 2.6 (appliqué à $Y:=\Gamma$ et $T:=\widehat{\Gamma}\cap f^{-1}(Z)$) on a :

$$\widehat{\Gamma}\cap f^{-1}(Z)=[(\Gamma\cap f^{-1}(Z))\cup(\widehat{\Gamma}\cap f^{-1}(bZ)]\widehat{\ }.$$

On remarque que $bU\not\subset b\Omega_2'$, donc $bU\cap(b\Omega_1'\backslash b\Omega_2')\neq\varnothing$ et donc bU contient un arc ouvert l de classe C^1 de $b\Omega_1'\backslash b\Omega_2'$. On note

$$A:=f^{-1}(l)\cap\widehat{\Gamma},\quad F:=\overline{Z\backslash\bar{\Omega}_1'},\quad X_0:=f^{-1}(F)\cap\Gamma\cup f^{-1}(bU\backslash l)\cap\widehat{\Gamma},\quad X:=\widehat{X}_0.$$

On a : $\widehat{\Gamma}\cap f^{-1}(Z)=(X\cup A)^\frown$ et d'après 2.4 appliqué à $Y:=X_0$, on a $X\cap f^{-1}(x)\subset\Gamma$ pour tout $x\in K\backslash bU$. Soit $p\in(\widehat{\Gamma}\backslash\Gamma)\cap f^{-1}(K)$. Alors $p\in(X\cup A)^\frown-(X\cup A)$.

D'après le théorème 2.5 de Stolzenberg appliqué à $K:=f^{-1}(\bar{l})\cap\widehat{\Gamma}$, $\widehat{\Gamma}$ est un sous-ensemble analytique de dimension pure 1 au voisinage de p. Donc f n'est pas localement constante sur chaque composante analytique de $\widehat{\Gamma}$ en $p\in f^{-1}(x)\cap(\widehat{\Gamma}\backslash\Gamma)$ pour tout $x\in K$ sauf peut-être un nombre dénombrable de x. Au voisinage dans $\widehat{\Gamma}$ d'un tel point p l'application f définit un revêtement ramifié au-dessus d'un voisinage de x dans $\mathbf{C}$. Par conséquent, pour H^1-presque tout point $x\in K\backslash bU$, $f^{-1}(x)\cap\widehat{\Gamma}$ a au plus $s:=s_1+s_2$ points. On pose $Q:=f^{-1}(\bar{\Omega}_2')\cap\widehat{\Gamma}$. D'après 2.6 (appliqué à $Y:=\Gamma$ et $T:=Q$ en remarquant que Q est polynomialement convexe) on a : $Q=(f^{-1}(b\bar{\Omega}_2')\cap Q)^\frown$ (car $f^{-1}(\Omega_2')\cap\Gamma=\varnothing$). D'après 2.7, $f^{-1}(\Omega_2')\cap\widehat{\Gamma}=f^{-1}(\Omega_2')\cap Q$ est un sous-ensemble analytique de dimension pure 1 de $f^{-1}(\Omega_2')$.

Soit $\Omega\subset\subset\Omega_2$ un domaine de Jordan relativement compact à bord $(H^1,1)$-rectifiable dans Ω_2 tel que $b\Omega\cap\Omega_2'\neq\varnothing$. Alors $\bar{\Omega}$ est polynomialement convexe, donc $f^{-1}(\bar{\Omega})$ et $S:=f^{-1}(\bar{\Omega})\cap\widehat{\Gamma}$ le sont aussi. D'après 2.6 (appliqué à $Y:=\Gamma$ et $T:=S$) on a : $S=(f^{-1}(b\Omega)\cap\widehat{\Gamma})^\frown=(f^{-1}(b\Omega)\cap S)^\frown$. Appliquant le lemme 2.7 à $Q:=S$ et à un compact de longueur positive de $b\Omega\cap\Omega_2'$ on trouve que $f^{-1}(\Omega)\cap\widehat{\Gamma}$ est un sous-ensemble analytique de dimension pure 1 de $f^{-1}(\Omega)$. Ceci est valable pour tout Ω et donc $f^{-1}(\Omega_2)\cap\widehat{\Gamma}$ est un sous-ensemble analytique de dimension pure 1 de $f^{-1}(\Omega_2)$. □

Démonstration du théorème 2.1. — Soient $z\in\widehat{\Gamma}\backslash\Gamma$ et f une projection de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}$ (un polynôme homogène de degré 1) vérifiant 1.4 (ii) pour $A:=\Gamma$ tels que $f(z)\notin f(\Gamma)$. Soient Ω_i les composantes connexes de $\mathbf{C}\backslash f(\Gamma)$, Ω_0 non bornée et $\Omega_1\ni f(z)$. D'après 2.3 il existe une suite de composantes connexes $\Omega_{i_1},\Omega_{i_2},\dots,\Omega_{i_m}$ avec $\Omega_{i_1}=\Omega_0$, $\Omega_{i_m}=\Omega_1$ telle que Ω_{i_k} et $\Omega_{i_{k+1}}$ soient adjacentes pour tout $k=0,1,\dots,m-1$. Comme $\mathbf{C}\backslash\Omega_0$ est polynomialement convexe, $f^{-1}(\mathbf{C}\backslash\Omega_0)$ l'est aussi. Donc $f^{-1}(\Omega_0)\cap\widehat{\Gamma}=\varnothing$. D'après 2.8, $\widehat{\Gamma}$ est un sous-ensemble analytique de dimension pure 1 au voisinage de z. Donc $\widehat{\Gamma}\backslash\Gamma$ est un sous-ensemble analytique de dimension pure 1 de $\mathbf{C}^n\backslash\Gamma$. La démonstration du reste du théorème 2.1 est la même du théorème de Wermer–Bishop–Stolzenberg–Alexander–Lawrence (voir [19]). □

3. Chaînes holomorphes à bord rectifiable dans $\mathbf{C}^n$

Le résultat principal de ce paragraphe est une généralisation du théorème de Harvey–Lawson [15, théorème 3.3] :

THÉORÈME 3.1. — *Soit Γ un courant rectifiable fermé de dimension $2p-1$, maximalement complexe de $\mathbf{C}^n$. Supposons que le support de Γ (noté $\operatorname{supp}\Gamma$) vérifie A_{2p-1}. Dans le cas où $p=1$ on suppose de plus que Γ vérifie la condition du moment. Alors il existe une p-chaîne holomorphe unique V de $\mathbf{C}^n\setminus\operatorname{supp}\Gamma$ qui définit un courant d'intégration de masse finie $[V]$ de $\mathbf{C}^n$ tel que $d[V]=\Gamma$.*

Remarque 3.2. — (i) D'après 1.3, si $\operatorname{supp}\Gamma$ est connexe et $p=1$, le théorème 3.1 deviendra un corollaire du théorème de Wermer–Bishop–Stolzenberg–Alexander–Lawrence [19, théorème 3].

(ii) Si Γ est une combinaison finie à coefficients entiers de sous-variétés réelles orientées de classe C^1, le théorème 3.1 se réduit à celui de Harvey–Lawson [15, théorème 3.3]. La démonstration d'unicité du théorème 3.1 se trouve aussi dans l'article de Harvey–Lawson [15, théorème 2.1].

(iii) Alexander a trouvé un compact $X\subset\mathbf{C}^2$, $H^1(X)>0$, dont $\widehat{X}\setminus X$ n'est pas un sous-ensemble analytique de $\mathbf{C}^2\setminus X$ [2]. Cet exemple montre également que la condition A_{2p-1} dans le théorème 3.1 n'est pas supprimable. Précisément, Alexander a construit des domaines $D_k\subset\mathbf{C}$ du type $D_k=D\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}\overline{D}(\alpha_{k,j},r_{k,j})$ avec D le disque unité, $\alpha_{k,j}\in D$, $\lim_{j\to\infty}|\alpha_{k,j}|=1$, $0<r_{k,j}<1-|\alpha_{k,j}|$ et les fonctions différentes g_k, grâce à la fonction de Beurling, vérifiant les propriétés suivantes :

— $\sum_{k,j=1}^{\infty}H^1(bD(\alpha_{k,j},r_{k,j}))<+\infty$,

— les fonctions g_k sont définies holomophes sur D_k, méromorphes sur D, continues dans $\overline{D}_k$,

— $|g_k'(z)|\leqslant 1$ pour tout $z\in D\cap\overline{D}_k$,

— $g_k=0$ sur bD.

Soit $X:=\bigcup_{k=1}^{\infty}X_k$ où $X_k:=\{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2 : z_1\in bD_k,\ z_2=g(z_1)\}$. On a $H^1(X)<\infty$ et $\widehat{X}\setminus X$ est la réunion de $D\times\{0\}$ et des $\widetilde{X}_k:=\{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2 : z_1\in D_k,\ z_2=g(z_1)\}$. Donc $\widehat{X}\setminus X$ n'est pas un sous-ensemble analytique de $\mathbf{C}^2\setminus X$. En particulier, X ne vérifie pas la condition A_1.

On remarque que $H^2(\widetilde{X}_k)<\infty$, donc il définit un courant d'intégration $[\widetilde{X}_k]$ de masse finie de bidimension $(1,1)$ défini dans $\mathbf{C}^2$. Soit $\Gamma_k:=d[\widetilde{X}_k]$. Alors Γ_k est un courant d'intégration sur X_k, rectifiable de dimension 1, vérifiant la condition du moment. Soit $D_0:=D\times\{0\}\subset\mathbf{C}^2$. Il définit un courant d'intégration $[D_0]$ de masse finie de bidimension $(1,1)$ de $\mathbf{C}^2$. On pose $\Gamma_0:=d[D_0]$. C'est un courant d'intégration sur $bD\times\{0\}$, rectifiable de bidimension 1, défini dans $\mathbf{C}^2$ et vérifiant la condition du moment.

On pose $\Gamma:=\sum_{k=1}^{\infty}(\Gamma_k-\Gamma_0)$. Il est clair que Γ est un courant d'intégration sur $\bigcup_{k=1}^{\infty} bD_k$, de masse finie (bornée supérieurement par $2\sum_{k,j=1}^{\infty} H^1(bD(\alpha_{k,j},r_{k,j})))$. Il est rectifiable, vérifiant la condition du moment car les Γ_k la vérifient. Les seuls sous-ensembles analytiques de $\mathbf{C}^2\setminus\operatorname{supp}\Gamma=\mathbf{C}^2\setminus X$ sont des $\widetilde{X}_k$. De plus, $\operatorname{supp} d[\widetilde{X}_k]\subset X_k$, puis une réunion finie de tels X_k ne recouvre pas $X=\operatorname{supp}\Gamma$, donc le problème du bord $d[V]=\Gamma$ dans ce cas n'a pas de solution.

COROLLAIRE 3.3. — *Soient V un sous-ensemble analytique irréductible (éventuellement avec des singularités) de dimension pure $p\geqslant 2$ d'un ouvert $U\subset\mathbf{C}^n$ et D un ouvert relativement compact de V. Supposons que bD est l'image d'une variété réelle de classe C^1 par une application lipchitzienne injective dans $\mathbf{C}^n$. Alors toute fonction $f\colon bD\to\mathbf{C}$ lipchitzienne, de Cauchy-Riemann se prolonge à une fonction holomorphe $F\colon D\to\mathbf{C}$.*

Démonstration. — Soit Γ le graphe de f dans $\mathbf{C}^{n+1}$. Le bord de D est orienté, donc Γ est orienté. Il est évident que Γ vérifie la condition A_{2p-1} et qu'il est maximalement complexe. D'après 3.1 il existe un sous-ensemble analytique borné T de $\mathbf{C}^{n+1}\setminus\Gamma$ tel que $d[T]=\Gamma$. T est défini comme un revêtement au-dessus de D et d'après le théorème d'unicité ce revêtement n'a qu'un feuillet. Il est défini donc comme le graphe d'une fonction $F\colon D\to\mathbf{C}$. D'où 3.3. □

On note $B:=\operatorname{supp}\Gamma$ et $D:=\mathbf{C}^n\setminus B$. Par hypothèse, B est $(H^{2p-1},2p-1)$-rectifiable. Il existe un $(2p-1)$-champ de vecteurs η défini H^{2p-1}-presque partout sur B, intégrable avec $|\eta(z)|\in\mathbf{Z}$ pour H^{2p-1}-presque tout $z\in B$, tel que $\Gamma=H^{2p-1}\lfloor B\wedge\eta$ [13, 4.1.28]. Soit $r\gg 0$ tel que $B\subset\{|z|<r\}$.

