Invent. Math. 127, 337–347 (1997)

Inventiones mathematicae

Equirépartition des petits points

L. Szpiro[1], **E. Ullmo**[1], **S. Zhang**[2,⋆]

[1]Université Paris–Sud, URA 752, Bât. 425, F-91405 Orsay Cedex, France
(e-mail: szpiro@matups.matups.fr, ullmo@matups.matups.fr)
[2] Department of Mathematics, Princeton University, Fine Hall, Washington Road,
Princeton, NJ 08544, USA (e-mail: szhang@math.princeton.edu)

Oblatum 9-X-1995 & 15-V-1996

1. Introduction

Soit E une courbe elliptique sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On note $E[n]$ (resp $\overline{E}[n]$) le sous–groupe des points de n–torsion (resp l'ensemble des points d'ordre exactement n). Une simple inspection permet de voir que les points de torsion sont denses dans E pour la topologie de $\mathbb{C}$. Ils sont même équidistribués dans le sens suivant: La suite

$$\frac{1}{n^2}\sum_{x\in E[n]}\delta_x$$

converge faiblement vers la mesure de Haar normalisée $d\mu$ de E. Autrement dit, pour toute fonction continue, réelle, f sur E, la suite

$$\frac{1}{n^2}\sum_{x\in E[n]} f(x)$$

converge vers $\int_E f(x)d\mu(x)$.

Quand la courbe elliptique E est définie sur $\mathbb{Q}$ et n'est pas à multiplication complexe, le théorème de l'image ouverte de Serre [12] nous assure que pour tout nombre premier p assez grand, le groupe de Galois $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ agit transitivement sur $\overline{E}[p]$. Soit x_p un point de p–torsion de E et $O(x_p) = G_{\mathbb{Q}}.x_p$ l'orbite sous Galois de x. On constate alors que quand p tend vers l'infini.

$$\frac{1}{\#O(x_p)}\sum_{x\in O(x_p)}\delta_x$$

⋆ Recherche partiellement soutenue par une bourse NSF Grant DMS–9303475. Les auteurs tiennent à remercier le département de mathématiques de l'université d'Orsay qui leur a permis d'être ensemble en mai-juin 1995.

converge faiblement vers la mesure de Haar normalisée $d\mu$. On se propose d'étendre ce type de résultat à toutes les variétés abéliennes définies sur un corps de nombres. On obtient:

Théorème 1.1. *Soit A une variété abélienne sur un corps de nombres K. Soit (x_n) une suite de points de torsion de A. Soit $O(x_n)$ l'orbite de x_n sous l'action du groupe de Galois $G_K = Gal(\overline{K}/K)$. On suppose qu'il n'existe aucune sous–suite de (x_n) contenue dans le translaté, par un point de torsion, d'une sous–variété abélienne stricte de A. Pour toute place à l'infini σ, la suite*

$$\frac{1}{\#O(x_n)} \sum_{x \in \sigma(O(x_n))} \delta_x$$

converge faiblement vers la mesure de Haar de masse totale 1 $d\mu_\sigma$ *de* $A_\sigma(\mathbb{C}) \simeq A \otimes_\sigma \mathbb{C}$.

Le cadre naturel pour démontrer le Théorème 1.1 pourait être un "Théorème de l'image ouverte" pour les variétés abéliennes généralisant les travaux de Serre [12] pour les courbes elliptiques. Le lecteur curieux de la difficulté d'une telle approche consultera avec profit [13]. Notre approche est très différente. Cependant le Théorème 1.1 prouve que les orbites sous Galois des points de torsion d'une variété abélienne sont grandes. En ce sens c'est un substitut à un Théorème de l'image ouverte. Notons cependant que le Théorème 1.1 s'applique aussi aux courbes elliptiques à multiplication complexe. Pour expliquer la méthode de démonstration du Théorème 1.1, il est nécessaire de parler des travaux de Raynaud [11] et de la conjecture de Bogomolov [2].

Pour cela, fixons K un corps de nombres et A une variété abélienne sur K. Soit $T = A_{Tors}(\overline{K})$ son sous–groupe de torsion. On dit qu'une variété $X \subset A$ est *générale si X ne contient aucun translaté, par un point de torsion, d'une sous–variété abélienne.* Raynaud [11] a montré que pour toute variété générale X de A, $X \cap T$ est fini. Pour tout point $x \in A(\overline{K})$, on note $h_{NT}(x)$ la hauteur de Néron-Tate de x. Pour tout sous-ensemble E de $A(\overline{K})$, on appelle *suite de petits points de E une suite infinie (x_n) de points de E tel que la suite $h_{NT}(x_n)$ converge vers 0.* Une généralisation naturelle d'une conjecture de Bogomolov [2] s'énonce: *les variétés générales $X \subset A$ ne contiennent aucune suite de petits points.*

