# 关于单个黎曼zeta非平凡零点虚部上下界

本文通过冯曼戈尔公式反解出$\gamma(x)$（$\gamma(x)$为按虚部从小到大第x个非平凡零点的虚部）

首先定义$W(x)$为朗伯W函数唯一的实数分支，$\gamma(x)$是按虚部从小到大第x个非平凡零点的虚部，$N(T)$为零点计数函数。由于输入限制，圆周率只能用大写Π表示。自然常数是e

由冯曼戈尔公式$N(T)=T/(2\Pi)\ln(T/2\Pi e)+9/16+S(T)+o(1/T)$，令$T=\gamma(x)$：$x=\gamma(x)/(2\Pi)\ln(\gamma(x)/2\Pi e)+9/16+S(\gamma(x))+o(1/\gamma(x))$，反解得$\gamma(x)=2\Pi(x-0.5625+S(\gamma(x))+o(1/\gamma(x)))/W(x-0.5625+S(\gamma(x))+o(1/\gamma(x)))$，而$-1/4-t<S(\gamma(x))+o(1/\gamma(x))<1/6+t$（$t>0,x>q$，t越小q越大），又因为$2\Pi(x-0.5625+S(\gamma(x))+o(1/\gamma(x)))/W(x-0.5625+S(\gamma(x))+o(1/\gamma(x)))$单调递增，带入$S(\gamma(x))+o(1/\gamma(x))$的上下界即可获得$\gamma(x)$的上下界：$2\Pi(x-0.3125-t/W(x-0.3125-t))<\gamma(x)<2\Pi(x-2.1875/3+t/W(x-2.1875/3+t))$（$x>q$，q存在且小于∞），算一算，上界减下界渐进于$(5\Pi+4\Pi t)/6\ln x$，$4\Pi t$可以任意小，因此大概是$5\Pi/6\ln x$（这还是上界减下界的绝对误差）。

综上，我得出了一种绝对误差对数震荡衰减（震荡来源于$S(T)$），仅次于绝对误差幂函数衰减的上下界。