4. Démonstration du théorème 3.1 pour le cas où $p=1$, $n=2$

On note pour tout $\alpha\in\mathbf{C}$ la projection :

$$\Pi_\alpha(z):=z_1-\alpha z_2,$$

$$g_{k,\alpha}(\zeta):=\left(\Gamma,\frac{1}{2\pi i}z_2^k\frac{d\Pi_\alpha(z)}{\Pi_\alpha(z)-\zeta}\right),\quad R_\alpha(\zeta,w):=w^{g_{0,\alpha}(\zeta)}\exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}g_{k,\alpha}(\zeta)w^{-k}\right),$$

$$g_k:=g_{k,0},\quad R:=R_0\quad\text{et}\quad\Pi:=\Pi_0.$$

Soient Ω_i les composantes connexes de $\mathbf{C}\setminus\Pi(B)$, Ω_0 non bornée. La condition du moment entraîne $g_k=0$ et $R=1$ au-dessus de Ω_0 (voir [15]).

Supposons que Π et Π_1 vérifient 1.4 pour $A:=B$, $k:=1$. Alors B est définie H^1-presque partout comme le graphe d'une fonction, notée $z_2(\zeta)$, au-dessus de $\Pi(B)$.

LEMME 4.1. — (i) *$g_0(\zeta)\in\mathbf{Z}$ pour tout $\zeta\notin\Pi(B)$.*

(ii) *$|\eta(\zeta,z_2(\zeta))|=|g_0(\Omega_i)-g_0(\Omega_j)|$ pour H^1-presque tout $\zeta\in b\Omega_i\cap b\Omega_j$.*

Démonstration. — (i) Soit $f:\mathbf{C}\setminus\{\zeta\}\to C$, $f(\zeta+re^{i\theta}):=e^{i\theta}$ où C est le cercle unité du plan complexe. Comme Γ est un courant rectifiable fermé, $(f\circ\Pi)_*(\Gamma)$ l'est aussi. Donc il existe un entier $k\in\mathbf{Z}$ tel que $(f\circ\Pi)_*(\Gamma)=k[C]$ où $[C]$ désigne le courant d'intégration sur C orienté positivement. On a :

$$g_0(\zeta)=\left(\Gamma,\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{dz_1}{z_1-\zeta}\right)=\left((f\circ\Pi)_*(\Gamma),\frac{1}{2\pi i}\arg(z_1-\zeta)\right)=k\in\mathbf{Z}.$$

(ii) On remarque ici que k égale à la somme finie des $\pm|\eta(\tau,z_2(\tau))|$ pour τ parcourant l'intersection de $\Pi(B)$ avec une demi-droite réelle de sommet ζ générique.

Considérons un point générique $\zeta\in b\Omega_i\cap b\Omega_j$, une droite réelle d générique passant par ζ, non tangentielle à $\Pi(B)$. Soient ζ^+ et ζ^- deux points de d près de ζ tels que le segment $[\zeta^+,\zeta[$ soit inclus dans Ω_i, et le segment $[\zeta^-,\zeta[$ soit inclus dans Ω_j. En prenant la demi-droite de sommet ζ^+ passant par ζ^-, on a (ii) grâce à la remarque ci-dessus. □

Soient Ω_i et Ω_j des composantes connexes adjacentes, $l_i\subset\Omega_i$, $l_j\subset\Omega_j$ des arcs non tangentiels de point terminal $\zeta_0\in b\Omega_i\cap b\Omega_j$. Pour H^1-presque tout ζ_0 :

LEMME 4.2. — (i) *Les limites*

$$\lim_{\substack{\zeta^+\to\zeta_0\\ \zeta^+\in l_i}} g_k(\zeta^+) \quad et \quad \lim_{\substack{\zeta^-\to\zeta_0\\ \zeta^-\in l_j}} g_k(\zeta^-)$$

existent. Elles sont bornées par M^k pour $M\gg0$ et de plus

$$\lim_{\substack{\zeta^+\to\zeta_0\\ \zeta^+\in l_i}} g_k(\zeta^+)-\lim_{\substack{\zeta^-\to\zeta_0\\ \zeta^-\in l_j}} g_k(\zeta^-)=(g_0(\Omega_i)-g_0(\Omega_j))\,z_2^k(\zeta_0).$$

(ii) *On a :*

$$\lim_{\substack{\zeta^+,\zeta^-\to\zeta_0\\ \zeta^+\in l_i,\zeta^-\in l_j}}\frac{R(\zeta^+,w)}{R(\zeta^-,w)}=(w-z_2(\zeta_0))^{g_0(\Omega_i)-g_0(\Omega_j)}.$$

(iii) *$R(\zeta,w)$ est rationnelle par rapport à w au-dessus de chaque Ω_i et $0<|R(\zeta,w)|<+\infty$ pour tout $\zeta\in l_i\cup l_j$, près de ζ_0 et $|w|>2M$.*

Démonstration. — (i) Soit $v\in\mathbf{C}$ tel que $|v|=1$ et $v+\zeta_0\in\mathrm{Tan}(\Pi(B),\zeta_0)$. Soit $S_\varepsilon:=\{z\in\mathbf{C}:\forall c\in\mathbf{R}$ on a $|z-\zeta_0-cv|>\varepsilon\}$. On fixe $0<\varepsilon\ll1$ tel que dans un voisinage assez petit

$U:=\{z\in\mathbf{C}:|z-\zeta_0|<\delta\}$ de ζ_0, on ait $U\cap(l_i\cup l_j)\subset S_{2\varepsilon}$ et $\Pi(B)\cap S_{\varepsilon/2}\cap U=\varnothing$. Alors

$$\begin{aligned}\lim g_k(\zeta^+)&=\lim\left(\Gamma,\ \frac{1}{2\pi i}z_2^k\frac{dz_1}{z_1-\zeta^+}\right)\\&=g_0(\Omega_i)z_2^k(\zeta_0)+\lim\left(\Gamma,\ \frac{1}{2\pi i}(z_2^k-z_2^k(\zeta_0))\frac{dz_1}{z_1-\zeta^+}\right)\\&=g_0(\Omega_i)z_2^k(\zeta_0)+\lim\left(\Gamma,\ \frac{1}{2\pi i}(z_2^k-z_2^k(\zeta_0))\frac{dz_1}{z_1-\zeta^+}\lfloor\Pi^{-1}(U^c)\right)\\&\qquad+\lim\left(\Gamma,\ \frac{1}{2\pi i}(z_2^k-z_2^k(\zeta_0))\frac{dz_1}{z_1-\zeta^+}\lfloor\Pi^{-1}(U)\right)\\&=g_0(\Omega_i)z_2^k(\zeta_0)+\left(\Gamma,\ \frac{1}{2\pi i}(z_2^k-z_2^k(\zeta_0))\frac{dz_1}{z_1-\zeta_0}\lfloor\Pi^{-1}(U^c)\right)\\&\qquad+\lim\left(\Gamma,\ \frac{1}{2\pi i}(z_2^k-z_2^k(\zeta_0))\frac{dz_1}{z_1-\zeta^+}\lfloor\Pi^{-1}(U)\right).\end{aligned}$$

Comme dans $U\cap l_i$ on a $|z_1-\zeta^+|\geqslant\varepsilon|z_1-\zeta_0|$ et $\Pi(\mathrm{Tan}(B,(\zeta_0,z_2(\zeta_0))))$ est une droite réelle (1.4), la fonction

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{z_2^k-z_2^k(\zeta_0)}{z_1-\zeta^+}$$

est uniformément bornée sur $(B\cap\Pi^{-1}(U))\times(l_i\cap U)$. D'après le théorème de Lebesgue la limite précédente

$$\begin{aligned}&=g_0(\Omega_i)z_2^k(\zeta_0)+\left(\Gamma,\ \frac{1}{2\pi i}(z_2^k-z_2^k(\zeta_0))\frac{dz_1}{z_1-\zeta_0}\lfloor\Pi^{-1}(U^c)\right)\\&\qquad+\left(\Gamma,\ \frac{1}{2\pi i}(z_2^k-z_2^k(\zeta_0))\frac{dz_1}{z_1-\zeta_0}\lfloor\Pi^{-1}(U)\right)\\&=g_0(\Omega_i)z_2^k(\zeta_0)+\left(\Gamma,\ \frac{1}{2\pi i}(z_2^k-z_2^k(\zeta_0))\frac{dz_1}{z_1-\zeta_0}\right).\end{aligned}$$

(On remarque ici que la fonction

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{z_2^k-z_2^k(\zeta_0)}{z_1-\zeta_0}$$

est définie continue sur B même pour $z_1=\zeta_0$ car la fonction $z_2(\zeta)$ est dérivable en ζ_0 générique.)

De même, on a :

$$\lim g_k(\zeta^-)=g_0(\Omega_j)z_2^k(\zeta_0)+\left(\Gamma,\ \frac{1}{2\pi i}(z_2^k-z_2^k(\zeta_0))\frac{dz_1}{z_1-\zeta_0}\right).$$

L'égalité $\lim g_k(\zeta^+) - \lim g_k(\zeta^-) = (g_0(\Omega_i) - g_0(\Omega_j))\, z_2^k(\zeta_0)$ est évidente. Soit $r \gg 0$ tel que $B \subset \{|z| \leqslant r\}$. Pour $c \in \mathbf{R}$ assez grand (peut-être dépendant de ζ_0) on a :

$$|g_0(\Omega_i) z_2^k(\zeta_0)| \leqslant (cr)^k,$$
$$|g_0(\Omega_j) z_2^k(\zeta_0)| \leqslant (cr)^k,$$
$$\left|\left(\Gamma, \frac{1}{2\pi i}(z_2^k - z_2^k(\zeta_0)) \frac{dz_1}{z_1 - \zeta_0}\right)\right| \leqslant (cr)^k.$$

Donc il existe $M \gg 0$ vérifiant (i).

(ii) De manière formelle, on a :

$$\begin{aligned}\lim \frac{R(\zeta^+, w)}{R(\zeta^-, w)} &= w^{g_0(\Omega_i) - g_0(\Omega_j)} \exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}(g_0(\Omega_i) - g_0(\Omega_j)) z_2^k(\zeta_0) w^{-k}\right) \\ &= w^{g_0(\Omega_i) - g_0(\Omega_j)} \exp\left[(g_0(\Omega_i) - g_0(\Omega_j)) \log\left(1 - \frac{z_2(\zeta_0)}{w}\right)\right] \\ &= (w - z_2(\zeta_0))^{g_0(\Omega_i) - g_0(\Omega_j)}.\end{aligned}$$

(iii) Au-dessus de Ω_0, $R=1$. Afin de montrer (iii) il suffit d'après 2.3 de montrer que si (iii) est vrai pour Ω_i, il sera vrai aussi pour Ω_j. Soient $R := P/Q$ la représentation irréductible de R avec P, Q polynômes par rapport à w, le coefficient dominant de Q valant 1, $m := \max(0, |g_0(\Omega_i) - g_0(\Omega_j)|)$ et $Q(\zeta^+, w)(w - z_2(\zeta_0))^m = \sum_{k=0}^{s} b_k(\zeta^+) w^k$. On remarque d'après (i) et (ii) que dans un petit voisinage U de ζ_0, les séries $R(\zeta^+, w)$ et $R(\zeta^-, w)$ convergent uniformément pour $|w| \geqslant 2M$, avec $\zeta^+ \in l_i$, $\zeta^- \in l_j$, et définissent des fonctions holomorphes sans zéro, localement bornées. On peut écrire :

$$R(\zeta^\pm, w) = \sum_{k=-\infty}^{g_0(\zeta^\pm)} F_k(\zeta^\pm) w^k$$

où chaque F_k est déterminé comme un polynôme d'un nombre fini des g_j. On trouve facilement que $F_{g_0(\zeta^\pm)}(\zeta^\pm) = 1$, donc le coefficient dominant de Q est aussi 1. Comme la représentation $R = P/Q$ est irréductible, on a $P(\zeta^+, w) = \prod (w - x_j(\zeta^+))$ et $Q(\zeta^+, w) = \prod (w - y_j(\zeta^+))$ où x_j et y_j sont les zéros et les pôles de R. Ceci implique que les coefficients de P et de Q sont bornés sur $l_i \cap U$. Soit $(\zeta_k^+)_{k \in \mathbf{N}} \subset l_i \cap U$, $\lim_{k \to \infty} \zeta_k^+ = \zeta_0$, telle que les polynômes $P(\zeta_k^+, w)$ et $Q(\zeta_k^+, w)$ tendent vers les polynômes $P_1(w)$ et $Q_1(w)$ uniformément sur $3M \leqslant |w| \leqslant 5M$. Les fonctions rationnelles $R(\zeta_k^+, w)$ tendent vers P_1/Q_1 aussi uniformément sur $3M \leqslant |w| \leqslant 5M$. D'après (ii) les coefficients de w^j avec $j<0$ de la série $Q(\zeta_k^+, w)(w - z_2(\zeta_0))^m R(\zeta^-, w)$, déterminés par la formule de Cauchy sur $|w| = 4M$, tendent vers 0, i.e.

$$\lim \begin{pmatrix} F_{-1} & F_{-2} & \dots & F_{-s-1} \\ F_{-2} & F_{-3} & \dots & F_{-s-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{-k} & F_{-k-1} & \dots & F_{-k-s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} (\zeta^-) \lim \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} (\zeta_k^+) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Comme $b_s=1$ l'égalité précédente montre que pour tout multi-indice $(k_1, k_2, ..., k_{s+1})$ d'entiers positifs on a :

$$\lim_{\zeta^- \to \zeta_0} \det a^{k_1,\dots,k_{s+1}} = 0$$

(la notation $a^{k_1,\dots,k_{s+1}}$ est définie dans 1.9). Ceci est valable pour H^1-presque tout $\zeta_0 \in b\Omega_i \cap b\Omega_j$. D'après 1.7, $\det a^{k_1,\dots,k_{s+1}}=0$, puis d'après 1.9, R est rationnelle par rapport à w au-dessus de Ω_j. □

On définit $V_\alpha := i\pi d'd'' \log |R_\alpha(z_1 - \alpha z_2, z_2)|$. Le lemme 4.2 (iii) implique que V_α est une 1-chaîne holomorphe de $\mathbf{C}^2 \setminus \Pi_\alpha^{-1}(\Pi_\alpha(B))$.