Pour les courbes lisses dans leurs jacobiennes, le premier auteur [14] a montré que la la positivité de la self intersection ω^2 du dualisant relatif (au sens de la théorie d'Arakelov sur les surfaces arithmétiques) impliquait la conjecture de Bogomolov. Il a aussi montré que ces deux énoncés sont équivalents si l'on dispose d'un "Théorème de Nakai–Moishezon arithmétique". Le troisième auteur a montré ce théorème [15], (voire aussi les travaux de Kim [9]). Il a ensuite étendu ces résultats à toute les courbes [16] puis à toutes les sous–variétés des variétés abéliennes [18]: La conjecture de Bogomolov généralisée pour une sous–variété Y d'une variété abélienne A est équivalente à la positivité de la hauteur $h_L(Y)$ de Y définie par un fibré inversible hermitien L sur A. Par cette méthode on obtient la conjecture de Bogomolov dans les cas suivants

1) Une courbe C, de genre g, plongé dans sa jacobienne J_C par un diviseur c, de degré 1, tel que $c - \frac{K_C}{2g-2}$ n'est pas de torsion dans J_C [14], [16].
2) Une courbe C ayant bonne réduction partout dont la jacobienne est à multiplication complexe [4], [18].
3) Une courbe C tel que $\mathrm{End}(J_C) \otimes \mathbb{R}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ où $\mathbb{D}$ (algèbre des quaternions) [18].
4) Une sous–variété Y de A telle que $Y - Y$ engendre A et telle que l'application induite
$$\mathrm{NS}(A) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{NS}(Y) \otimes \mathbb{Q}$$
entre les groupes de Néron–Severi de A et Y n'est pas injective [18]. (Noter qu'en fait 4 est plus général que 3 et que 3 est plus général que 2).

On peut énoncer des conjectures plus optimistes que Bogomolov en termes d'orbites sous Galois des suites strictes de petits points de A. Une suite de petits points de A est dite stricte si aucune sous-suite n'est contenue dans un translaté, par un point de torsion, d'une sous–variété abélienne. On note $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ le groupe de Galois absolu. Pour tout point $x \in A(\overline{K})$, on note $O(x) = G_K.x$ l'ensemble des conjugués de x par l'action de G_K.

Soit A une variété abélienne sur un corps de nombres K, σ une place à l'infini de K et $A_\sigma(\mathbb{C}) = A \otimes_\sigma \mathbb{C}$. On propose les trois conjectures suivantes:

C-1) Pour toute suite stricte de petits points de A, $\{O(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense pour la topologie de Zariski dans $A_\sigma(\mathbb{C})$.
C-2) Pour toute suite stricte de petits points de A, $\{O(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense pour la $\mathbb{C}$–topologie dans $A_\sigma(\mathbb{C})$.
C-3) Pour toute suite stricte de petits points de A, $\{O(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est équidistribué pour la mesure de Haar, de masse totale 1, $d\mu_\sigma$ de $A_\sigma(\mathbb{C})$ en le sens suivant: Pour toute fonction continue réelle sur $A_\sigma(\mathbb{C})$ la suite
$$\frac{1}{\#O(x_n)} \sum_{x_n^g \in O(x_n)} f(\sigma(x_n^g))$$
converge vers $\displaystyle\int_{A_\sigma(\mathbb{C})} f(x)d\mu_\sigma(x)$.

Il est clair que C-1 est une réécriture de la conjecture de Bogomolov et qu'on a la chaine d'implications C-3 implique C-2 implique C-1. Le théorème suivant prouve en fait que la conjecture de Bogomolov implique C-3 et donc l'équivalence de toutes les conjectures.

Théorème 1.2. *Soit A une variété abélienne sur un corps de nombres K et (x_n) une suite de petits points de A. Si la suite x_n converge, pour la topologie de Zariski, vers le point générique (autrement dit si les fermés propres de A contiennent au plus un nombre fini d'élément de l'ensemble $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$), alors pour toute place à l'infini σ, $\{O(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est équidistribué pour la mesure de Haar de masse totale* 1 *$d\mu_\sigma$ de $A_\sigma(\mathbb{C})$.*

Par ailleurs le théorème de Raynaud [11] nous assure que les suites strictes de points de torsion de A sont denses dans A pour la topologie de Zariski. Le Théorème 1.1 est alors un corollaire du Théorème 1.2. On a ainsi montré les conjectures C-2, C-3 pour les suites strictes de points de torsion. Quand A est une courbe elliptique on obtient C-3 pour toute les suites strictes de petits points car C-1 est trivial. Retenons par exemple que l'on a obtenu la conjecture C-2 pour les points de torsion:

Corollaire 1.3. *Soit A une variété abélienne sur un corps de nombres K. Soit (x_n) une suite stricte de points de torsion de A. Pour toute place à l'infini σ et tout ouvert U de $A_\sigma(\mathbb{C})$ pour la $\mathbb{C}$–topologie on a $\sigma(O(x_n)) \cap U \neq \emptyset$ pour tout n assez grand.*

Notons que les conjectures C-1, C-2 et C-3 pour les points de torsion découleraient aisément d'un "Théorème de l'image ouverte" pour les variétés abéliennes généralisant les résultats de Serre [12] pour les courbes elliptiques. Il est intéressant de noter que l'on obtiendrait ainsi une nouvelle preuve du Théorème de Raynaud [11]. Notre démarche va dans le sens opposé puisque nous utilisons les résultats de Raynaud pour obtenir le Théorème 1.1. Pour montrer en quel sens le Théorème 1.1 généralise les résultats de Raynaud [11] retenons le corollaire suivant:

Corollaire 1.4. *Soient A une variété abélienne sur un corps de nombres K, σ un plongement de K dans $\mathbb{C}$ et μ_σ une mesure positive lisse bornée sur $A_\sigma(\mathbb{C})$. Soit E un sous ensemble de $A_\sigma(\mathbb{C})$ et $\overline{E}$ son adhérence pour la $\mathbb{C}$–topologie. On suppose que*

$$\mu_\sigma(\overline{E}) < \mu_\sigma(A_\sigma(\mathbb{C})).$$

Soit $\overline{E}$ contient un translaté, par un point de torsion, d'une sous variété abélienne, soit il y a au plus un nombre fini d'orbites sous Galois de point de torsion contenues dans E.

Preuve. Soit E un sous ensemble de $A_\sigma(\mathbb{C})$ tel que $\mu_\sigma(\overline{E}) < \mu_\sigma(A_\sigma(\mathbb{C}))$ et (x_n) une suite infinie de points de torsion tel que $O(x_n) \subset E$. Si $\overline{E}$ ne contient pas de translaté, par un point de torsion, d'une sous variété abélienne, alors la suite (x_n) est stricte. On peut toujours trouver 2 ouverts U et V avec $E \subset U \subset V$ tels que

$$\mu_\sigma(U) < \mu_\sigma(V) < \mu_\sigma(A_\sigma(\mathbb{C})).$$

L'existence de la suite stricte (x_n) et d'une fonction lisse f nulle sur U positive ou nulle sur $A_\sigma(\mathbb{C})$ et strictement positive sur $A_\sigma(\mathbb{C}) - V$ contredit le Théorème 1.1.

Question. Dans le cas du groupe multiplicatif G_m, l'équidistribution des orbites sous Galois de points d'ordre fini (racines de l'unité) vers la mesure du cercle se déduit facilement de l'irréductibilité des polynomes cyclotomiques. Peut-on esperer un résultat similaire pour les suites de nombres algébriques dont la hauteur canonique tend vers 0?

L'outil principal pour montrer le Théorème 1.2 est la théorie d'Arakelov. Après quelques rappels en théorie d'Arakelov (partie 2), on démontrera dans la partie 3 un énoncé très général d'équirépartition pour les suites (x_n) de points des variétés arithmétiques X dont la hauteur $h_{\overline{L}}(x_n)$ (calculé à l'aide d'un fibré inversible hermitien $\overline{L}$ sur X) converge vers 0. On déduit le Théorème 1.2 en écrivant la hauteur de Néron–Tate comme une hauteur associée à un fibré inversible hermitien sur A. Dans le cas lisse, on utilise les structures cubistes introduite par Breen [3] et utilisé par Moret–Bailly [10]. Dans le cas général, on montre que la démonstration du Théorème 3.1 persiste dans le cadre de la théorie des métriques adéliques [18]. Ce sera l'objet de la partie 4 de ce texte.

Remerciements. Nous tenons à remercier Laurent Moret-Bailly et Jean-Pierre Serre pour une lecture critique d'une première version de ce texte

2. Préliminaire en théorie d'Arakelov

Soit K un corps de nombres, O_K son anneau d'entiers et $S = \mathrm{Spec}(O_K)$. On note $S_{\infty,K}$ l'ensemble des places à l'infini de K. Une variété arithmétique sur S est la donnée d'un S–schema plat et projectif X dont la fibre générique X_K est lisse. Les points de $X(\mathbb{C})$ vus comme $\mathbb{Z}$–schéma s'écrivent comme la réunion disjointe $X(\mathbb{C}) = \cup_{\sigma\in S_{\infty,K}} X_\sigma(\mathbb{C})$, où $X_\sigma(\mathbb{C}) = X \otimes_\sigma \mathbb{C}$. Un fibré inversible $\overline{L} = (L, \|\ \|_\sigma)$ sur X est la donnée d'un fibré inversible L sur X et pour tout $\sigma \in S_{\infty,K}$ d'une métrique C^∞, invariante par la conjuguaison complexe, sur le fibré inversible $L_\sigma = L \otimes_\sigma \mathbb{C}$ de $X_\sigma(\mathbb{C})$. On note alors $\overline{L}_\sigma$ le fibré inversible hermitien $(L_\sigma, \|\ \|_\sigma)$ de $X_\sigma(\mathbb{C})$.

En particulier, un fibré inversible hermitien $\overline{L}$ sur S est la donnée d'un O_K–module projectif de rang 1 et de métriques hermitiennes sur le $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension 1, L_σ, pour toute place à l'infini σ de K. Le degré d'un fibré inversible hermitien $\overline{L}$ sur S est défini par l'égalité:

$$\deg_{Ar}(\overline{L}) = \log \#(L/O_K.s) - \sum_{\sigma\in S_{\infty,K}} \log \|s\|_\sigma$$

pour une section arbitraire s de L.

Soit X une variété arithmétique sur S de dimension (absolue) d et $\overline{L}$ un fibré inversible hermitien sur X. Pour tout $x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$, on note D_x la clôture de Zariski de x dans X. La hauteur $h_{\overline{L}}(x)$ est alors définie par la formule $h_{\overline{L}}(x) = \dfrac{\deg_{Ar}(\overline{L}|D_x)}{\deg D_x}$.

Soit T une variété analytique complexe de dimension $d-1$ et $\overline{L} = (L, \|\ \|)$ un fibré inversible hermitien sur T. Soit K la forme de courbure associée à $\overline{L}$ [8]. On notera dans la suite $c_1(\overline{L})$ la $(1,1)$–forme fermée $\frac{i}{2\pi}K$. Par ailleurs on notera $c_1(L)$ la première classe de Chern d'un fibré inversible L sur une variété algébrique T. A travers l'application degré, on identifiera $c_1(L)^{d-1}$ à un entier naturel.

Rappelons enfin que Gillet et Soulé [5] [6] ont définit pour une variété arithmétique X de dimension d des groupes de Chow arithmétiques $\widehat{CH}^i(X)$ pour tout entier naturel i. Quand X est irréductible, on a $\widehat{CH}^0(X) \simeq \mathbb{Z}$. On dispose d'une application degré

$$\widehat{CH}^d(X) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Pour tout fibré inversible hermitien $\overline{L}$ sur X, on dispose d'une première classe de Chern arithmétique $\hat{c}_1(\overline{L}) \in \widehat{CH}^1(X)$. Grâce au produit d'intersection

$$\widehat{CH}^i(X) \times \widehat{CH}^j(X) \longrightarrow \widehat{CH}^{i+j}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q},$$

on sait définir $\hat{c}_1(\overline{L})^i \in \widehat{CH}^i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. On définit $\hat{c}_0(\overline{L}) = 1$ et on voit $\hat{c}_1(\overline{L})^d$ comme un nombre réel à travers l'application degré.

La proposition suivante qui nous sera utile dans la suite est une reformulation de la partie facile du Théorème 5–2 de [17]. Sa démonstration découle aisément du théorème d'Hilbert–Samuel arithmétique [1], [7] qui est par conséquent l'outil principal de ce texte.

Proposition 2.1. *Soient X une variété arithmétique sur S de dimension d, $\overline{L}$ un fibré inversible hermitien tel que L_K soit ample et que $c_1(\overline{L}_\sigma)$ soit positif pour tout $\sigma \in S_{\infty,K}$. Soit (x_n) une suite de points de $X(\overline{\mathbb{Q}})$tel que pour toute sous–suite (x_{n_p}), $\{(x_{n_p}) | \ p \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans X pour la topologie de Zariski. On a alors:*

$$\liminf h_{\overline{L}}(x_n) \geq \frac{\hat{c}_1(\overline{L})^d}{d . c_1(L_K)^{d-1}}. \tag{1}$$

3. Equirépartition des petits points

Le but de cette partie est de montrer le Théorème général d'équirépartition en théorie d'Arakelov suivant:

Théorème 3.1. *Soit X une variété arithmétique de dimension d, $\overline{L}$ un fibré inversible hermitien sur X tel que L_K soit ample, $c_1(\overline{L}_\sigma)$ soit positif pour tout $\sigma \in S_{\infty,K}$ et $\hat{c}_1(\overline{L})^d = 0$. Soit (x_n) une suite de points de $X(\overline{\mathbb{Q}})$ tel que*

1) $h_{\overline{L}}(x_i)$ converge vers 0.
2) Les sous–suites de (x_n) sont denses dans X pour la topologie de Zariski.