LEMME 4.3. — *Les chaînes V_α et V_0 coïncident dans l'intersection des ouverts où elles sont définies, de sorte qu'il existe une unique 1-chaîne holomorphe V dans l'ouvert D qui prolonge chaque V_α.*

Démonstration. — On note $D_\alpha := \Pi_\alpha^{-1}(\mathbf{C} \setminus \Pi(B))$. Soit $Y \subset \mathbf{C}$ l'ensemble des $\alpha \in \mathbf{C}$ tels que Π_α vérifie 1.4 (ii) et 1.5 pour $A := B$ et $k := 1$. D'après 1.4 (ii) et 1.5, Y est un sous-ensemble dense dans $\mathbf{C}$, il est muni de la topologie induite par $\mathbf{C}$. Pour montrer 4.3 il suffit de montrer que, pour tous $\alpha_0 \in Y$, $\alpha_1 \in Y$ et toute composante irréductible T de $V_{\alpha_0} \cap D_{\alpha_1}$ avec la multiplicité $m \in \mathbf{Z}$, $V_{\alpha_1} \cap D_{\alpha_0}$ contient T avec la multiplicité m. On montre d'abord que pour un $\alpha \in Y$ fixé, s'il existe un point $z_0 \in T$ et un voisinage ouvert $U \subset D_\alpha$ de z_0 tel que $V_\alpha \cap U$ contienne $T \cap U$ avec la multiplicité m, alors V_α contient $T \cap D_\alpha$ aussi avec la multiplicité m. Sans perdre en généralité, on peut supposer que $\alpha=0$ et que Ω_i est la composante connexe de $\mathbf{C} \setminus \Pi(B)$ contenant $\Pi(z_0)$. Il suffit de montrer que pour un point $z \in T \cap D$, il existe un voisinage $U_z \subset D$ de z tel que $V_0 \cap U_z$ contienne $T \cap U_z$ avec la multiplicité m. Soit $\gamma \subset T$ un chemin joignant z_0 et z tel que $\Pi(\gamma)$ soit une ligne brisée (i.e. une courbe réelle qui est une réunion finie de segments de droites réelles) et coupe $\Pi(B)$ transversalement. D'une manière analogue à 2.3 et 6.1, on montre qu'il existe une suite de composantes connexes $\Omega_{i_1}, \Omega_{i_2}, ..., \Omega_{i_s}$, des courbes réelles $\gamma_k \subset \gamma$ joignant z et un point $z_k \in \gamma$ telle que $\Omega_{i_1} = \Omega_i$, $\Pi(z) \in \Omega_{i_s}$, $\gamma_s = \gamma$, Ω_{i_k} et $\Omega_{i_{k+1}}$ soient adjacentes, $\gamma_k \subset \gamma_{k+1}$ pour tout $k=1, 2, ..., s-1$, et $\Pi(\gamma_k) \subset \bigcup_{j=1}^k \Omega_j$ pour tout $k=1, 2, ..., s$. Cela nous permet de faire une récurrence, i.e. il suffit de considérer le cas où

$s=2$. Soit a le point d'intersection de $\Pi(\gamma)$ et $b\Omega_{i_1}\cap b\Omega_{i_2}$. Soit Ω un petit voisinage de a tel que la composante irréductible T' de $T\cap\Pi^{-1}(\Omega)$ contenant $b:=\Pi^{-1}(a)\cap\gamma$ soit le graphe d'une fonction holomorphe f au-dessus de Ω. On peut choisir Ω tel que $T'\subset D$ car $b\in D$. On note $K:=b\Omega_{i_1}\cap b\Omega_{i_2}\cap\Omega$, $\Omega'_{i_1}:=\Omega_{i_1}\cap\Omega$, $\Omega'_{i_2}:=\Omega_{i_2}\cap\Omega$. Alors $H^1(K)>0$. La fonction $(z_2-f(z_1))^{-m}R(z_1,z_2)$ est rationnelle par rapport à z_2 au-dessus de Ω dont le support des zéros et des pôles au-dessus de Ω'_{i_1} ne contient pas $T'\cap\Pi^{-1}(\Omega'_{i_1})$. Il faut montrer qu'elle l'est aussi sur $\Pi^{-1}(\Omega_{i_2})$. Supposons par exemple que cette fonction s'annule sur $T'\cap\Pi^{-1}(\Omega'_{i_2})$ dans $\Pi^{-1}(\Omega'_{i_2})$. On écrit cette fonction comme quotient irréductible des deux polynômes par rapport à z_2 au-dessus de Ω'_{i_2}:

$$(z_2-f(z_1))^{-m}R(z_1,z_2)=\frac{(z_2-f(z_1))P_2(z_1,z_2)}{Q_2(z_1,z_2)}$$

et sur $\Pi^{-1}(\Omega'_{i_1})$:

$$(z_2-f(z_1))^{-m}R(z_1,z_2)=\frac{P_1(z_1,z_2)}{Q_1(z_1,z_2)}.$$

Alors d'après 4.2 (ii) pour des arcs non tangentiels $l_1\subset\Omega'_{i_1}$ et $l_2\subset\Omega'_{i_2}$ de sommet $x\in K$ (x un point générique de K) on a :

$$\lim_{\substack{x^+\to x\\ x^+\in l_1}} P_1(x^+,f(x^+))\lim_{\substack{x^-\to x\\ x^-\in l_2}} Q_2(x^-,f(x^-))=0.$$

Ceci est valable pour H^1-presque tout $x\in K$ et quelque soient l_1,l_2 non-tangentiels de sommet x. Donc pour un $x\in K$ fixé on a :

$$\text{soit}\quad \lim_{\substack{x^+\to x\\ x^+\in l_1}} P_1(x^+,f(x^+))=0\quad\text{soit}\quad \lim_{\substack{x^-\to x\\ x^-\in l_2}} Q_2(x^-,f(x^-))=0.$$

Autrement dit (d'après 1.7), soit $P_1(x^+,f(x^+))=0$ soit $Q_2(x^-,f(x^-))=0$. C'est une contradiction.

Soit $Y_k\subset Y$ l'ensemble des α tels que V_α contienne $T\cap D_\alpha$ avec la multiplicité k pour tout $k\in\mathbf{Z}$. D'après ce qui précède, les Y_k sont disjoints. On note pour tout $\alpha\in Y$, k_α le nombre entier tel que $\alpha\in Y_{k_\alpha}$. Il reste à montrer que k_α ne dépend pas de α. Pour cela il est suffisant de prouver que pour tout $k\in\mathbf{Z}$, $\alpha^0\in\overline{Y}_k$ ($\overline{Y}_k$ est l'adhérence de Y_k dans $\mathbf{C}$), k_α est constante au voisinage de α^0. Soit $U_z\subset D_{\alpha^0}$ un petit voisinage ouvert simplement connexe d'un point $z\in T\cap D_{\alpha^0}$, $R\subset\mathbf{C}$ un voisinage de α^0 tels que $U_z\subset\subset\bigcap_{\alpha\in R}D_\alpha$. On remarque d'après 4.2 (iii) et 1.9 que R_α définira dans D_α une fonction rationnelle par rapport à z_2 non pas seulement pour α vérifiant 1.4 mais pour tout $\alpha\in\mathbf{C}$. Dans $\bigcap_{\alpha\in R}D_\alpha$, pour $|z_2|\gg 0$ on pose :

$$\varphi_\alpha(z_1,z_2):=\log R_\alpha(z_1-\alpha z_2,z_2)=g_{0,\alpha}(z_1-\alpha z_2)\log z_2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}g_{k,\alpha}(z_1-\alpha z_2)z_2^{-k}.$$

On a :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \alpha}(z_1,z_2) &= -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[\frac{\partial g_{k,\alpha}}{\partial \alpha} - z_2\frac{\partial g_{k,\alpha}}{\partial \zeta}\right](z_1-\alpha z_2)z_2^{-k} \\
&= \frac{\partial g_{1,\alpha}}{\partial \zeta}(z_1-\alpha z_2) - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}\cdot\frac{\partial g_{k,\alpha}}{\partial \alpha} - \frac{1}{k+1}z_2\frac{\partial g_{k+1,\alpha}}{\partial \zeta}\right](z_1-\alpha z_2)z_2^{-k} \\
&= \frac{\partial g_{1,\alpha}}{\partial \zeta}(z_1-\alpha z_2)
\end{aligned}
$$

car

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{k}\cdot\frac{\partial g_{k,\alpha}}{\partial \alpha} - \frac{1}{k+1}z_2\frac{\partial g_{k+1,\alpha}}{\partial \zeta} \\
&\quad = \frac{1}{k}\cdot\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\Gamma, \frac{1}{2\pi i}z_2^k\frac{d(z_1-\alpha z_2)}{z_1-\alpha z_2-\zeta}\right) - \frac{1}{k+1}\cdot\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\Gamma, z_2^{k+1}\frac{d(z_1-\alpha z_2)}{z_1-\alpha z_2-\zeta}\right) \\
&\quad = \frac{1}{k}\left(\Gamma, -\frac{1}{2\pi i}z_2^k\frac{dz_2}{z_1-\alpha z_2-\zeta}\right) + \frac{1}{k}\left(\Gamma, \frac{1}{2\pi i}z_2^{k+1}\frac{d(z_1-\alpha z_2)}{(z_1-\alpha z_2-\zeta)^2}\right) \\
&\qquad - \frac{1}{k+1}\left(\Gamma, \frac{1}{2\pi i}z_2^{k+1}\frac{d(z_1-\alpha z_2)}{(z_1-\alpha z_2-\zeta)^2}\right) \\
&\quad = \frac{1}{k}\left(\Gamma, -\frac{1}{2\pi i}z_2^k\frac{dz_2}{z_1-\alpha z_2-\zeta}\right) + \frac{1}{k(k+1)}\left(\Gamma, \frac{1}{2\pi i}z_2^{k+1}\frac{d(z_1-\alpha z_2)}{(z_1-\alpha z_2-\zeta)^2}\right) \\
&\quad = \frac{1}{k(k+1)}\cdot\frac{1}{2\pi i}(\Gamma, d(z_2^{k+1}(z_1-\alpha z_2-\zeta)^{-1})) = 0
\end{aligned}
$$

car $d\Gamma = 0$.

Soit $A(z_1,z_2,\alpha)$ une fonction définie sur $U_z \times R$ telle que :

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha}(z_1,z_2,\alpha) = -\frac{\partial g_{1,\alpha}}{\partial \zeta}(z_1-\alpha z_2).$$

On pose $\widetilde{R}_\alpha := e^A R_\alpha$ définie dans $U_z \times R$. Alors $\widetilde{R}_\alpha$ est indépendante de α et

$$\frac{i}{\pi}d'd''\log|\widetilde{R}_\alpha| = \frac{i}{\pi}d'd''\log|R_\alpha|$$

sur U_z pour tout $\alpha \in R$. Donc dans $R \cap Y$ la fonction k_α ne dépend pas de α. □

PROPOSITION 4.4. — *$M([V]) \leqslant 2rM(\Gamma)$ et $M(d[V]) \leqslant 4M(\Gamma)$.*

Démonstration. — Le support de V est un revêtement ramifié fini au-dessus de chaque composante Ω_i. Soit n_i le nombre de feuillets de ce revêtement comptés avec la valeur absolue des coefficients de la chaîne V, i.e. la masse de la tranche $\langle V, \Pi, \zeta\rangle$ au sens de Federer [13, 4.3.1] pour $\zeta \in \Omega_i$ générique.

D'après le théorème d'unicité 1.7 et le lemme 4.2, si Ω_i et Ω_j sont des composantes adjacentes les feuillets du support de V au-dessus de Ω_i sont les prolongements analytiques des feuillets au-dessus de Ω_j sauf peut-être un et à l'inverse. D'où :

$$|n_i - n_j| \leqslant |g_0(\Omega_i) - g_0(\Omega_j)|.$$

Cette inégalité permet d'adapter la démonstration donnée par Lawrence [19, p. 411] pour un sous-ensemble analytique de la manière suivante :

Pour tout $m \in \mathbf{N}$ on pose $m_j := \min(m, n_j)$ et $T := \sum n_j \Omega_j$, $T_m := \sum m_j \Omega_j$ les 1-chaînes de $\mathbf{C}$. Il est clair que T_m définit un courant d'intégration de masse finie. Pour tout point générique $x \in \Pi(B)$ on appelle $i(x)$, $j(x)$ les nombres entiers tels que $\Omega_{i(x)}$ et $\Omega_{j(x)}$ soient adjacentes, $x \in b\Omega_{i(x)} \cap b\Omega_{j(x)}$ et les droites tangentielles à $b\Omega_{i(x)}$, $b\Omega_{j(x)}$ et $\Pi(B)$ coïncident. On a :

$$\begin{aligned} M(T_m) &= \tfrac{1}{2} i \sum m_j \int_{\Omega_j} dx \wedge d\bar{x} = \tfrac{1}{2} i \sum m_j \int_{b\Omega_j} x\, d\bar{x} \\ &\leqslant \int_{\Pi(B)} |n_{i(x)} - n_{j(x)}| \cdot |x\, d\bar{x}| \leqslant \int |g_0(\Omega_{i(x)}) - g_0(\Omega_{j(x)})| \cdot |x\, d\bar{x}| \\ &\leqslant \int |\eta(x, z_2(x))| \cdot |x\, d\bar{x}| \leqslant r M(\Gamma). \end{aligned}$$

Donc $M(T) = \lim_{m \to \infty} M(T_m) \leqslant r M(\Gamma)$. La même inégalité pour Π_1 permet d'avoir $M([V]) \leqslant 2r M(\Gamma)$.

Alors $[V]$ est un courant plat, donc $d[V]$ l'est aussi. Soit l l'application linéaire de $\mathbf{C}^2$ dans $\mathbf{R}$, $l(z) := \operatorname{Re} z_1$. Pour H^1-presque tout $\zeta \in \mathbf{R}$ le courant $\langle [V], l, \zeta \rangle$ est un courant d'intégration sur une combinaison finie à coefficients entiers de courbes réelles de longueurs finies (car $[V]$ est de masse finie). Donc

$$\langle d[V], l, \zeta \rangle = \sum_{z \in B \cap l^{-1}(\zeta)} k_z [\{z\}].$$

D'après 4.2 (ii) et 4.1 (ii), $|k_z| = |g_0(\Omega_{i(\Pi(z))}) - g_0(\Omega_{j(\Pi(z))})| = |\eta(z)|$. Donc d'après Federer [13, 4.3.2],

$$M(d[V] \lfloor d \operatorname{Re} z_1) = \int_{\mathbf{R}} \sum |k_z| \, d\zeta \leqslant M(\Gamma).$$

De même manière,

$$M(d[V] \lfloor d \operatorname{Im} z_1) \leqslant M(\Gamma), \quad M(d[V] \lfloor d \operatorname{Re} z_2) \leqslant M(\Gamma) \quad \text{et} \quad M(d[V] \lfloor d \operatorname{Im} z_2) \leqslant M(\Gamma),$$

d'où $M(d[V]) \leqslant 4M(\Gamma)$. $\square$

PROPOSITION 4.5 (formule de Stokes). — $d[V]=\Gamma$.

Démonstration. — D'après 4.4, on a $[V]\in F_2(\mathbf{C}^2)$ et donc $d[V]\in F_1(\mathbf{C}^2)$. Comme $M(d[V])<+\infty$, il existe un 1-champ de vecteurs ξ défini H^1-presque partout sur B tel que $d[V]=H^1\lfloor B\wedge\xi$ (d'après 1.8). Le lemme 4.2 (ii) montre que $(\Pi)_*(d[V]-\Gamma)=0$ et de même on a $(\Pi_1)_*(d[V]-\Gamma)=0$. Ceci entraîne $\xi=\eta$, H^1-presque partout sur $\operatorname{supp}\Gamma$. Donc $d[V]=\Gamma$. □

5. Démonstration du théorème 3.1 pour le cas où $p=n-1$; méthode de tranchage

Soit $l\colon \mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^{p-1}$, $l:=(l_1,l_2,\dots,l_{p-1})$, une projection linéaire vérifiant 1.4, i.e. pour H^{2p-2}-presque tout $\zeta\in\mathbf{C}^{p-1}$ la tranche $\langle\Gamma,l,\zeta\rangle$ est un courant rectifiable fermé de dimension 1 [13], dont le support vérifie A_1. Soient χ_{ε_j} des fonctions de classe C^∞, définies sur $\mathbf{C}$, $\chi_{\varepsilon_j}(x)=0$ pour $|x|\ll\varepsilon_j$ et $\chi_{\varepsilon_j}=1/2\pi i$ pour $|x|\geqslant\varepsilon_j$.

LEMME 5.1. — *Pour toute* $(1,0)$*-forme* φ *holomorphe au voisinage de* $\{l(z)=\zeta\}\cap B$:

$$\left(\Gamma,\varphi\wedge\bigwedge_{j=1}^{p-1}d\chi_{\varepsilon_j}(l_j-\zeta_j)\wedge\frac{dl_j}{l_j-\zeta_j}\right)$$

est indépendante des χ_{ε_j} *pour lesquelles* φ *est holomorphe au voisinage de*

$$\bigcap_{j=1}^{p-1}\{|l_j(z)-\zeta_j|\leqslant\varepsilon_j\}\cap B,$$

et égale à $(\langle\Gamma,l,\zeta\rangle,\varphi)$. *En particulier,* $\langle\Gamma,l,\zeta\rangle$ *vérifie la condition du moment.*

Démonstration. — Sans perdre en généralité, pour montrer l'indépendance de la formule ci-dessus dans 5.1, il suffit de montrer l'égalité suivante pour $\varepsilon_1'<\varepsilon_1$:

$$\left(\Gamma,\varphi\wedge\bigwedge_{j=1}^{p-1}d\chi_{\varepsilon_j}(l_j-\zeta_j)\wedge\frac{dl_j}{l_j-\zeta_j}\right)$$
$$=\left(\Gamma,\varphi\wedge d\chi_{\varepsilon_1'}(l_1-\zeta_1)\wedge\frac{dl_1}{l_1-\zeta_1}\wedge\bigwedge_{j=2}^{p-1}d\chi_{\varepsilon_j}(l_j-\zeta_j)\wedge\frac{dl_j}{l_j-\zeta_j}\right).$$

Comme la forme φ est holomorphe au voisinage de $\bigcap_{j=1}^{p-1}\{|l_j(z)-\zeta_j|\leqslant\varepsilon_j\}\cap B$ et Γ est maximalement complexe, on a :

$$\left(\Gamma,\varphi\wedge\bigwedge_{j=1}^{p-1}d\chi_{\varepsilon_j}(l_j-\zeta_j)\wedge\frac{dl_j}{l_j-\zeta_j}-\varphi\wedge d\chi_{\varepsilon_1'}(l_1-\zeta_1)\wedge\frac{dl_1}{l_1-\zeta_1}\wedge\bigwedge_{j=2}^{p-1}d\chi_{\varepsilon_j}(l_j-\zeta_j)\wedge\frac{dl_j}{l_j-\zeta_j}\right)$$
$$=\left(\Gamma,d\left(\varphi(\chi_{\varepsilon_1}(l_1-\zeta_1)-\chi_{\varepsilon_1'}(l_1-\zeta_1))\wedge\frac{dl_1}{l_1-\zeta_1}\wedge\bigwedge_{j=2}^{p-1}d\chi_{\varepsilon_j}(l_j-\zeta_j)\wedge\frac{dl_j}{l_j-\zeta_j}\right)\right).$$

La partie droite de l'égalité précédente est égale à 0 car Γ est fermé et la forme

$$\varphi(\chi_{\varepsilon_1}(l_1-\zeta_1)-\chi_{\varepsilon_1'}(l_1-\zeta_1))\wedge\frac{dl_1}{l_1-\zeta_1}\wedge\bigwedge_{j=2}^{p-1}d\chi_{\varepsilon_j}(l_j-\zeta_j)\wedge\frac{dl_j}{l_j-\zeta_j}$$

est définie sur B, nulle si $|l_j-\zeta_j|\ll\varepsilon_j$ pour un certain $0<j\leqslant p-1$. D'où l'égalité qu'il faut démontrer.

D'après Federer [13], on a:

$$(\langle\Gamma,l,\zeta\rangle,\varphi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\Gamma,\ \frac{1_{D_\varepsilon}(l(z)-\zeta)}{\pi^{2(p-1)}\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\dots\varepsilon_{p-1}^2}\bigwedge_{j=1}^{p-1}d\,\mathrm{Re}(l(z))\wedge d\,\mathrm{Im}(l(z))\wedge\varphi\right),$$

où $\varepsilon:=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{p-1})$, $D_\varepsilon:=\{x\in\mathbf{C}^{p-1}:|x_j|<\varepsilon_j\}$ et 1_{D_ε} est égale à 1 sur D_ε, 0 ailleur. On remarque de plus que :

$$d\frac{|l_j(z)-\zeta_j|^2}{2\pi i\varepsilon_j^2}\wedge\frac{dl_j(z)}{l_j(z)-\zeta_j}=\frac{1}{\pi\varepsilon_j^2}\,d\,\mathrm{Re}(l(z))\wedge d\,\mathrm{Im}(l(z)).$$

Donc il existe des fonctions χ_{ε_j} telles que :

$$(\langle\Gamma,l,\zeta\rangle,\varphi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\Gamma,\ \varphi\wedge\bigwedge_{j=1}^{p-1}d\chi_{\varepsilon_j}(l_j-\zeta_j)\wedge\frac{dl_j}{l_j-\zeta_j}\right).$$

La partie à gauche est indépendante de ε assez petit, et la démonstration du lemme est complète. □

On considère une application linéaire bijective $\Pi:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$, $\Pi=(\Pi_1,\Pi_2,\dots,\Pi_n)$. On note $\Pi':=(\Pi_1,\Pi_2,\dots,\Pi_{n-1})$ et $\Pi_s':=(\Pi_1,\Pi_2,\dots,\Pi_{s-1},\Pi_{s+1},\dots,\Pi_{n-1})$. On suppose que Π_s' vérifie 1.4 pour tout $s=1,\dots,n-1$. Le lemme 5.1 permet de définir pour tout $\zeta\in\mathbf{C}^{n-1}\setminus\Pi'(B)$, $\zeta^s:=(\zeta_1,\dots,\zeta_{s-1},\zeta_{s+1},\dots,\zeta_{n-1})$:

$$\begin{aligned} g_{\Pi,k}(\zeta) &:= \left(\Gamma,\ \frac{1}{2\pi i}\Pi_n^k\wedge\frac{d\Pi_s}{\Pi_s-\zeta_s}\wedge\bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n-1}d\chi_{\varepsilon_j}(\Pi_j-\zeta_j)\wedge\frac{d\Pi_j}{\Pi_j-\zeta_j}\right)\\ &= \left(\langle\Gamma,\Pi_s',\zeta^s\rangle,\ \frac{1}{2\pi i}\Pi_n^k\wedge\frac{d\Pi_s}{\Pi_s-\zeta_s}\right),\end{aligned}$$

$$R_\Pi(\zeta,w):=w^{g_{\Pi,0}(\zeta)}\exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}g_{\Pi,k}(\zeta)w^{-k}\right)\quad\text{pour tout }\zeta\in\mathbf{C}^{n-1}\setminus\Pi'(B).$$