Alors pour toute place à l'infini σ et toute fonction continue f sur $X_\sigma(\mathbb{C})$ la suite

$$\frac{1}{\#O(x_n)} \sum_{x_n^g \in O(x_n)} f(\sigma(x_n^g))$$

converge vers $\int_{X_\sigma(\mathbb{C})} f(x) d\mu(x)$ où

$$d\mu = \frac{c_1(\overline{L}_\sigma)^{d-1}}{c_1(L_\sigma)^{d-1}}$$

est vu comme une mesure sur $X_\sigma(\mathbb{C})$ *de volume 1.*

Preuve. Soit f une fonction continue sur $X_\sigma(\mathbb{C})$ telle que

$$u_n = \frac{1}{\#O(x_n)} \sum_{x_n^g \in O(x_n)} f(\sigma(x_n^g))$$

ne converge pas vers $\int_{X_\sigma(\mathbb{C})} f(x) d\mu(x)$. En remplaçant (x_n) par une sous–suite, on peut supposer que u_n converge vers une constante

$$C \neq \int_{X_\sigma(\mathbb{C})} f(x) d\mu(x).$$

En remplaçant f par $f - \int_{X_\sigma(\mathbb{C})} f(x) d\mu(x)$, (ce qui est loisible car $d\mu$ est de mesure 1) on peut supposer que

$$\int_{X_\sigma(\mathbb{C})} f(x) d\mu(x) = 0.$$

En remplaçant éventuellement f par $-f$ on peut supposer que $C < 0$. Enfin en approximant f par des fonctions C^∞, on peut se ramener au cas où f est C^∞ sur $A_\sigma(\mathbb{C})$.

Pour tout $\lambda > 0$, on note $\overline{L}(\lambda f)$ le fibré inversible hermitien sur X qui est induit de $\overline{L}$ par le changement de métrique en la place σ:

$$\| \ \|_{\overline{L}(\lambda f)} = \| \ \|_{\overline{L}} \exp(-\lambda f).$$

On remarque alors que pour tout x dans $X(\overline{\mathbb{Q}})$ on a:

$$h_{\overline{L}(\lambda f)}(x) = h_{\overline{L}}(x) + \frac{\lambda}{\#O(x)} \sum_{x^g \in O(x)} f(\sigma(x^g)).$$

On en déduit que

$$\lim_{i \to \infty} h_{\overline{L}(\lambda f)}(x_i) = \lambda C. \tag{2}$$

Quand λ est petit, la courbure de $\overline{L}(\lambda f)$ est positive. Comme de plus la suite (x_n) est dense dans X pour la topologie de Zariski, la Proposition 2.1 nous assure que:

$$\lim_{i \to \infty} h_{\overline{L}(\lambda f)}(x_i) = \lambda C \geq \frac{\hat{c}_1(\overline{L}(\lambda f))^d}{d . c_1(L_K)^{d-1}}. \tag{3}$$

Par ailleurs on peut calculer facilement $\hat{c}_1(\overline{L}(\lambda f))^d$. Soit $\mathcal{O}(\lambda f)$ le fibré inversible, trivial sur X, muni en toute place à l'infini différente de σ de la métrique triviale et en la place σ de la métrique définie par $\|1\|_\sigma = \exp(-\lambda f)$. On a alors:

$$\hat{c}_1(\overline{L}(\lambda f))^d = (\hat{c}_1(\overline{L}) + \hat{c}_1(\mathscr{O}(\lambda f)))^d = \sum_{i=0}^{d} C_n^i \hat{c}_1(\overline{L})^{d-i} \hat{c}_1(\mathscr{O}(\lambda f))^i .$$

Comme par hypothèse $\hat{c}_1(\overline{L})^d = 0$ et

$$\hat{c}_1(\overline{L})^{d-1}\hat{c}_1(\mathscr{O}(\lambda f)) = \int_{X_\sigma(\mathbb{C})} \lambda f c_1(\overline{L})^{d-1} = 0,$$

on trouve que

$$\hat{c}_1(\overline{L}(\lambda f))^d = \mathrm{O}(\lambda^2). \tag{4}$$

En faisant tendre λ vers 0 dans les équations (3) et (4), on trouve $C \geq 0$. Cette contradiction termine la preuve du Théorème 3.1.