LEMME 5.2. — *Les fonctions $g_{\Pi,k}$ sont indépendantes de s.*

Démonstration. — Il suffit de montrer pour $1\leqslant s,s'\leqslant n-1$ et $0\leqslant\varepsilon_j\ll 1$:

$$\begin{aligned}\Bigg(\Gamma,\ \Pi_n^k\wedge\frac{d\Pi_s}{\Pi_s-\zeta_s}\wedge\bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n-1}d\chi_{\varepsilon_j}(\Pi_j-\zeta_j)\wedge\frac{d\Pi_j}{\Pi_j-\zeta_j}-\Pi_n^k\wedge\frac{d\Pi_{s'}}{\Pi_{s'}-\zeta_{s'}}&\\ \wedge\bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq s'}}^{n-1}d\chi_{\varepsilon_j}(\Pi_j-\zeta_j)\wedge\frac{d\Pi_j}{\Pi_j-\zeta_j}\Bigg)&=0.\end{aligned}$$

Comme Γ est maximalement complexe, pour les ε_j vérifiant

$$\bigcap_{j=1}^{n-1}\{|\Pi_j(z)-\zeta_j|\leqslant\varepsilon_j\}\cap B=\varnothing$$

on a :

$$\begin{aligned}
&\Big(\Gamma,\Pi_n^k\wedge\frac{d\Pi_s}{\Pi_s-\zeta_s}\wedge\bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n-1}d\chi_{\varepsilon_j}(\Pi_j-\zeta_j)\wedge\frac{d\Pi_j}{\Pi_j-\zeta_j}-\Pi_n^k\wedge\frac{d\Pi_{s'}}{\Pi_{s'}-\zeta_{s'}}\wedge\bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq s'}}^{n-1}d\chi_{\varepsilon_j}(\Pi_j-\zeta_j)\wedge\frac{d\Pi_j}{\Pi_j-\zeta_j}\Big)\\
&=\Big(\Gamma,(-d\chi_{\varepsilon_{s'}}(\Pi_{s'}-\zeta_{s'})-d\chi_{\varepsilon_s}(\Pi_s-\zeta_s))\wedge\Pi_n^k\wedge\frac{d\Pi_s}{\Pi_s-\zeta_s}\wedge\frac{d\Pi_{s'}}{\Pi_{s'}-\zeta_{s'}}\\
&\qquad\qquad\wedge\bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq s,s'}}^{n-1}d\chi_{\varepsilon_j}(\Pi_j-\zeta_j)\wedge\frac{d\Pi_j}{\Pi_j-\zeta_j}\Big)\\
&=\Big(\Gamma,d\Big(\Big(\frac{1}{2\pi i}-\chi_{\varepsilon_{s'}}(\Pi_{s'}-\zeta_{s'})-\chi_{\varepsilon_s}(\Pi_s-\zeta_s)\Big)\wedge\Pi_n^k\wedge\frac{d\Pi_s}{\Pi_s-\zeta_s}\wedge\frac{d\Pi_{s'}}{\Pi_{s'}-\zeta_{s'}}\\
&\qquad\qquad\wedge\bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq s,s'}}^{n-1}d\chi_{\varepsilon_j}(\Pi_j-\zeta_j)\wedge\frac{d\Pi_j}{\Pi_j-\zeta_j}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Comme le courant Γ est fermé et que la forme

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{2\pi i}-\chi_{\varepsilon_{s'}}(\Pi_{s'}-\zeta_{s'})-\chi_{\varepsilon_s}(\Pi_s-\zeta_s)\Big)\wedge\Pi_n^k\wedge\frac{d\Pi_s}{\Pi_s-\zeta_s}\wedge\frac{d\Pi_{s'}}{\Pi_{s'}-\zeta_{s'}}\\
&\qquad\qquad\wedge\bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq s,s'}}^{n-1}d\chi_{\varepsilon_j}(\Pi_j-\zeta_j)\wedge\frac{d\Pi_j}{\Pi_j-\zeta_j}
\end{aligned}$$

est définie au voisinage de B, nulle si $|\Pi_j-\zeta_j|\ll\varepsilon_j$ pour un certain $1\leqslant j\leqslant n-1$, la dernière partie de l'égalité précédente est nulle. □

LEMME 5.3. — (i) $g_{\Pi,0}(\zeta)\in\mathbf{Z}$ *pour tout* $\zeta\notin\Pi'(B)$.

(ii) R_Π *est rationnelle par rapport à* w.

Démonstration. — (i) D'après 5.1 c'est un corollaire de 4.1 appliqué à $\Gamma:=\langle\Gamma,\Pi'_s,\zeta^s\rangle$.

(ii) D'après 5.1 et 4.2 (iii) appliqué à $\Gamma:=\langle\Gamma,\Pi'_s,\zeta^s\rangle$, la fonction R_Π est rationnelle par rapport à chaque variable. Elle est donc rationnelle. □

On pose $S_\Pi:=\Pi_*^{-1}(i\pi d'd''\log|R_\Pi(\zeta,\zeta_n)|)$.

LEMME 5.4. — *Pour* H^{2n-2}*-presque tout* $\zeta\in\mathbf{C}^{n-1}$ *la* 1*-chaîne* $S_\Pi\cap\Pi_s'^{-1}(\zeta^s)$ *coïncide avec la* 1*-chaîne holomorphe construite comme dans le paragraphe* 4 *pour le courant* $\Gamma:=\langle\Gamma,\Pi'_s,\zeta^s\rangle$ *défini dans* $\mathbf{C}^2\simeq\Pi_s'^{-1}(\zeta^s)$.

Démonstration. — C'est un corollaire de 5.1. □

LEMME 5.5. — *S_Π se prolonge à D en une p-chaîne holomorphe unique V indépendante de Π.*

Démonstration. — Soit $\widetilde{\Pi}$ une application linéaire bijective générique de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$, $\widetilde{\Pi}=(\widetilde{\Pi}_1,...,\widetilde{\Pi}_n)$. On pose $\widetilde{\Pi}^k:=(\widetilde{\Pi}_1,...,\widetilde{\Pi}_{k-1},\widetilde{\Pi}_k,\Pi_{k+1},...,\Pi_n)$ pour $k=0,1,...,n-1$. On sait que la 1-chaîne holomorphe construite dans le paragraphe 4 ne dépend pas du système des coordonnées choisi. Grâce à 5.4, les chaînes $S_{\widetilde{\Pi}^k}$ et $S_{\widetilde{\Pi}^{k+1}}$ coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition pour $k=0,1,...,n-2$, et $S_{\widetilde{\Pi}}$ ne dépend que de $\widetilde{\Pi}'$. Ceci implique que S_Π et $S_{\widetilde{\Pi}}$ coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition. D'où le lemme. □

PROPOSITION 5.6. — *$M([V])<\infty$, $M(d[V])<\infty$.*

Démonstration. — Supposons que toute projection linéaire $l=(l_1,l_2,...,l_{p-1})\in G(p-1,n)$ de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^{p-1}$ où $l_j(z)$ sont d'un des types z_s, z_s+z_m, z_s+iz_m, vérifie 1.4 pour $A:=B$, $k:=p-1$. D'après 5.4 et 4.4 on a :

$$M(\langle[V],l,\zeta\rangle)\leqslant 2rM(\langle\Gamma,l,\zeta\rangle)\quad\text{et}\quad M(\langle[dV],l,\zeta\rangle)\leqslant 4M(\langle\Gamma,l,\zeta\rangle)$$

pour H^{2p-2}-presque tout $\zeta\in\mathbf{C}^{p-1}$. D'après Federer [13, 4.3.2] on a :

$$\begin{aligned}M([V]\lfloor dl_1\wedge d\bar{l}_1\wedge dl_2\wedge...\wedge d\bar{l}_{p-1}) &= \int M(\langle[V],l,\zeta\rangle)\,d\operatorname{Re}\zeta_1\,d\operatorname{Im}\zeta_1\,...\,d\operatorname{Im}\zeta_{p-1}\\ &\leqslant \int 2rM(\langle\Gamma,l,\zeta\rangle)\,d\operatorname{Re}\zeta_1\,d\operatorname{Im}\zeta_1\,...\,d\operatorname{Im}\zeta_{p-1}\\ &\leqslant 2rM(\Gamma)<+\infty\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}M([dV]\lfloor dl_1\wedge d\bar{l}_1\wedge dl_2\wedge...\wedge d\bar{l}_{p-1}) &= \int M(\langle[dV],l,\zeta\rangle)\,d\operatorname{Re}\zeta_1\,d\operatorname{Im}\zeta_1\,...\,d\operatorname{Im}\zeta_{p-1}\\ &\leqslant \int 4M(\langle\Gamma,l,\zeta\rangle)\,d\operatorname{Re}\zeta_1\,d\operatorname{Im}\zeta_1\,...\,d\operatorname{Im}\zeta_{p-1}\\ &\leqslant 4M(\Gamma)<+\infty.\end{aligned}$$

Les inégalités ci-dessus appliquées à tout l impliquent $M([V])<+\infty$ et $M(d[V])<+\infty$ car

— le courant $[V]$ est de bidimension (p,p),

— le courant $d[V]$ est la somme de deux courants de bidimensions $(p,p-1)$ et $(p-1,p)$,

— les formes $dz_k\wedge d\bar{z}_j$ peuvent être écrites sous les formes :

$$\begin{aligned}dz_k\wedge d\bar{z}_j = &-\tfrac{1}{2}(1+i)\,dz_k\wedge d\bar{z}_k-\tfrac{1}{2}(1+i)\,dz_j\wedge d\bar{z}_j\\ &+\tfrac{1}{2}\,d(z_k+z_j)\wedge d(\overline{z_k+z_j})+\tfrac{1}{2}i\,d(z_k+iz_j)\wedge d(\overline{z_k+iz_j}).\end{aligned}$$ □

PROPOSITION 5.7 (formule de Stokes). — $d[V]=\Gamma$.

Démonstration. — D'après 5.6, $[V]$ est un courant plat, donc $d[V]$ l'est aussi. D'après 1.8 et 5.6, il existe un $(2n-3)$-champ de vecteurs ξ défini H^{2n-3}-presque partout sur B, tel que $dV=H^{2n-3}\lfloor B\wedge\xi$. Comme (d'après 4.5 et 5.4) $\langle d[V],l,\zeta\rangle=\langle\Gamma,l,\zeta\rangle$ pour H^{2n-4}-presque tout $\zeta\in\mathbf{C}^{n-2}$ et $H^{4(n-2)}$-presque toute projection $l\in G(n-2,n)$, on a $\xi=\eta$, H^{2n-3}-presque partout sur B. Donc $d[V]=\Gamma$. □

6. Démonstration du théorème 3.1 pour le cas général ; méthode de projection

Considérons $\Psi\in G(p,n)$ une projection linéaire de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^p$ fixée vérifiant 1.4. On appelle Ω_j les composantes connexes de $\mathbf{C}^p\setminus\Psi(B)$; Ω_0 non bornée. Deux composantes Ω_j et Ω_k sont dites *adjacentes* si $H^{2p-1}(b\Omega_j\cap b\Omega_k)>0$.

LEMME 6.1. — *Pour toute composante connexe Ω_j il existe une suite de composantes connexes $\Omega_{j_1},\Omega_{j_2},\dots,\Omega_{j_m}$; $\Omega_{j_1}=\Omega_0$; $\Omega_{j_m}=\Omega_j$ telle que Ω_{j_k} et $\Omega_{j_{k+1}}$ soient adjacentes pour tout $k=0,1,\dots,m-1$.*

Démonstration. — Soient g et h les applications linéaires de $\mathbf{C}^p$ dans $\mathbf{R}^{2p-1}$ et dans $\mathbf{R}$:

$$g(\zeta):=(\operatorname{Re}\zeta_1,\operatorname{Im}\zeta_1,\operatorname{Re}\zeta_2,\operatorname{Im}\zeta_2,\dots,\operatorname{Re}\zeta_{p-1}),\quad h(\zeta):=\operatorname{Im}\zeta_p.$$

Soient U un ouvert non vide de $\mathbf{R}^{2p-1}$, $a\in\mathbf{R}$ et $b\in\mathbf{R}$, $b\gg 0$ tels que $g^{-1}(U)\cap h^{-1}(a)\subset\Omega_j$ et $g^{-1}(U)\cap h^{-1}(b)\subset\Omega_0$. Comme $H^{2p-1}(\Psi(B))<+\infty$ il existe un compact $K\subset U$ et un entier s tels que $H^{2p-1}(K)>0$ et pour tout $x\in K$ l'ensemble $g^{-1}(x)\cap h^{-1}([a,b])\cap\Psi(B)$ a exactement s éléments. On démontre le lemme par récurrence sur s.