4. Hauteurs géométriques et hauteurs canoniques

Quand la variété abélienne a bonne réduction sur O_K, on déduit le Théorème 1.2 du Théorème 3.1 en utilisant la théorie des structures cubistes dû à Breen [3] et utilisé par Moret–Bailly [10]. Soient $\mathscr{A}$ le modèle de Néron de A et L un fibré inversible sur A. Une structure cubiste sur L est la donnée d'un fibré inversible hermitien $\overline{L} = (\mathscr{L}, \| \ \|)$ sur $\mathscr{A}$ tel que $\mathscr{L} \otimes_{O_K} K \simeq L$, et tel que l'isomorphisme du cube se prolonge en une isométrie de fibré inversible sur

$$\mathscr{A}^3 \simeq \mathscr{A} \times_{O_K} \mathscr{A} \times_{O_K} \mathscr{A}$$

quand on a muni en toute place à l'infini $O_{\mathscr{A}^3}$ de la métrique triviale. Moret–Bailly [10] prouve l'existence des structures cubistes pour tout fibré inversible L sur A. Pour obtenir cet isomorphisme aux places à l'infini, il faut munir le fibré L_σ de $A_\sigma(\mathbb{C})$ de la métrique du cube définie dans [10]. On note alors $\overline{L}_\sigma$ le fibré inversible L_σ muni de cette métrique. On montre alors que la hauteur $h_{\overline{L}}$ ainsi construite coincide avec la hauteur canonique de Néron–Tate définie par L. Soit d la dimension de $\mathscr{A}$. On montre le Théorème 1.2 en remarquant que $\hat{c}_1(\overline{L})^d = 0$ (utiliser, comme dans la Proposition 2-1 de [14], le Théorème 5–2 de [17] et la densité des points de torsion dans A), que $c_1(\overline{L}_\sigma)$ est positif pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$ (utiliser l'invariance par translation de la forme de courbure $c_1(\overline{L}_\sigma)$ [10] Proposition 3–6), et que

$$d\mu = \frac{c_1(\overline{L}_\sigma)^{d-1}}{c_1(L_\sigma)^{d-1}}$$

est la mesure de Haar sur $A_\sigma(\mathbb{C})$ de masse totale 1.

Quand on ne suppose plus que la variété abélienne a bonne réduction partout, la méthode précédente est insufisante. On ne dispose pas en effet d'une compactification canonique du modèle de Néron. On utilise alors la théorie des fibrés inversibles hermitiens adéliques de Zhang [18]. Cette théorie s'inspire de la construction de Tate de la hauteur canonique. Le but de cette partie est de montrer comment la démonstration du Théorème 3.1 persiste dans ce cadre.

Soient A une variété abélienne sur un corps de nombres K, L un fibré inversible ample et symétrique sur A. On fixe un modèle $(\mathscr{A}, \mathscr{L}) = (\mathscr{A}_0, \mathscr{L}_0)$ de (A, L). ($\mathscr{A}$ est un modèle projectif quelconque de A sur O_K et $\mathscr{L} = \mathscr{L}_O$ un prolongement arbitraire de L à $\mathscr{A}$). Pour toute place à l'infini σ on munit le fibré inversible L_σ de A_σ de la métrique du cube.

Soit s un entier, $s > 1$ et $[s]$ l'endomorphisme multiplication par s de A. On a $[s]^*L \simeq L^{\otimes s^2}$. On construit alors par récurrence à partir de $\mathscr{A}_0$ une suite de modèles projectifs $\mathscr{A}_n$ de A et une suite de prolongements $\mathscr{L}'_n$ de $L^{\otimes s^{2n}}$ à $\mathscr{A}_n$. Dans cette construction, le diagrame suivant:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathscr{A}_{n+1} & \leftarrow & A_{n+1} = A \\
{[s]} \downarrow & & {[s]} \downarrow \\
\mathscr{A}_n & \leftarrow & A_n = A
\end{array}
\tag{5}
$$

est commutatif, $\mathscr{A}_{n+1}$ est le normalisé de $\mathscr{A}_n$ dans le corps des fonctions de A_{n+1} et $[s]$ dans la flêche verticale de gauche est le prolongement de $[s]$ sur $\mathscr{A}_{n+1}$. On définit $\mathscr{L}'_{n+1}$ par $\mathscr{L}'_{n+1} = [s]^*\mathscr{L}'_n$. On munit en toute place à l'infinie

$$\mathscr{L}'_{n+1,\sigma} = L^{\otimes s^{2n}} \otimes_\sigma \mathbb{C}$$

de la métrique obtenue par image inverse à travers le morphisme $[s]$, cette métrique est la métrique du cube ([10] Théorème 3–1 (iv)) . On choisit alors un fibré inversible hermitien $\mathscr{L}_n$ sur $\mathscr{A}_n$ de sorte que l'on ait une isométrie (dans $\mathrm{Pic}(\mathscr{A}_n) \otimes \mathbb{Q}$):

$$\mathscr{L}_n^{\otimes s^{2n}} \simeq \mathscr{L}'_n.$$

Ainsi pour tout n, $(\mathscr{A}_n, \mathscr{L}_n)$ est un modèle de (A, L) et en toute place à l'infini σ, $\mathscr{L}_n \otimes_\sigma (\mathbb{C}) \simeq L_\sigma$ est muni de la métrique du cube $\| \ \|_{cub,\sigma}$. On peut donc appliquer à $\overline{\mathscr{L}}_n = (\mathscr{L}_n, \| \ \|_{cub,\sigma})$ la théorie de Gillet et Soulé décrite dans la partie 2.

Soient Y un sous–schema fermé de A , de dimension de Krull r et $\overline{Y}_n$ son adhérence schematique dans $\mathscr{A}_n$. On montre ([18] Théorème 1–4) que la suite

$$h_{\overline{\mathscr{L}}_n}(Y) = \frac{\hat{c}_1(\overline{\mathscr{L}}_n | \overline{Y}_n)^r}{r.c_1(L|Y)^{r-1}}$$

converge uniformément vers une quantité que l'on note $h_L(Y)$. On vérifie que $h_L(Y)$ ne dépend pas des choix initiaux de $\mathscr{A}_0$ et $\mathscr{L}$.

On montre alors que pour tout point P de A à valeurs dans $\overline{K}$, $h_L(P)$ est la hauteur de Néron–Tate h_{NT} associée à L du point P ([18] 3–1). En utilisant le Théorème 1–10 de [18], on montre que $h_L(A) = 0$. Le Théorème 1.2 est alors une reformulation du Théorème 3.1 qui s'écrit dans le cadre des métriques adéliques sous la forme de la proposition:

Proposition 4.1. *Soient A une variété abélienne de dimension $d-1$ sur un corps de nombres K et L un fibré inversible symétrique ample sur A. Soit (x_n) une suite de point de $A(\overline{K})$ tel que*

1) La suite $h_L(x_i)$ converge vers 0.
2) Les sous–suites de (x_n) sont denses dans A pour la topologie de Zariski.

Pour toute place à l'infini σ et toute fonction continue f sur $A_\sigma(\mathbb{C})$ la suite

$$\frac{1}{\#O(x_n)} \sum_{x_n^g \in O(x_n)} f(\sigma(x_n^g))$$

converge vers $\int_{A_\sigma(\mathbb{C})} f(x)d\mu(x)$ *où*

$$d\mu = \frac{c_1(\overline{L}_\sigma)^{d-1}}{c_1(L_\sigma)^{d-1}}$$

et $\overline{L}_\sigma$ désigne le fibré inversible $L \otimes_\sigma \mathbb{C}$ de $A_\sigma(\mathbb{C})$ muni de la métrique du cube.

Preuve. Soit f une fonction continue sur $A_\sigma(\mathbb{C})$ telle que

$$u_n = \frac{1}{\#O(x_n)} \sum_{x_n^g \in O(x_n)} f(\sigma(x_n^g))$$

ne converge pas vers $\int_{A_\sigma(\mathbb{C})} f(x)d\mu(x)$.

On peut comme dans la preuve du Théorème 3.1 supposer que:

a) La suite $\frac{1}{\#O(x_n)} \sum_{x_n^g \in O(x_n)} f(\sigma(x_n^g))$ converge vers une constante $C < 0$.
b) $\int_{X_\sigma(\mathbb{C})} f(x)d\mu(x) = 0$.
c) La fonction f est C^∞ sur $A_\sigma(\mathbb{C})$.

Soit $(\mathscr{A}_n, \mathscr{L}_n)$ la suite de modèle de (A, L) construite précédemment. Noter que $\overline{\mathscr{L}}_n$ est un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{A}_n$ muni en toute place à l'infini de la métrique du cube. Pour tout réel positif λ, on note $\mathscr{O}_n(\lambda f)$ le fibré inversible hermitien $\mathscr{O}_{\mathscr{A}_n}(\lambda f)$ de $\mathscr{A}_n$. Pour λ suffisament petit, $c_1(\overline{\mathscr{L}}_{n,\sigma} \otimes \mathscr{O}_n(\lambda f))$ est positive (et cela indépendament de n). On remarque que l'on a:

$$\hat{c}_1(\overline{\mathscr{L}}_n \otimes \mathscr{O}_n(\lambda f))^d = \hat{c}_1(\overline{\mathscr{L}}_n)^d + \mathrm{O}(\lambda^2) \tag{6}$$

pour une fonction $\mathrm{O}(\lambda^2)$ indépendante de n (utiliser b et le fait que $\overline{\mathscr{L}}_{n,\sigma}$ en tant que fibré inversible hermitien sur $A_\sigma(\mathbb{C})$ est indépendant de n). Par ailleurs, comme $h_L(A) = 0$ le Théorème 1–4 de [18] nous assure que quand n tends vers l'infini, $\hat{c}_1(\overline{\mathscr{L}}_n)^d$ converge vers 0.