Pour $s=0,1$ c'est évident. Supposons qu'il soit vérifié pour $1,2,\dots,s-1$. Il existe un nombre $c\in[a,b]$ et un compact $K_1\subset K$ tels que $g^{-1}(K_1)\cap h^{-1}(c)\subset\Omega_{j'}$ pour un certain j', et pour tout $x\in K_1$ l'ensemble $g^{-1}(x)\cap h^{-1}([a,c])\cap\Phi(B)$ a un point unique. D'après l'hypothèse de récurrence il existe une suite de composantes connexes $\Omega_{j_1},\Omega_{j_2},\dots,\Omega_{j_m}$ telle que $\Omega_{j_0}=\Omega_0$, $\Omega_{j_m}=\Omega_{j'}$ et telle que Ω_{j_k}, $\Omega_{j_{k+1}}$ soient adjacentes. On sait par construction que Ω_j et $\Omega_{j'}$ sont adjacentes, donc Ω_j vérifie aussi le lemme. □

Sans perdre en généralité, on suppose que pour tout $j>0$ il existe $0\leqslant k<j$ tel que Ω_j et Ω_k soient adjacentes.

On remarque que pour toute projection linéaire $\Pi=(\Psi,h)\in G(p+1,n)$ de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^{p+1}$, $\Pi_*(\Gamma)$ vérifie les conditions du théorème 3.1. On note d'après le paragraphe 5, V_Π la p-chaîne holomorphe de $\mathbf{C}^{p+1}\setminus\Pi(B)$ telle que $d[V_\Pi]=\Pi_*(\Gamma)$. On considère $(\Psi_1,\dots,\Psi_p,h)$ comme un système de coordonnées de $\Pi(\mathbf{C}^n)$. Particulièrement on écrit $h(z)=\sum_{j=1}^n\alpha_j z_j$.

LEMME 6.2. — *Il existe une p-chaîne holomorphe unique V dans D indépendante de* Ψ *telle que* $\Pi_*(V)=V_\Pi$ *pour* $H^{2(n-p)}$*-presque toute projection* $\Pi=(\Psi,h)\in G(p+1,n)$ *de* $\mathbf{C}^n$ *dans* $\mathbf{C}^{p+1}$.

Démonstration. — On appelle S_Ψ l'ensemble des couples (T,k) où T est une p-chaîne holomorphe bornée de $\mathbf{C}^n\backslash B$, $k\in\mathbf{N}\cup\{\infty\}$ tels que $M([\Pi_*(T)])<+\infty$, $d\Pi_*(T)$ soit un courant rectifiable et tels que $\operatorname{supp}(\Pi_*(T)-V_\Pi)\cap\Psi^{-1}(\Omega_j)=\varnothing$ pour $H^{2(n-p)}$-presque toute $\Pi=(\Psi,h)\in G(p+1,n)$ et $0\leqslant j<k$. L'ensemble S_Ψ est ordonné par la loi : $(T,k)<(T',k')$ si $k<k'$ et pour tout $0\leqslant j<k$ on a $T\cap\Psi^{-1}(\Omega_j)=T'\cap\Psi^{-1}(\Omega_j)$.

S'il existe une suite croissante infinie $\{(T_s,k_s)\}_{s\in\mathbf{N}}\subset S_\Psi$, alors $V:=\lim T_s$ vérifiera le lemme. Par contre, soit (V,m) un élément maximal de S_Ψ, choisi par l'axiome de Zorn. On a $m\neq\infty$. La chaîne $\widetilde{V}_\Pi:=V_\Pi-\Pi_*(V)$ est la solution du problème du bord dans $\mathbf{C}^{p+1}$ pour $\widetilde{\Gamma}_\Pi:=\Gamma-d[\Pi_*(V)]$. Par construction dans les paragraphes 4 et 5, au-dessus de Ω_m, $\operatorname{supp}\widetilde{V}_\Pi$ est un revêtement d'un feuillet unique. Donc $\widetilde{V}_\Pi$ est définie au-dessus de Ω_m comme le graphe de la fonction $g_{h,\Psi,1}(\zeta)/g_{h,\Psi,0}(\Omega_m)$ avec la multiplicité $g_{h,\Psi,0}(\Omega_m)$, où

$$g_{h,\Psi,k}(\zeta):=\left(\widetilde{\Gamma},\ \frac{1}{2\pi i}h^k\wedge\frac{d\Psi_s}{\Psi_s-\zeta_s}\wedge\bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{p}d\chi_{\epsilon_j}(\Psi_j-\zeta_j)\wedge\frac{d\Psi_j}{\Psi_j-\zeta_j}\right)$$

définies comme dans le cas où $n=p+1$. La fonction $g_{h,\Psi,0}$ est localement constante, à valeur dans $\mathbf{Z}$ (d'après 5.3) et la fonction $g_{h,\Psi,1}$ dépend linéairement de $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ (la fonction h est définie par $h(z)=\sum_{j=1}^n\alpha_j z_j$). On peut définir dans $\Psi^{-1}(\Omega_m)$ un sous-ensemble analytique T_m de dimension pure p tel que $\Pi_*(T_m)=\operatorname{supp}\widetilde{V}_\Pi\cap\Psi^{-1}(\Omega_m)$. Comme $\Pi_*(T_m)$ se prolonge dans $\mathbf{C}^{p+1}\backslash\Pi(B)$ comme un sous-ensemble analytique pour $H^{2(n-p)}$-presque toute $\Pi=(\Psi,h)$, T_m se prolonge aussi dans $\mathbf{C}^n\backslash B$ comme un sous-ensemble analytique, noté $\widetilde{T}_m$. Pour $H^{2(n-p)}$-presque toute projection $\Pi=(\Psi,h)$ on a : $\Pi(\widetilde{T}_m)$ est irréductible dans $\mathbf{C}^{p+1}\backslash\Pi(B)$ de sorte que $\Pi(\widetilde{T}_m)\subset\operatorname{supp}\widetilde{V}_\Pi$ et $d[\Pi_*(\widetilde{T}_m)]$ soit rectifiable. Soit $(V',m'):=(V+g_{h,\Psi,0}(\Omega_m)\widetilde{T}_m,m+1)$. Alors $(V',m')\in S_\Psi$, $(V,m)<(V',m')$. C'est une contradiction. On a donc $m=\infty$, i.e. $\Pi_*(V)=V_\Pi$ pour $H^{2(n-p)}$-presque tout $\Pi=(\Psi,h)$. Afin de montrer que V est indépendante de Ψ, il suffit de montrer que pour une $\Pi=(\Psi,h)$ fixée, il existe une chaîne unique V vérifiant $\Pi_*(V)=V_\Pi$ (i.e. indépendante de système de coordonnées choisi pour $\Pi(\mathbf{C}^n)$). Soient V et V' deux p-chaînes holomorphes bornées de $\mathbf{C}^n\backslash B$ telles que $\Pi_*([V])=\Pi_*([V'])=V_\Pi$. Soient $k\in\mathbf{N}$ le plus petit entier tel que $(V-V')\cap\Psi^{-1}(\Omega_k)\neq\varnothing$ et $0\leqslant l<k$ tel que Ω_l et Ω_k soient adjacentes. Grâce au théorème d'unicité 1.7, $\operatorname{supp}(V-V')$ au-dessus de Ω_k est un revêtement d'un feuillet noté T_k. On a $V-V'=cT_k$ sur $\Psi^{-1}(\Omega_k)$, où $c\in\mathbf{Z}\backslash\{0\}$. On a $\Pi_*(V-V')=c\Pi_*(T)\neq0$ sur $\Psi^{-1}(\Omega_k)$. C'est une contradiction. □

PROPOSITION 6.3. — *$M([V])<+\infty$, $M(d[V])<+\infty$.*

Démonstration. — Sans perdre en généralité, supposons que toute projection linéaire $\Pi=(\Pi_1,\Pi_2,...,\Pi_{p+1})\in G(p+1,n)$ de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^{p+1}$, où Π_j sont d'un des types z_s, z_s+z_m, z_s+iz_m, vérifie 1.4 pour $A:=B$, $k:=p+1$, et qu'elle sépare les composantes irréductibles de $\operatorname{supp} V$. D'après 6.2 on a $M(\Pi_*([V]))<+\infty$. D'après le théorème de Wirtinger :

$$M([V])=\sum M(\Pi_{j_1,j_2,...,j_p}([V]))$$

avec $\Pi_{j_1,j_2,...,j_p}:=(z_{j_1},z_{j_2},...,z_{j_p})$ une projection linéaire de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^p$ et $(j_1,j_2,...,j_p)$ un sous-ensemble ordonné de $(1,2,...,n)$. Donc $M([V])<+\infty$. La chaîne V définit alors un courant $[V]$ plat de masse finie dans $\mathbf{C}^n$. De plus, $d[V]$ est aussi un courant plat de $\mathbf{C}^n$.

D'après 5.6 on a $M(d\Pi_*([V]))<+\infty$. Soit $l=(l_1,l_2,...,l_{2p-1})$ une application linéaire de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{R}^{2p-1}$, où $l_{2m-1}:=\Pi_m$, $l_{2m}:=\bar{\Pi}_m$ pour $m=1,2,...,p-1$ et $l_{2p-1}=\Pi_p$ ou $\bar{\Pi}_p$. Pour H^{2p-1}-presque tout $\zeta\in\mathbf{R}^{2p-1}$ la tranche $\langle d[V],l,\zeta\rangle$ est un courant plat de dimension 0 [13, 4.3.2]. Comme le support de ce courant plat est un ensemble fini, il est une somme finie des masses de Dirac à coefficients dans $\mathbf{C}$. Comme l'application Π vérifie 1.4, $M(\langle d[V],l,\zeta\rangle)=M(\Pi_*(\langle d[V],l,\zeta\rangle))$. On a d'après Federer [13, 4.3.2] :

$$\begin{aligned} M(d[V]\lfloor dl_1\wedge dl_2\wedge...\wedge dl_{2p-1}) &= \int M(\langle d[V],l,\zeta\rangle)\,d\zeta_1\,d\zeta_2\,...\,d\zeta_{2p-1} \\ &= \int M(\Pi_*(\langle d[V],l,\zeta\rangle))\,d\zeta_1\,d\zeta_2\,...\,d\zeta_{2p-1} \\ &= M(d\Pi_*([V])\lfloor dl_1\wedge dl_2\wedge...\wedge dl_{2p-1})<+\infty. \end{aligned}$$

Ceci est valable pour tout (l,Π) choisi. De plus, $d[V]$ est la somme de deux courants de bidimensions $(p,p-1)$ et $(p-1,p)$, donc $M(d[V])<+\infty$. □

PROPOSITION 6.4. — *$d[V]=\Gamma$.*

Démonstration. — D'après 6.3, $[V]$ est un courant plat, donc $d[V]$ l'est aussi. On a de plus $M(d[V])<+\infty$ (d'après 6.3), qui implique (d'après 1.8) $d[V]=H^{2p-1}\lfloor B\wedge\xi$, où ξ est un $(2p-1)$-champ de vecteurs intégrable défini H^{2p-1}-presque partout sur B. D'après 6.2 et 5.7 on a $\Pi_*(d[V])=\Pi_*(\Gamma)$ pour $H^{2(n-p-1)(p+1)}$-presque toute projection $\Pi\in G(p+1,n)$ de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^{p+1}$. Donc $\xi=\eta$ H^{2p-1}-presque partout sur B, d'où $d[V]=\Gamma$. □

7. Chaînes holomorphes à bord rectifiable dans un ouvert q-concave de $\mathbf{CP}^n$

Existence du problème. — Lawson a donné l'idée d'une surface de Riemann à bord dans $\mathbf{CP}^2$, non incluse dans une courbe algébrique, et rencontrant toute droite projective. Cette idée permet de dire que le problème du bord dans l'espace projectif ne se réduit pas en général à celui dans l'espace affine en enlevant un hyperplan projectif. Cette existence est prouvée par Fabre de manière implicite. Dans ce paragraphe nous donnons une famille explicite de surfaces de Riemann à bord dans $\mathbf{CP}^2$ rencontrant toute droite projective.

LEMME 7.1. — *L'équation* $\exp(z)-P(z)=0$ *pour* $z\in\mathbf{C}$ *admet un nombre infini de solutions, où* P *est un polynôme non nul de* z.

Démonstration. — Il y a plusieurs démonstrations pour ce lemme bien connu. Ici nous donnons une démonstration selon [8, pp. 284–285].

Supposons que $\exp(z)-P(z)$ n'admet qu'un nombre fini de solutions. Alors il existe un polynôme non nul $Q(z)$ et une fonction holomorphe $f(z)$ définie sur $\mathbf{C}$ vérifiant :

$$\exp(z)-P(z)=\exp(f(z))Q(z),$$

d'où

$$(\exp(z)-P(z))Q(z)^{-1}=\exp(f(z)).$$

Donc l'ordre de la fonction $\exp(f(z))$ définie par

$$\operatorname{ord}\exp(f(z)):=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln\max_{|z|=r}\exp(f(z))}{\ln r}$$

est égale a 1. D'après le théorème d'Hadamard [8, p. 259], il existe des nombres complexes a et b tels que $f(z)=az+b$. Il est nécessaire que $a=1$ et $1-\exp(-z)P(z)=\exp(b)Q(z)$ est donc un polynôme. C'est une contradiction. □

PROPOSITION 7.2. — *La surface de Riemann* $f(D(0,R))$ *de* $\mathbf{CP}^2$ *pour* $R\gg0$ *rencontre toute droite projective, où* $f:C\to\mathbf{CP}^2$, $f(t)=(P_1(t),P_2(t),\exp(t)-P_3(t))$, P_1,P_2,P_3 *sont des polynômes linéairement indépendants et* $D(0,R):=\{t\in\mathbf{C}:|t|<R\}$. *En particulier, pour* $P_1(t)=t$, $P_2(t)=t^2$, $P_3(t)=3$, *cette surface est isomorphe au disque unité.*

Démonstration. — On note $\mathbf{CP}^{2*}\simeq\mathbf{CP}^2$ l'ensemble des droites projectives paramétrées par $\xi=(\xi_0:\xi_1:\xi_2)$ (la droite projective correspondante est définie par $\mathbf{CP}^1_\xi=\{z=(z_0:z_1:z_2)\in\mathbf{CP}^2:z_0\xi_0+z_1\xi_1+z_2\xi_2=0\}$). D'après 7.1, $f(\mathbf{C})$ rencontre toute droite projective. Pour chaque $\xi\in\mathbf{CP}^{2*}$ on choisit un point $A_\xi=f(t_\xi)\in f(\mathbf{C})\cap\mathbf{CP}^1_\xi$ et un voisinage $U_\xi\subset\subset\mathbf{C}$ de t_ξ dans $\mathbf{C}$. Il existe des ouverts $V_\xi\subset\mathbf{CP}^2$ de ξ tels que $\mathbf{CP}^1_\alpha$ rencontre $f(U_\xi)$ pour tout $\alpha\in U_\xi$. Comme $\mathbf{CP}^{2*}$ est compact, il est recouvert par une famille finie d'ouverts $V_{\xi_1},V_{\xi_2},\dots,V_{\xi_m}$. Un $R\gg0$ tel que $U_{\xi_k}\subset D(0,R)$ pour tout $k=1,2,\dots,m$ vérifie la proposition. □

Définitions, notations et la fonction $G(\xi,\eta)$ (voir [11]). — Dans l'espace projectif $\mathbf{CP}^n$, on note $(w_0:w_1:\ldots:w_n)$ un système de coordonnées homogènes, $Q:=\{w_0=0\}$ l'hyperplan infini et $(z_j:=w_j/w_0)_{j=1}^n$ les coordonnées affines de $\mathbf{CP}^n\setminus Q$. Un sous-espace projectif de dimension $q\leqslant n$ de $\mathbf{CP}^n$ sera identifié à un point ν de la grassmannienne $G_{\mathbf{C}}(q+1,n+1)$ et on note P_ν ce sous-espace projectif.

Un domaine $X\subset\mathbf{CP}^n$ est dit (linéairement) q-concave s'il existe un ouvert connexe $U\subset G_{\mathbf{C}}(q+1,n+1)$ tel que $X=\bigcup_{\nu\in U}P_\nu$.

Désormais on considère p,q,r, des entiers vérifiant $1\leqslant p,q,r\leqslant n$, $n-p+1\leqslant q,r\leqslant n$, X un domaine q-concave de $\mathbf{CP}^n$ et Γ un courant rectifiable fermé de dimension $2p-1$ de X, de masse finie et maximalement complexe, dont le support est $(H^{2p-1},2p-1)$-rectifiable.

Soit P^r un sous-espace projectif de dimension r de $\mathbf{CP}^n$. Il définit un courant d'intégration de bidimension (r,r), noté $[P^r]$. D'après Federer [13], pour un P^r générique on peut définir le courant d'intersection de Γ et $[P^r]$, de dimension $2p+2r-2n-1$, noté $\Gamma\cap[P^r]$. Ce courant est rectifiable, fermé, de masse finie et maximalement complexe. On suppose que le courant $(2p-3)$-dimensionnel $\Gamma\cap[Q]$ l'est aussi.

Soit ν un point générique de $G_{\mathbf{C}}(n-p+1,n+1)$, défini par une matrice $p\times(n-p+1)$ $\nu=(\xi,\eta)$, où

$$\xi=\begin{pmatrix}\xi_{n-p+1}\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\eta=\begin{pmatrix}\eta^1_{n-p+1} & \cdots & \eta^{n-p}_{n-p+1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \eta^1_n & \cdots & \eta^{n-p}_n\end{pmatrix}.$$

Le sous-espace P_ν de dimension $n-p$ sera défini par les équations

$$w_j-\xi_j w_0-\eta^1_j w_1-\ldots-\eta^{n-p}_j w_{n-p}=0\quad\text{pour } j=n-p+1,\ldots,n.$$

On considère

$$\tilde g_j(w):=w_j-\xi_j w_0-\eta^1_j w_1-\ldots-\eta^{n-p}_j w_{n-p},$$
$$g_j(z):=z_j-\xi_j-\eta^1_j z_1-\ldots-\eta^{n-p}_j z_{n-p}$$

et ν' la matrice déduite de ν par suppression de la première ligne, $P_{\nu'}$ le sous-espace projectif de dimension $n-p+1$ de $\mathbf{CP}^n$ défini par $\nu'\in G_{\mathbf{C}}(n-p+2,n+1)$. Le sous-espace P_ν peut être considéré comme un hyperplan de $P_{\nu'}$ définie par $\tilde g_{n-p+1}=0$. On pose $g:=g_{n-p+1}$.

Pour un $\nu\in G_{\mathbf{C}}(n-p+1,n+1)$ générique on a $P_\nu\cap\operatorname{supp}\Gamma=\varnothing$ et $P_{\nu'}\cap Q\cap\operatorname{supp}\Gamma=\varnothing$. Soient χ_{ε_j} des fonctions C^∞ définies dans $\mathbf{CP}^n$ à valeurs dans $\mathbf{C}$, nulles au voisinage de $\{\tilde g_j=0\}$ et égale à $1/2\pi i$ en dehors d'un ε_j-voisinage $W^{\varepsilon_j}_j$ de $\{\tilde g_j=0\}$ avec la condition $\bigcap_{j=n-p+2}^n\overline{W}^{\varepsilon_j}_j\subset X\setminus Q$. Le lemme suivant est prouvé de manière analogue à celle de 5.1 :

LEMME 7.3. — *Pour toute* $(1,0)$*-forme* φ *qui est holomorphe au voisinage de* $\bigcap \overline{W}_j^{\varepsilon_j} \cap \operatorname{supp}\Gamma$,

$$\left(\Gamma, \varphi \wedge \bigwedge_{j=n-p+2}^{n} d\chi_{\varepsilon_j} \wedge \frac{dg_j}{g_j}\right)$$

est indépendant de χ_{ε_j} *et égal à* $(\Gamma \cap [P_{\nu'}], \varphi)$.

Pour tout courant $(2p-1)$-dimensionnel Γ rectifiable, fermé, maximalement complexe dans X, dont le support est $(H^{2p-1}, 2p-1)$-rectifiable et pour tout $\nu=(\xi,\eta)\in G_{\mathbf{C}}(n-p+1,n+1)$ vérifiant $P_\nu \cap \operatorname{supp}\Gamma=\varnothing$ et $P_{\nu'}\cap Q\cap \operatorname{supp}\Gamma=\varnothing$, on peut définir la fonction $G(\xi,\eta)$ à valeurs vectorielles :

$$G(\xi,\eta) := \left\{\left(\Gamma, \frac{1}{2\pi i} z_k \frac{dg}{g} \wedge \bigwedge_{j=n-p+2}^{n} d\chi_{\varepsilon_j} \wedge \frac{dg_j}{g_j}\right)\right\}_{k=1}^{n-p}.$$

D'après 7.3 pour un ν générique on a :

$$G(\xi,\eta) = \left\{\left(\Gamma \cap [P_{\nu'}], \frac{1}{2\pi i} z_k \frac{dg}{g}\right)\right\}_{k=1}^{n-p}.$$

THÉORÈME 7.4. — *Soient* $X \subset \mathbf{CP}^n$ *un domaine q-concave* $(q \geqslant n-p+1)$, Γ *un courant rectifiable, fermé, de dimension* $2p-1$ *de* X. *Supposons que* $\operatorname{supp}\Gamma$ *vérifie la condition* A_{2p-1}. *Alors les deux conditions sont équivalentes* :

(i) Γ *est le bord au sens des courants d'une p-chaîne holomorphe de* X *de masse localement finie.*

(ii) Γ *est maximalement complexe et il existe une matrice* (ξ^*, η^*) *au voisinage de laquelle*

$$D_\xi^2 G(\xi,\eta) = D_\xi^2 \left(\sum_{j=1}^{N^+} f_j^+(\xi,\eta) - \sum_{j=1}^{N^-} f_j^-(\xi,\eta)\right)$$

où $f_j^\pm = f_j = {}^t(f_{j,1}, f_{j,2}, \dots, f_{j,n-p})$, $j=1,\dots,N^\pm$, *est une fonction vectorielle holomorphe en* (ξ,η) *et satisfait au système d'équations aux dérivées partielles*

$$f_{j,k} \frac{\partial f_j}{\partial \xi_l} = \frac{\partial f_j}{\partial \eta_l^k}, \quad k=1,\dots,n-p, \; l=n-p+1,\dots,n.$$

Remarques 7.5. — (i) La condition nécessaire (i) $\Rightarrow$ (ii) est démontrée comme dans le théorème de Dolbeault–Henkin [11].

(ii) Pour un Γ donné, deux solutions du problème du bord diffèrent d'une p-chaîne holomorphe de X [11, 1.4.1].

COROLLAIRE 7.6 (voir [11, 1.5.5]). — *Dans les hypothèses du théorème* 7.4 *s'il existe un sous-espace projectif* Π *de dimension* $n-p+1$, *inclus dans* X, *tel que* $\operatorname{supp}\Gamma\cap\Pi=\varnothing$, *alors les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) Γ *est le bord au sens des courants d'une p-chaîne holomorphe de* $X\backslash\Pi$ *de masse localement finie.*

(ii) Γ *est maximalement complexe.*

COROLLAIRE 7.7 (voir [11, 1.5.2]). — *Dans les hypothèses du théorème* 7.4, *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) Γ *est le bord d'une p-chaîne holomorphe de masse localement finie de* $X\backslash P_{\nu^*}$.

(ii) Γ *est maximalement complexe et* $D_\xi^2 G(\xi,\eta)=0$ *au voisinage de* ν^*.

Démonstration de la condition suffisante de 7.4. —

LEMME 7.8 (lemme de Darboux [11, 2.4.1]). — *Si dans un voisinage de* ν^*, *la fonction vectorielle* $f(\nu)={}^t(f_1,\dots,f_{n-p})$ *est holomorphe et satisfait à*

$$f_k\frac{\partial f}{\partial \xi_l}=\frac{\partial f}{\partial \eta_l^k},\quad k=1,\dots,n-p,\ l=n-p+1,\dots,n,$$

alors le point $(f(\nu),\xi+\eta f(\nu))$ *décrit une sous-variété analytique complexe* T *de dimension complexe p, d'un ouvert de* $\mathbf{CP}^n\backslash Q$; *les* $n-p$ *premières coordonnées du point d'intersection de* P_ν *et de* T *sont les composantes de la fonction* f.