Soit ε un nombre réel positif. Par la convergence uniforme de $h_{\overline{\mathscr{L}}_n}$ vers h_L et la discussion précédente, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a:

1) $\sup_{x \in A_\sigma(\mathbb{C})} |h_{\overline{\mathscr{L}}_n}(x) - h_L(x)| \leq \varepsilon$.

2) $|\frac{\hat{c}_1(\overline{\mathscr{L}}_n \otimes O_n(\lambda f))^d}{d.c_1(L)^{d-1}} - O(\lambda^2)| \leq \varepsilon.$

Par la Proposition 2.1 et l'équation (6) pour tout entier i assez grand, on a:

$$h_{\overline{\mathscr{L}}_N}(x_i) + \frac{\lambda}{\#O(x_i)} \sum_{x_i^g \in O(x_i)} f(\sigma(x_i^g)) \geq \frac{\hat{c}_1(\overline{\mathscr{L}}_N \otimes O_N(\lambda f))^d}{d.c_1(L)^{d-1}} - \varepsilon. \tag{7}$$

On en déduit donc que pour tout entier i assez grand on a:

$$h_L(x_i) + \frac{\lambda}{\#O(x_i)} \sum_{x_i^g \in O(x_i)} f(\sigma(x_i^g)) \geq O(\lambda^2) - 3\varepsilon \tag{8}$$

En faisant tendre i vers l'infini, on obtient

$$\lambda C \geq \mathrm{O}(\lambda^2) - 3\varepsilon. \tag{9}$$

En faisant tendre ε, puis λ vers 0, on montre encore que $C \geq 0$. Cette contradiction termine la preuve de la Proposition 4.1 et donc du Théorème 1.2 quand on a remarqué que h_L est la hauteur de Néron–Tate et que $d\mu$ est la mesure de Haar de masse totale 1 sur $A_\sigma(\mathbb{C})$.

References

1. Abbes, A, Bouche T: Théorème de Hilbert–Samuel arithmétique, Annales de l'institut Fourier. **45** (1995)
2. Bogomolov, F.A.: Points of finite order on an abelian variety, Math. USSR Izv. **17** (1981)
3. Breen, L.: Fonctions thêta et théorème du cube, Lecture notes **980**
4. Burnol, J.-F.: Weierstrass points on arithmetic surfaces, Invent. Math. **107**, 421–432 (1992)
5. Gillet, H, Soulé C.: Characteristic classes for algebraic vector bundles with hermitian metrics, I, II, Ann. of Math. **131**, 162–203 (1990)
6. Gillet, H, Soulé C.: Arithmetic intersection theory, Publ. Math. IHES. **72**, 94–174 (1990)
7. Gillet, H, Soulé C.: Amplitude arithmétique, C.R. Acad. Sci. Paris. **307**, Série I 887–890 (1988)
8. Griffiths, P, Harris, J.: Principles of algebraic geometry, Wiley Interscience, (1978)
9. Kim, M.: Small points on constant arithmetic surfaces, Duke. Math. Journal. **61**, vol **3**, 823–833 (1990)
10. Moret–Bailly, L.: Métriques permises, Séminaire sur les pinceaux arithmétiques: La conjecture de Mordell. Astérisque. **127**, 29–87 (1985)
11. Raynaud, M.: Sous–variétés d'une variété abélienne et points de torsion, Arithmetic and Geometry, Paper dedicated to I. R Shafarevich on the occasion of his sixtieth Birthday, volume 1. J. Coates, S. Helgason editors. (1983) Birkhäuser
12. Serre, J.-P.: Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques, Invent. Math. **15**, 259–331 (1972)
13. Serre, J.-P.: Cours au Collège de France 1984–1985 et 1985–1986, Annuaire du Collège de France
14. Szpiro, L.: Sur les propriétés numériques du dualisant relatif d'une surface arithmétique, The Grothendieck Festschrift **III** Progress in Mathematics (1990)
15. Zhang, S.: Positive line bundles on arithmetic surfaces, Ann. of Maths. **136**, 569–587 (1992)
16. Zhang, S.: Admissible pairing on a curve, Invent. Math. **112**, 171–193 (1993)
17. Zhang, S.: Positive line bundles on arithmetic varieties, J. Amer. Math. Soc. **8**, 187–193 (1995)
18. Zhang, S.: Small points and adelic metrics, J. Algebraic Geometry. **4**, 281–300 (1995)