Le lemme 7.8 nous permet de réduire la démonstration de la condition suffisante de 7.4 vers celle de 7.7. On note $T_j^\pm$ pour la sous-variété complexe de dimension p construite d'après le lemme de Darboux pour $f:=f_j^\pm$ et pour $j=1,\dots,N^\pm$. On pose $T^*:=\sum_{j=1}^{N^+}T_j^+-\sum_{j=1}^{N^-}T_j^-$. Soit $U\subset X$ un voisinage à bord C^∞, assez petit de P_{ν^*}. On a $T_U^*:=T^*\cap U$ est une p-chaîne holomorphe de U. On pose $\Gamma_1:=d[T_U^*]$, $\Gamma_2:=\Gamma-\Gamma_1$ et $G_1(\xi,\eta)$ (resp. $G_2(\xi,\eta)$) est la fonction, définie comme ci-dessus pour $\Gamma:=\Gamma_1$ (resp. $\Gamma:=\Gamma_2$). D'après 7.3 et la formule de Cauchy on a $G_1(\xi,\eta)=\sum_{j=1}^{N^+}f_j^+(\xi,\eta)-\sum_{j=1}^{N^-}f_j^-(\xi,\eta)$, d'où $D_\xi^2G_2(\xi,\eta)=0$. La démonstration de la condition suffisante de 7.4 est réduite à celle de 7.7, en effet, si T_2 est une solution du problème du bord dans 7.7 pour $\Gamma:=\Gamma_2$ alors $T:=T_U^*+T_2$ sera la solution pour 7.4 car $dT=dT_U^*+dT_2=\Gamma_1+\Gamma-\Gamma_1=\Gamma$. Il nous reste à montrer la condition suffisante pour 7.7.

On considère d'abord le cas où $p=1$, X est n-concave, donc $X=\mathbf{CP}^n$. D'après 7.7 (ii) on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\Gamma,\frac{1}{2\pi i}z_k\frac{d(z_n-\xi_n-\eta_n^1z_1-\dots-\eta_n^{n-1}z_{n-1})}{z_n-\xi_n-\eta_n^1z_1-\dots-\eta_n^{n-1}z_{n-1}}\right)=0$$

pour (ξ,η) près de (ξ^*,η^*) et tout $k=1,\dots,n-1$. On considère le changement de coordonnées et le changement des paramètres suivants :

$$\begin{aligned}
W_0 &:= w_n-\xi_n^* w_0-\eta_n^{1*}w_1-\dots-\eta_n^{n-1*}w_{n-1},\\
W_i &:= w_i \quad \text{pour } i=1,2,\dots,n-1,\\
W_n &:= w_0,\\
Z_i &:= W_i/W_0 \quad \text{pour } i=1,2,\dots,n,\\
\xi' &:= \xi_n-\xi_n^*,\\
\eta' &:= \eta_n-\eta_n^*.
\end{aligned}$$

Pour ce système de coordonnées, $Q':=W_0=0$ est considéré comme l'hyperplan infini. On a :

$$\begin{aligned}
z_i &= w_i/w_0 = W_i/W_n = Z_i/Z_n \quad \text{pour } i=1,\dots,n-1,\\
z_n &= W_0/W_n+\xi_n^*+\eta_n^{1*}w_1/w_0+\dots+\eta_n^{n-1*}w_n/w_0\\
&= 1/Z_n+\xi_n^*+\eta_n^{1*}Z_1/Z_n+\dots+\eta_n^{n-1*}Z_{n-1}/Z_n,\\
g(z) &= z_n-\xi_n-\eta_n^1 z_1-\dots-\eta_n^{n-1}z_{n-1}\\
&= 1/Z_n-\xi'-\eta'^1 Z_1/Z_n-\dots-\eta'^{n-1}Z_{n-1}/Z_n.
\end{aligned}$$

On pose $l(Z):=\xi' Z_n+\eta'^1 Z_1+\dots+\eta'^{n-1}Z_{n-1}$. On a :

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\Gamma,\frac{Z_i}{Z_n}\cdot\frac{d((1-l(Z))/Z_n)}{(1-l(Z))/Z_n}\right)=0.$$

On remarque que

$$\frac{d((1-l(Z))/Z_n)}{(1-l(Z))/Z_n}=\frac{d(1-l(Z))}{1-l(Z)}-\frac{dZ_n}{Z_n},$$

d'où

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\Gamma,\frac{Z_i}{Z_n}\cdot\frac{d(1-l(Z))}{1-l(Z)}\right)=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\Gamma,\frac{Z_i}{Z_n}\cdot\frac{d((1-l(Z))/Z_n)}{(1-l(Z))/Z_n}\right)=0$$

pour tout $i=1,2,\dots,n-1$ et (ξ',η') assez petit. Pour (ξ',η') assez petit, on a :

$$\frac{1}{1-l(Z)}=\sum_{k=0}^{+\infty}l^k(Z),$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\Gamma,\frac{Z_i}{Z_n}\cdot\frac{d(1-l(Z))}{1-l(Z)}\right)&=-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\Gamma,\frac{Z_i}{Z_n}l^k(Z)\,dl(Z)\right)\\
&=-\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\Gamma,\frac{Z_i}{(k+1)Z_n}\,d\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}l^{k+1}(Z)\right).
\end{aligned}$$

Ceci implique que pour tout multi-index d'entiers non négatifs $(k,s)=(k,s_1,\dots,s_{n-1})$ on a :

$$\left(\Gamma, \frac{Z_i}{Z_n}\, dZ_1^{s_1}\dots Z_{n-1}^{s_{n-1}} Z_n^{k+2}\right)=0.$$

Comme Γ est fermé, on a :

$$\begin{aligned} 0&=\left(\Gamma, d\frac{Z_i}{Z_n}\, Z_1^{s_1}\dots Z_{n-1}^{s_{n-1}} Z_n^{k+2}\right)\\ &=\left(\Gamma, \frac{Z_i}{Z_n}\, dZ_1^{s_1}\dots Z_{n-1}^{s_{n-1}} Z_n^{k+2}\right)+\left(\Gamma, Z_1^{s_1}\dots Z_{n-1}^{s_{n-1}} Z_n^{k+2}\, d\frac{Z_i}{Z_n}\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\left(\Gamma, Z_1^{s_1}\dots Z_{n-1}^{s_{n-1}} Z_n^{k+2}\, d\frac{Z_i}{Z_n}\right)=0$$

et donc pour tout polynôme linéaire $h(Z)$ et tous $k,s\geqslant 0$ on a :

$$\left(\Gamma, \frac{h(Z)}{Z_n}\, dh^s(Z) Z_n^{k+2}\right)=0 \quad \text{et} \quad \left(\Gamma, h^s(Z) Z_n^{k+2}\, d\frac{h(Z)}{Z_n}\right)=0.$$

La première égalité nous donne :

$$s(\Gamma, h^s(Z) Z_n^{k+1}\, dh(Z))+(k+2)(\Gamma, h^{s+1}(Z) Z_n^k\, dZ_n)=0.$$

La seconde nous donne :

$$(\Gamma, h^s(Z) Z_n^{k+1}\, dh(Z))-(\Gamma, h^{s+1}(Z) Z_n^k\, dZ_n)=0.$$

D'où

$$(\Gamma, h^s(Z) Z_n^{k+1}\, dh(Z))=(\Gamma, h^{s+1}(Z) Z_n^k\, dZ_n)=0.$$

Comme Γ est fermé, on a aussi :

$$(\Gamma, h^s(Z)\, dh(Z))=(\Gamma, Z_n^k\, dZ_n)=0.$$

On a montré que pour toute projection linéaire $\Pi\colon \mathbf{CP}^n\backslash P_{\nu^*}\simeq\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^2$, $\Pi=(h(Z),Z_n)$, $\Pi^*(\Gamma)$ vérifie la condition du moment. D'après le paragraphe 6 (la méthode de projections) Γ est le bord d'une 1-chaîne holomorphe de masse finie de $\mathbf{CP}^n\backslash P_{\nu^*}$. Ceci montre réciproquement que Γ vérifie la condition du moment dans $\mathbf{CP}^n\backslash P_{\nu^*}$. D'après 7.3 :

LEMME 7.9. — *La condition* (ii) *dans* 7.7 *est équivalent à la condition suivante : Il existe un système des coordonnées homogènes de* $\mathbf{CP}^n$ *pour lequel on a* $G(\xi,\eta)=0$.

Ce lemme donne la condition du moment pour les courants d'intersection de Γ avec des sous-espaces projectifs générique $P_{\nu'}$ avec ν' près de ν^*. La démonstration de 7.7 pour le cas général réduit au cas où $p=1$. Cette méthode de réduction ressemble au cas dans $\mathbf{C}^n$ (voir les paragraphe 5 et 6). Comme le support de Γ en général n'est pas un compact de X, notre p-chaîne holomorphe construite est en général de masse localement finie. □

Bibliographie

[1] ALEXANDER, H., Polynomial approximation and hulls in sets of finite linear measure in $\mathbf{C}^n$. *Amer. J. Math.*, 93 (1971), 65–74.
[2] — The polynomial hull of a set of finite linear measure in $\mathbf{C}^n$. *J. Analyse Math.*, 47 (1986), 238–242.
[3] — Polynomial hulls and linear measure, dans *Complex Analysis* II (College Park, MD, 1985/86), pp. 1–11. Lecture Notes in Math., 1276. Springer-Verlag, Berlin–New York, 1987.
[4] — The polynomial hull of a rectifiable curve in $\mathbf{C}^n$. *Amer. J. Math.*, 110 (1988), 629–640.
[5] BISHOP, E., Analyticity in certain Banach algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 102 (1962), 507–544.
[6] — Holomorphic completions, analytic continuations and the interpolation of semi-norms. *Ann. of Math.*, 78 (1963), 468–500.
[7] — Conditions for the analyticity of certain sets. *Michigan Math. J.*, 11 (1964), 289–304.
[8] CHABAT, B., *Introduction à l'analyse complexe* I. "Mir", Moscou, 1990.
[9] DINH, T. C., Chaînes holomorphes à bord rectifiable. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 322 (1996), 1135–1140.
[10] DOLBEAULT, P. & HENKIN, G., Surfaces de Riemann de bord donné dans $\mathbf{CP}^n$, dans *Contributions to Complex Analysis and Analytic Geometry*, pp. 163–187. Aspects of Math., E 26. Vieweg, Braunschweig, 1994.
[11] — Chaînes holomorphes de bord donné dans $\mathbf{CP}^n$. *Bull. Soc. Math. France*, 125 (1997), 383–445.
[12] DOLBEAULT, P. & POLY, J. B., Variations sur le problème des bords dans $\mathbf{CP}^n$. Prépublication, 1995.
[13] FEDERER, H., *Geometric Measure Theory*. Grundlehren Math. Wiss., 153. Springer-Verlag, New York, 1969.
[14] GOLUZIN, G. M., *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*. Transl. Math. Monographs, 26. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.
[15] HARVEY, R., Holomorphic chains and their boundaries. *Proc. Sympos. Pure Math.*, 30:1 (1977), 309–382.
[16] HARVEY, R. & LAWSON, B., On boundaries of complex analytic varieties I. *Ann. of Math.*, 102 (1975), 233–290.
[17] KING, J., The currents defined by analytic varieties. *Acta Math.*, 127 (1971), 185–220.
[18] — Open problems in geometric function theory, dans *Proceedings of the Fifth International Symposium*, p. 4. Division of Math., The Taniguchi Foundation, 1978.
[19] LAWRENCE, M. G., Polynomial hulls of rectifiable curves. *Amer. J. Math.*, 117 (1995), 405–417.
[20] — Polynomial hulls of sets of finite length in strictly convex boundaries. Manuscrit.
[21] POMMERENKE, CH., On analytic functions with cluster sets of finite linear measure. *Michigan Math. J.*, 34 (1987), 93–99.
[22] STOLZENBERG, G., Uniform approximation on smooth curves. *Acta Math.*, 115 (1966), 185–198.
[23] WERMER, J., Function rings and Riemann surfaces. *Ann. of Math.*, 67 (1958), 45–71.
[24] — The hull of a curve in $\mathbf{C}^n$. *Ann. of Math.*, 68 (1958), 550–561.

Tien Cuong Dinh
Institut de Mathématiques, UMR 9994 du CNRS
Université Pierre et Marie Curie, Tour 46
Couloir 46–56, 5^e^ étage, Case 247
4, place Jussieu
F-75252 Paris Cedex 05
France
dinhtien@math.jussieu.fr

Reçu le 23 Octobre 1996